Archiv der Mathematik und Physik

Digitized by Google

Mathematics
QA
1
.A67

Digitized by Google

ARCHIV

der

MATHEMATIK UND PHYSIK

mit besonderer Rücksicht

auf die Bedürfnisse der Lehrer an höheren Unterrichtsanstalten.

Gegründet von

J. A. Grunert,

fortgesetzt von

R. Hoppe,

Dr. ph. Prof. an d. Univ. Berlin.

Zweite Reihe.

Dreizehnter Teil.

Leipzig.

C. A. Koch's Verlagsbuchhandlung,

(H. Ehlers & Co.)

1895.

Digitized by Google

Gen.

Digitized by Google

510.5
A67
M4

ARCHIV

der

MATHEMATIK UND PHYSIK

mit besonderer Rücksicht

auf die Bedürfnisse der Lehrer an höheren Unterrichtsanstalten.

Gegründet von

J. A. Grunert,

fortgesetzt von

R. Hoppe.

Zweite Reihe.

Dreizehnter Teil. Erstes Heft.

(Mit 2 lithographirten Tafeln.)

Leipzig.
C. A. Koch's Verlagsbuchhandlung,
J. Sengbusch.

1894.

Digitized by Google

Verlag von **Louis Nebert** in *Halle a/S.*

Koestler, Prof. H., Oberlehrer, **Vorschule der Geometrie.** Siebente verb. Auflage. Mit 47 Holzschn. gr. 8°. kart. 50 Pf.

Koestler, Prof. H., **Leitfaden d. ebenen Geometrie** f. höhere Lehranstalten. 3 Hefte. Mit vielen Holzschn.

I. Heft: **Kongruenz.** Dritte Auflage. gr. 8. kart. 1 Mark 25 Pf.

II. Heft: **Lehre vom Flächeninhalt. Konstruktionslehre.** Zweite Auflage. gr. 8. kart. 80 Pf.

III. Heft: **Die Aehnlichkeit der Figuren.** Zweite Aufl. gr. 8. kart. 1 Mark.

Koestler, Prof. H., **Leitfaden für den Anfangsunterricht in der Arithmetik** an höh. Lehranstalten. Zweite Aufl. gr. 8. kart. 90 Pf.

Hoffmann, Prof. J. C. V., Redact. d. Zeitschr. f. math. u. naturw. Unterricht, **Vorschule der Geometrie.** Ein methodischer Leitfaden beim Unterricht in der geometrischen Anschauungslehre f. d. unteren Klassen der Gymnasien, Realschulen, Lehrerseminare, sowie zum Selbstunterricht, besonders für Volksschullehrer. 2 Teile. Mit 270 Holzschn. u. 2 lithogr. Figurentafeln. gr. 8. geh. 5 Mark.

Soeben erscheint der

113. Band

von

Journal für die reine und angewandte Mathematik

gegründet von **A. L. Crelle.**

Unter Mitwirkung der Herren Weierstrass und von Helmholtz herausgegeben von

L. Fuchs.

Preis pro Band (4 Hefte) M. 12.—.

Vor Kurzem erschien:

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik

begründet von **Carl Ohrtmann.**

Im Verein mit anderen Mathematikern und unter besonderer Mitwirkung der Herren **Felix Müller** und **Alb. Wangerin** herausgegeben von **E. Lampe.**

XXIII. Bd. Jahrg 1891. Hft. 1. M. 13.—.

Zu beziehen durch jede Buchhandlung.

Verlag von **Georg Reimer** in Berlin.

Digitized by Google

Inhalts-Verzeichniss

des dreizehnten Teils.

Nr. der Abhandlung.		Heft.	Seite.
	Geschichte der Mathematik und Physik.		
XXI.	Mathematisch-Geschichtliches aus dem Codex latinus Monacensis No. 14908. Von M. Curtze . . .	IV	388
	Arithmetik, Algebra und reine Analysis ohne Integralrechnung.		
I.	Beweis des Fermat'schen Satzes von der Unmöglichkeit der Gleichung $x^n + y^n = z^n$ für rationale Zahlen $n > 2$. Von G. Korneck	I	1
XIV.	Nachtrag	III	263
X.	Ueber Transformation und numerische Lösung der kubischen Gleichung. Von R. Hoppe	I	95
X.	Bemerkungen zur Summenformel für die Potenzreihe der natürlichen Zahlen. Von Stephan Glaser.	I	106
XII.	Ueber die Potenzen der Zahlen von der Form $xn \mp 1$. Von G. Speckmann	II	216
XII.	Potenzcongruenzen. Von G. Speckmann . . .	II	217
XII.	Congruenzen. Von G. Speckmann	II	219
XIX.	Fundamentalauflösungen der Pell'schen Gleichung. Von G. Speckmann	III	327
XIX.	Ueber die Auflösung der Pell'schen Gleichung. Von G. Speckmann	III	330

424970

Digitized by Google

Nr. der Abhandlung		Heft.	Seite.
XIX.	Ueber die Zerlegung der Zahlen von der Form $4n+1$ in zwei Quadrate. Von G. Speckmann . . .	III	333
XIX.	Ueber die Reihensysteme, deren Modul ein Vielfaches von 6 ist. Von G. Speckmann . . .	III	334
XIX.	Lösung der von Loyd in der Londoner „Tit Bits“ gestellten Preisaufgabe. Von Benz	III	336
XXII.	Zwei algebraische Aufgaben mit Lösungen. Von Amthor und C. Davids	IV	407

Integralrechnung.

XVII.	Zur fünften Form der Integrabilitätsbedingungen einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung. Von Ernst Schultz	III	311
XVIII.	Zu Bour's Methode der Integration eines Systems simultaner partieller Differentialgleichungen erster Ordnung, Von Ernst Schultz	III	316

Geometrie der Ebene.

II.	Dreizehn Auflösungen des Malfatti'schen Problems. Von C. Davids	I	10
VI.	Ueber successive Fusspunktspolygone. Von H. Schotten	I	65
VIII.	Ueber Formelpaare der mechanischen Quadratur. Von Rudolf Skutsch	I	78
IX.	Ueber eine Behandlung einer Curve 4. Ordnung und der allgemeinen Curve 3. Ordnung mittelst Kegelschnittcoordinaten. Von Hermann Oppenheimer	I	84
X.	Ueber eine Erzeugungsweise der Hyperbel als Enveloppe. Von Wilhelm Rulf	I	90
X.	Neuer Satz über die Cykloide. Von Wilhelm Rulf	I	92
X.	Entwickelung von $\sin E_n(\varepsilon, \varphi)$ in eine nach Potenzen von $\sin\varphi_n$ fortschreitende Reihe. Von C. Benz	I	102
X.	Recursionsformel zur Rectification der Ellipse. Tl. VIII. S. 378. Von C. Benz	I	104

Digitized by Google

Nr. der Abhandlung.		Heft.	Seite.
X.	Reihe zur numerischen Berechnung eines Ellipsenbogens. Von C. Benz	I	105
XI.	Anwendung eines Abbildungsprincips zur Untersuchung von Curven zweiten Grades. Von Stephan Glaser	II	113
XII.	Ueber eine allgemeine Eigenschaft der Curven der reciproken Ordinaten. Von Wilhelm Rulf . .	II	210
XII.	Ueber ebene zusammenhängende Liniengebilde. Von O. Steinert	II	220
XV.	Anwendungen des Ameseder'schen Nullsystems. Von Hermann Oppenheimer	III	268
XVI.	Eigenschaften der imaginären Brennpunkte der Centralkegelschnitte. Von Franz Rogel . . .	III	297
XIX.	Bemerkungen zu den aus einer Curve abgeleiteten Curven. Von Wilhelm Rulf	III	324

Geometrie des Raumes.

VII.	Einaxige Polyeder von kleinster Oberfläche bei constantem Inhalt. Von R. Hoppe	I	69
X.	Projective Lösung einer Aufgabe über die Schraubenlinie. Von Wilhelm Rulf	I	89
X.	Bedingung, unter der 4 von einem Punkte aus gesehene Punkte in einem Raume liegen. Von R. Hoppe	I	100
XIII.	Ueber den Flächen- und Rauminhalt der durch Curven und Flächen erzeugten Flächen- und Raumgrössen. Von Chr. Nehls	III	225
XX.	Fortsetzung	IV	337
XXIII.	Einige quantitative Fragen über 12 Kugeln, die eine Kugel berühren. Von R. Hoppe	IV	439

Trigonometrie.

XII.	Zur Trisection des Winkels. Von Ernst Fischer	II	210
XII.	Dreieckssätze. Von F. Specht	II	220
XII.	Herleitung der trigonometrischen Formel für die Tangente des halben Winkels aus den Seiten des Dreiecks. Von F. Specht	II	223

Digitized by Google

Nr. der Abhandlung. Heft. Seite:

XXIII. Ein Beitrag zur Lösung des Problems der Dreiteilung des Winkels. Von Lothar von Köppen . . . . . IV 446

Mechanik.

IV. Untersuchungen über die Attraction zweier homogenen Körper. Von Emil Liebenthal . . . I 39

Erd- und Himmelskunde.

III. Ueber die Verspätung des Flutmaximums inbezug auf die Culmination des Mondes. Von C. Benz I 35

V. Eine Hypothese über das Gesetz der Dichtigkeit im Innern der Erde. Von Emil Ockinghaus . . I 55

Litterarische Berichte.

IL. Kaiser (Bahn. d. Weltansch.) Padé (Alg.) Macfarlane (alg. of phy. — imag. trig. fct. — fund. th. gen. f. space. — lang.) Stringham (alg.) Schotten (Plan. II.) Kerz Schalablag.) Flor (Quadr. Kreis) Bergbohm (Int. I. II.) Ozegowski (Qudr. Krs.) Kloock (Ar.) Karagianades (nicht eukl. G.) Frege (Ar.) E. R. Müller (4st. Log.) Rohrbach (4st. Log.) Schnellinger (5st. Log.) Ligowski (naut. Taf.) Mayer (Mech. d. Wärm.) Wiedemann (Elektr.) Lang (Phys.) Waals (Capill.) Braun (el. Kraftübertr,) Hovestadt (Masse) Pierce (electr. str.) C. Neumann (math. ph.)

L. Lejeune Dirichlet (Zahlenth.) Scheffler (S. Zahlenth.) Durège (Fct. Compl.) Stolz (Diff. u. Int.) Gravelius (Diff.) Kronecker (Int.) Macfarlane (ell. and hyp. an.) Goursat (part. Diff.) Méray, (an. inf) Puchberger (Diff) Heffter (lin. Diff.) Lie (Gruppe) Oltramare (calc. gén.) d'Ocagne (cal. simpl.) Deter (Diff. u. Int.) Bachmann (Zahlenth. II.) Laska (Fct. Th)

LI. Foth (Ar. — Geom.) Holzmüller (El. Math.) Schwering u. Krimphoff (eb. Geom.) Schering (Ster. — anal.

G.) Lengauer (eb. Geom.) Lieber u. Lühmann (Trig.) Rumpen u. Blind (Plan. — Trig. — Ster.) Roeder (Coord. Kegschn.) Sickenberger (el. Math. II.) Martus (Geom.) Wrobel (Ster.) Rohn u. Papperitz (darst. G.) Sachs (eb. Geom.)

LII. Schlotke (darst. G.) Hermes (Phys.) Börner (Phys.) Pieper (Phys.) Schubert (Aufg. f. Gymn. — f. Realsch. — Res.) Bussler (Ueb.) Lieber u. Köhler (Aufg. — Lös.) Laisant (probl.) Adam (Aufg. plan,) Schlotke (an. Geom.) E. R. Müller (Aufg. plan.) Saint-Germain (exerc. méc.) Jordan (trig. — geod. Taf.) Kämpfe (Taf. f. ein best. Int.) Thannabaur (Rent. — Taf.) Günther (math. Geogr.) Weidefeld (math. Geogr.) Saubert Erdmagn.) Lambert (Karten.) Lagrange u. Gauss (Karten.) Littrow (Kal. 1895). Bureau des longitudes (Annuaire 1895).

Digitized by Google

I.

Beweis des Fermat'schen Satzes von der Unmöglichkeit der Gleichung $x^n + y^n = z^n$ für rationale Zahlen und $n > 2$.

Von

G. Korneck,

Oberlehrer am Progymnasium zu Kempen (Posen).

Vorbemerkung.

Fermat hat auf den Rand des von ihm benutzten Exemplars von Diophants Arithmetik zur 8ten Aufgabe des zweiten Buches, die von der Darstellung einer Quadratzahl als Summe zweier Quadrate handelt, folgende Bemerkung geschrieben: „Dagegen ist es ganz unmöglich, einen Kubus in zwei Kuben, ein Biquadrat in zwei Biquadrate und allgemein irgend eine Potenz ausser dem Quadrat in zwei Potenzen von demselben Exponenten zu zerfällen. Hierfür habe ich einen wahrhaft wunderbaren Beweis entdeckt; aber der Rand ist zu klein, ihn zu fassen". (Wertheim, Uebersetzung des Diophant Seite 52).

Der erwähnte Beweis findet sich in Fermats Werken nirgends vor, und alle Versuche, die obige Behauptung allgemein zu beweisen waren bisher vergeblich.

In Folgendem wird nun ein solcher Beweis geliefert.

§ 1.

Wir nehmen an, es gebe zwei rationale in den kleinsten Zahlen ausgedrückte Brüche $\frac{a}{c}$ und $\frac{b}{d}$ von der Beschaffenheit, dass die Summe

Digitized by Google

ihrer $n$ten Potenzen wieder eine $n$te Potenz z^n sei. Die Nenner c und d mögen, falls sie nicht relativ prim sind, den gemeinsamen Teiler f haben:

$$c = ef, \quad d = fg$$

alsdann muss der den Wert z darstellende Bruch den Nenner efg haben. Man hat also:

$$\left(\frac{a}{ef}\right)^n + \left(\frac{b}{fg}\right)^n = \left(\frac{h}{efg}\right)^n$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit $(efg)^n$, so erhält man

$$(ag)^n + (be)^n = h^n$$

ag, be, h sind nun ganze Zahlen; wenn also die Gleichung

$$x^n + y^n = z^n$$

für rationale gebrochene Zahlen möglich ist, so muss sie auch für ganze Zahlen möglich sein. Wir können deshalb bei der weitern Untersuchung für x, y, z ganze Zahlen voraussetzen.

§ 2.

Hätten in der Gleichung

$$x^n + y^n = z^n$$

zwei der Zahlen den gemeinsamen Teiler t, so müsste auch die dritte Zahl durch t teilbar sein, und der Factor t^n könnte durch Division entfernt werden.

Daraus folgt, dass entweder alle 3 Zahlen x, y, z durch n unteilbar sind, oder dass eine durch n teilbar ist, und die beiden andern unteilbar sind.

§ 3.

Wir beweisen nun zunächst folgenden Satz:

„Sind n und k relative Primzahlen und durch keine Quadrat-„zahl ausser 1 teilbar, so ist die Gleichung

$$nx^2 + ky^2 = z^n$$

„bei ungeradem n in ganzen Zahlen lösbar und jeder Wert von x „ist durch n teilbar."

Beweis: Wenn

$$nx^2 + ky^2 = z^n$$

so ist auch

Digitized by Google

$$\sqrt[n]{nx^2+ky^2} = z \quad \text{oder}$$

$$\sqrt[n]{x\sqrt{n}+y\sqrt{-k}} \cdot \sqrt[n]{x\sqrt{n}-y\sqrt{-k}} = z$$

Da jede Wurzel einer complexen Zahl ebenfalls eine complexe Zahl ist, so kann man setzen

$$\sqrt[n]{x\sqrt{n}\pm y\sqrt{-k}} = \alpha \pm \beta i$$

und man erhält

1) $x\sqrt{n} \pm y\sqrt{-k} = (\alpha \pm \beta i)^n$ und

2) $\alpha^2+\beta^2 = z$

Führt man in Gleichung 1) die Potenzirung aus und setzt die reellen Teile der beiden Seiten sowie die imaginären gleich, so ergiebt sich:

$$x\sqrt{n} = \alpha^n - n_2\alpha^{n-2}\beta^2 + n_4\alpha^{n-4}\beta^4 - n_6\alpha^{n-6}\beta^6 + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} n\alpha\beta^{n-1}$$

$$y\sqrt{k} = n\alpha^{n-1}\beta - n_3\alpha^{n-3}\beta^3 + n_5\alpha^{n-5}\beta^5 - n_7\alpha^{n-7}\beta^7 + \ldots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} \beta^n$$

Setzt man nun

$$\alpha = \lambda\sqrt{n} \quad \text{und} \quad \beta = \varphi\sqrt{k}$$

so erhält man die 3 Gleichungen:

3) $$x = n\lambda\left[n^{\frac{n-3}{2}}\lambda^{n-1} - n_2 n^{\frac{n-5}{2}} k\lambda^{n-3}\varphi^2 + n_4 n^{\frac{n-7}{2}} k^2\lambda^{n-5}\varphi^4 - \ldots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} k^{\frac{n-1}{2}}\varphi^{n-1}\right]$$

4) $$y = \varphi\left[n_1 n^{\frac{n-1}{2}}\lambda^{n-1} - n_3 n^{\frac{n-3}{2}} k\lambda^{n-3}\varphi^2 + n_5 n^{\frac{n-5}{2}} k^2\lambda^{n-5}\varphi^4 - \ldots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} k^{\frac{n-1}{2}}\varphi^{n-1}\right]$$

5) $z = n\lambda^2 + k\varphi^2$

Wir haben also die 3 Unbekannten x, y, z als Functionen der beiden Unbekannten λ und φ dargestellt. Alle möglichen ganzen

Digitized by Google

(positiven und negativen) Werte von λ und φ liefern für x, y, z ganze Zahlen, und wie Gleichung 3) zeigt, ist dann x durch n teilbar.

Da aber möglicherweise auch gebrochene oder irrationale Werte von λ und φ für x, y, z ganze Zahlen ergeben, so ist zu untersuchen, ob dann ebenfalls x durch n teilbar sein muss.

Man setze

$$\lambda = \frac{\gamma}{\delta\varepsilon} \quad \text{und} \quad \varphi = \frac{\xi}{\varepsilon\eta}$$

(∂, ε, η ganze Zahlen, δ und η relativ prim), so geht Gleichung 5) über in

$$z\delta^2\varepsilon^2\eta^2 = n\gamma^2\eta^2 + k\xi^2\delta^2$$

Es müsste also n durch δ^2 und k durch η^2 teilbar sein. Nach Voraussetzung sind aber n und k durch keine Quadratzahl ausser 1 teilbar, folglich ist $\delta = \eta = 1$. Man erhält also:

$$z = \frac{n\gamma^2}{\varepsilon^2} + \frac{k\xi^2}{\varepsilon^2}$$

Wäre nun $\varepsilon = n\vartheta$ möglich, so hätte man

$$\lambda = \frac{\gamma}{n\vartheta}, \quad n\lambda = \frac{\gamma}{\vartheta}$$

und in Gleichung 3) wäre x nicht durch n teilbar. Man erhält aber

$$z = \frac{\gamma^2}{n\vartheta^2} + \frac{k\xi^2}{n^2\vartheta^2}$$

folglich

$$zn^2\vartheta^2 = n\gamma^2 + k\xi^2$$

und es müsste k durch n teilbar sein. Da dies nach Voraussetzung unmöglich ist, so kann ε kein Vielfaches von n sein, und es bleibt also x auch für

$$\lambda = \frac{\gamma}{\varepsilon}, \quad \varphi = \frac{\xi}{\varepsilon}$$

durch n teilbar, und zwar auch wenn γ und ξ irrational sind.

§ 4.

Aus $x^n + y^n = z^n$ folgt

$$x^n = z^n - y^n = (z-y)(z^{n-1} + z^{n-2}y + \ldots + zy^{n-2} + y^{n-1})$$

Die Division von

$$N = z^{n-1} + z^{n-2}y + z^{n-3}y^2 + \ldots + zy^{n-2} + y^{n-1}$$

Digitized by Google

durch $z-y$ und S ergiebt ny^{n-1} als Rest. Haben also $z-y$ und S einen gemeinsamen Teiler, so muss auch der Rest ny^{n-1} durch denselben teilbar sein. Da aber x und y relativ prim sind, so kann der gemeinsame Teiler von $x-y$ und ny^{n-1} und deshalb auch von S nur n sein.

Wenn also in der Gleichung

$$(z-y)\,S = x^n$$

die Zahl x durch n unteilbar ist, so haben $z-y$ und S keinen gemeinsamen Factor, und infolge dessen muss sowol $z-y$ als auch S eine $n$te Potenz sein.

§ 5.

Es sei nun x durch n nicht teilbar, $z-y = q^n$, $S = r^n$, so ist

$$x = qr$$

Ist ferner $z+y = p$, so hat man

$$2z = p+q^n, \quad 2y = p-q^n, \quad 2x = 2qr$$

Setzt man diese Werte in die Gleichung

$$(2z)^n - (2y)^n = (2x)^n$$

so erhält man:

$$(p+q^n)^n - (p-q^n)^n = (2qr)^n = 2^n q^n r^n$$

Für eine ungerade Primzahl n erhält man durch Ausführung der Potenzirung und Division durch $2q^n$ (wenn $n_a = n\varphi_a$):

$$np^{n-1} + \varphi_3 np^{n-3}q^{2n} + \varphi_5 np^{n-5}q^{4n} + \ldots + \varphi_2 npq^{n(n-3)} + q^{n(n-1)} = 2^{n-1}r^n$$

Dafür kann man schreiben

$$np^{n-1} + [\varphi_3 np^{n-3} + \varphi_5 np^{n-5}q^{2n} + \ldots + \varphi_2 npq^{n(n-5)} + q^{n(n-3)}]q^{2n} = 2^{n-1}r^n$$

Alle Glieder der eingeklammerten Summe sind mit Ausnahme von $q^{n(n-3)}$ durch n teilbar; folglich ist die Summe selbst nicht durch n teilbar. Bezeichnen wir diese Summe mit ku^2, so dass $u = 1$, wenn die Summe keinen quadratischen Factor enthält, so erhalten wir die Gleichung

$$np^{n-1} + ku^2q^{2n} = 2^{n-1}r^n$$

in welcher k weder durch n noch durch einen quadratischen Factor teilbar ist.

Multiplicirt man diese Gleichung mit 2^n+1, so ergiebt sich:

Digitized by Google

$$2^{n+1} n p^{n-1} + 2^{n+1} k u^2 q^{2n} = 2^{2n} r^n = (4r)^n$$

Setzt man

$$2^{\frac{n+1}{2}} p^{\frac{n-1}{2}} = a, \quad 2^{\frac{n+1}{2}} u q^n = b, \quad 4r = c$$

so erhält man

$$n a^2 + k b^2 = c^n$$

Weil nun k weder durch n noch durch eine Quadratzahl teilbar ist, so würden die Zahlen a, b, c eine ganzzahlige Lösung der Gleichung

$$n x^2 + k y^2 = z^n$$

ergeben, und es müsste nach § 3. a durch n teilbar sein.

Da $a = 2^{\frac{n+1}{2}} p^{\frac{n-1}{2}}$, so müsste also

$$p = z + y$$

durch n teilbar sein. Da in der ganzen Entwickelung dieses § die Vertauschung von y und x nichts ändert, falls auch y als unteilbar durch n angenommen wird, so müsste auch $z + x$ durch n teilbar sein.

§ 6.

Weil in der Gleichung

$$x^n + y^n = z^n \qquad x + y > z$$

sein muss, so kann man setzen

$$x + y = z + s \quad \text{und} \quad (x+y)^n = (z+s)^n$$

Man erhält also

$$x^n + n x^{n-1} y + \varphi_2 n x^{n-2} y^2 + \varphi_3 n x^{n-3} y^3 + \ldots + \varphi_2 n x^2 y^{n-2} + n x y^{n-1} + y^n$$
$$= z^n + n z^{n-1} s + \varphi_2 n z^{n-2} s^2 + \varphi_3 n z^{n-3} s^3 + \ldots$$
$$+ \varphi_2 n z^2 s^{n-2} + n z s^{n-1} + s^n$$

Da nun

$$x^n + y^n = z^n$$

so ergiebt sich

$$(x^{n-1} y - z^{n-1} s) + \varphi_2 (x^{n-2} y^2 - z^{n-2} s^2) + \varphi_3 (x^{n-3} y^3 - z^{n-3} s^3) + \ldots$$
$$+ \varphi_2 (x^2 y^{n-2} - z^2 s^{n-2}) + (x y^{n-1} - z s^{n-1}) = \frac{s^n}{n}$$

Es muss also

$$s = x + y - z$$

durch n teilbar sein.

Digitized by Google

§ 7.

Wir erhalten also bei der Voraussetzung, dass keine der Zahlen x, y, z durch n teilbar sei, für eine ungerade Primzahl n

$$\left.\begin{array}{ll} 1) & z+y \\ 2) & z+x \\ 3) & x+y-z \end{array}\right\} \text{ durch } n \text{ teilbar}$$

Folglich müsste

$$(z+y)+(z+x)-(x+y-z)=3z$$

durch n teilbar sein. Für $n > 3$ wäre also z und infolge von 1) und 2) auch y und x gegen die Voraussetzung durch n teilbar.

Infolge dieses Widerspruchs ist die Gleichung

$$x^n+y^n=z^n$$

für 3 ganze durch n unteilbare Zahlen unmöglich, wenn n eine Primzahl und grösser als 3 ist.

Für $n=3$ ist die Annahme, dass alle 3 Zahlen durch 3 unteilbar seien, nicht möglich; denn es ist

$$x+y-z=3u, \quad \text{also}$$

$$x+y=z+3u, \quad \text{folglich} \quad (x+y)^3=(z+3u)^3$$

Daraus folgt

$$xy(x+y)=3u(z^2+9zu+9u^2)$$

Es muss also entweder x oder y oder $x+y$ und damit z durch 3 teilbar sein.

§ 8.

Setzen wir aber eine der Zahlen als teilbar durch n, die beiden andern als unteilbar voraus, so muss in jedem Falle eine der Zahlen x und y unteilbar sein. Es sei entweder y oder z durch n teilbar, x also unteilbar; dann ist nach § 5. $z+y$ durch n teilbar, und da entweder z oder y nach Voraussetzung teilbar ist, so müssten beide Zahlen z und y und deshalb auch x durch n teilbar sein.

Es kann also für eine ungerade Primzahl n die Gleichung

$$x^n+y^n=z^n$$

auch nicht möglich sein, wenn eine der Zahlen als durch n teilbar vorausgesetzt wird.

Digitized by Google

§ 9.

Da es also keine rationalen Werte giebt, welche der Gleichung

$$x^n + y^n = z^n$$

genügen, wenn n eine Primzahl und grösser als 2 ist, so ist die Gleichung auch für jeden Exponenten unmöglich, der ein Vielfaches einer solchen Primzahl ist; denn die Gleichung

$$x^{n\alpha} + y^{n\alpha} = z^{n\alpha}$$

kann geschrieben werden

$$(x^\alpha)^n + (y^\alpha)^n = (z^\alpha)^n$$

und da es für x^α, y^α, z^α keine rationalen Werte giebt, so kann es auch für x, y, z keine geben.

Es bleiben also noch die Exponenten, welche Potenzen von 2 sind, zu betrachten. Da sie durch 4 teilbar sind und die Gleichung

$$x^{4\alpha} + y^{4\alpha} = z^{4\alpha}$$

geschrieben werden kann

$$(x^\alpha)^4 + (y^\alpha)^4 = (z^\alpha)^4$$

so bleibt nur noch die Unmöglichkeit von

$$x^4 + y^4 = z^4$$

zu beweisen.

§ 10.

Soll die Gleichung

$$x^4 + y^4 = z^4 \quad \text{oder} \quad (x^2)^2 + (y^2)^2 = (z^2)^2$$

für ganze Zahlen gelten, so kann man setzen

$$x^2 = p^2 - q^2, \quad y^2 = 2pq, \quad z^2 = p^2 + q^2$$

Aus

$$x^2 + q^2 = p^2 \quad \text{und} \quad z^2 = p^2 + q^2$$

folgt, dass p und z ungerade, q gerade und deshalb x ungerade sein muss. Da $p > x$; $z > p$ und die Differenzen $p - x$, $z - p$ gerade sein müssen, so kann man setzen

$$p - x = 2u, \quad z - p = 2v$$

folglich

$$x = p - 2u, \quad z = p + 2v$$

Man erhält also

$$x^2 = p^2 - 4pu + 4u^2 = p^2 - q^2 \quad \text{und} \quad z^2 = p^2 + 4pv + 4v^2 = p^2 + q^2$$

Daraus folgt

Digitized by Google

$$4pu - 4u^2 = q^2 \quad \text{und} \quad 4pv + 4v^2 = q^2$$

Mithin ist

$$pu - u^2 = pv + v^2$$

und deshalb

$$p = \frac{u^2 + v^2}{u - v}$$

Da p eine ganze Zahl sein soll, und $u^2 + v^2$ nicht durch $u - v$ teilbar ist, so muss

$$u - v = 1, \quad \text{also} \quad u = 1 + v$$

sein. Folglich ist

$$p = 1 + 2v + 2v^2$$

und man erhält

$$q^2 = 4v(1 + 3v + 2v^2) = 4v(v+1)(2v+1) = 2v(2v+1)(2v+2)$$

Das Product der 3 aufeinander folgenden Zahlen $2v$, $2v+1$, $2v+2$ kann aber niemals ein Quadrat sein; folglich ist q irrational und wegen $y^2 = 2pq$ auch y.

Daher ist die Gleichung

$$x^4 + y^4 = z^4$$

für rationale Zahlen unmöglich.

„Die Fermat'sche Behauptung, dass keine Potenz mit Ausnahme „der zweiten die Summe zweier Potenzen desselben Grades sein „kann, ist somit für alle möglichen Fälle bewiesen."

Digitized by Google

II.

Dreizehn Auflösungen des Malfatti'schen Problems.

Von

C. Davids.

Aufgabe. „In ein gegebenes Dreieck *DEF* 3 Kreise zu be-„schreiben, so dass jeder dieser Kreise 2 Seiten des Dreiecks berührt „und die 3 Kreise sich auch gegenseitig berühren".

I. Auflösung.

(Vervollständigung eines von Crelle mitgeteilten Versuchs einer Auflösung).

Es seien die Halbmesser der gesuchten Kreise x, y, z, Figur 9. Man hat nun (wenn $\mathfrak{R}$ Inkreisradius, l, m, n Projectionen der Eckradien u, v, w auf die Seiten d, e, f)

$$\mathfrak{T}'\mathfrak{U} = d - E\mathfrak{T}' - F\mathfrak{U} = d - \frac{my}{\mathfrak{R}} - \frac{nz}{\mathfrak{R}}$$

aber auch

$$\mathfrak{T}'\mathfrak{U} = \sqrt{MN^2 - (z-y)^2} = \sqrt{(y+z)^2 - (z-y)^2} = 2\sqrt{yz}$$

also

$$\left.\begin{aligned} &1) \ldots d\mathfrak{R} = my + nz + 2\mathfrak{R}\sqrt{yz} \\ &\text{ebenso} \\ &e\mathfrak{R} = lx + nz + 2\mathfrak{R}\sqrt{xz} \\ &f\mathfrak{R} = lx + my + 2\mathfrak{R}\sqrt{xy} \end{aligned}\right\} \text{Grundgleichungen}$$

Digitized by Google

Da nun

$$u^2 m d l = v^2 l e$$

ist (Form. 175); so multiplicire man die erste Gleichung mit $u^2 m$ und die zweite Gleichung mit $v^2 l$; man erhält:

$$u^3 m d \Re = u^2 m(my + nz + 2\Re\sqrt{yz})$$
$$v^2 l e \Re = v^2 l(lx + nz + 2\Re\sqrt{xz})$$

also

2) . . . $u^2 m^2 y + u^2 m nz + u^2 m 2\Re\sqrt{yz} = v^2 l^2 x + v^2 l n z + 2v^2 l \Re\sqrt{xz}$

Es handelt sich jetzt darum, die z in dieser Gleichung so zu verteilen, dass auf beiden Seiten die Quadratwurzel ausgezogen werden kann. Wenn die z der rechten Seite auf die linke Seite der Gleichung gebracht werden, so ist der Coefficient alsdann

$u^2 m n - v^2 l n = \Re^2 fe - \Re^2 fd = \Re^2 u^2 - \Re^2 v^2$ (Formel 179, 186)

Hierdurch verändert sich die Gleichung 2) in

3) . . . $u^2 m^2 y + \Re^2 u^2 z + 2\Re u^2 m\sqrt{yz} = v^2 l^2 x + \Re^2 v^2 z + 2\Re v^2 l\sqrt{xz}$

Also

$$um\sqrt{y} + \Re u\sqrt{z} = vl\sqrt{x} + \Re v\sqrt{z}$$

Oder

4) . . . . $u(m\sqrt{y} + \Re\sqrt{z}) = v(l\sqrt{x} + \Re\sqrt{\varepsilon})$

Ebenso

$$v(n\sqrt{z} + \Re\sqrt{x}) = w(m\sqrt{y} + \Re\sqrt{x})$$
$$w(l\sqrt{x} + \Re\sqrt{y}) = u(n\sqrt{z} + \Re\sqrt{y})$$

Wird nun die erste dieser Gleichungen mit w und die dritte mit v multiplicirt; so erhält man

$$uwm\sqrt{y} + (uw - vw)\Re\sqrt{z} = vwl\sqrt{x}$$
$$uvn\sqrt{z} + (uv - vw)\Re\sqrt{y} = vwl\sqrt{x}$$

also

5) . . . $(muw + vw\Re - uv\Re)\sqrt{y} = (nuv + vw\Re - uw\Re)\sqrt{z}$

$$vwn = umn - \Re^2 u$$
$$(mw + mn - \Re v - \Re^2)\sqrt{y} = (nv + mn - \Re w - \Re^2)\sqrt{z}$$

Ebenso

6) . . . $(lv + lm - \Re u - \Re^2)\sqrt{x} = (mu + lm - \Re v - \Re^2)\sqrt{y}$

Oder

$$[l(m + v - \Re) - \Re(\Re + u - l)]\sqrt{x}$$
$$= [m(l + u - \Re) - \Re(\Re + v - m)]\sqrt{y}$$

Digitized by Google

Nun ist

$$\Re + u - l : \Re + v - m = l(m + v - \Re) : m(l + u - \Re)$$

also auch

$$= l(m + v - \Re) - \Re(n + u - l) : m(l + u - \Re) - \Re(\Re + v - m)$$

Daher ergiebt sich aus Gleichung 6):

7) . . . $(\Re + u - l)\sqrt{x} = (\Re + v - m)\sqrt{y} = (\Re + w - n)\sqrt{z}$

Anmerkung 1. Man kann die erste Grundgleichung auch mit

$$e = \frac{muw}{\Re v}$$

und die zweite mit

$$d = \frac{lvw}{\Re u}$$

multipliciren; dadurch erhält man ebenfalls die Gleichung 2).

Anmerkung 2. Setzt man in die Gleichung 5)

$$muw = \Re ve \quad \text{und} \quad nuv = \Re wf$$

so kommt

$$v(e + w - u)\sqrt{y} = w(f + v - u)\sqrt{z}$$
$$w(f + u - v)\sqrt{z} = u(d + w - v)\sqrt{x}$$
$$u(d + v - w)\sqrt{x} = v(e + u - w)\sqrt{y}$$

Um nun auf Gleichung 7) zu kommen, benutze man Formel 373.

Anmerkung 3. Die Gleichung 7) findet sich in einem Buche von Crelle (aber nicht abgeleitet). (Mathematische Aufsätze und Bemerkungen, Berlin 1821). Eine bessere Ableitung der Gleichung 7) aus 4) folgt in Anmerkung 13.

Von nun an können verschiedene Wege eingeschlagen werden.

α. Erstes Verfahren.

$$d\Re = my + nz + \Re\sqrt{yz} + \Re\sqrt{yz} \tag{1}$$

$$d\Re = my + nz + \Re\left(\frac{\Re + v - m}{\Re + w - y}\right)y + \Re\left(\frac{\Re + w - n}{\Re + v - m}\right)z \tag{7}$$

$$d\Re = \left(\frac{mw - mn + \Re^2 + \Re v}{\Re + w - n}\right)y + \left(\frac{av - mn + \Re^2 + \Re w}{\Re + v - m}\right)z$$

Digitized by Google

$$d\Re = \frac{[\Re(\Re+v-m)+m(\Re+w-n)]}{\Re+w-n} \cdot \frac{(\Re+u-l)^2}{(\Re+v-m)^2}x$$
$$+ \frac{[\Re(\Re+w-n)+n(\Re+v-m)]}{\Re+v-m} \cdot \frac{(\Re+u-l)^2}{(\Re+w-n)^2}x \qquad (7)$$

$$d\Re = \frac{[\Re(\Re+v-m)+\frac{(\Re+v-m)(v+m-\Re)}{2\Re}.(\Re+w-n)](\Re u+u-l)^2x}{(\Re+w-n)(\Re+v-m)^2}$$
$$+ \frac{[\Re(\Re+w-n)+\frac{(\Re+w-n)(w+n-\Re)}{2\Re}(\Re+v-m)] \cdot (\Re+u-l)^2x}{(\Re+v-m)(\Re+w-n)^2}$$

$$2d\Re^2 = \frac{[2\Re^2+(v+m-\Re)(\Re+w-n)] \cdot (\Re+u-l)^2x}{(\Re+v-m)(\Re+w-n)}$$
$$+ \frac{[2\Re^2+(w+n-\Re)(\Re+v-m)] \cdot (\Re+u-l)^2x}{(\Re+v-m)(\Re+w-n)}$$

$$2dR^2 = \frac{[2\Re^2+2\Re m+2\Re n-2mn+2vw}{(\Re+v-m)(\Re+w-n)}(\Re+u-l)^2x$$

$$d\Re^2 = \frac{[\Re^2+\Re d-\frac{\Re^2(l+m+n)}{l}+\frac{\Re ud}{l}] \cdot (\Re+u-l)^2x}{(\Re+v-m)(\Re+w-n)}$$

$$dl\Re^2 = \left[\frac{\Re^2 l+\Re dl-\Re^2 l-\Re^2 d+\Re vd}{(\Re+v-m)(\Re+w-n)}\right] \cdot (\Re+u-l)^2x$$

$$l\Re = \frac{[l-\Re+u] \cdot (\Re+u-l)^2x}{(\Re+v-m)(\Re+w-n)}$$

$$\frac{(\Re+u-l)(u+l-\Re)\Re}{2\Re} = \frac{(u+l-\Re)(\Re+u-l)^2x}{(\Re+v-m)(\Re+w-n)}$$

$$8) \ldots x = \frac{(\Re+v-m)(\Re+w-n)}{2(\Re+u-l)}$$

Nach dieser Gleichung kann leicht eine Construction ausgeführt werden. (Erste Constr.)

β. Zweites Verfahren.

Wird von der Summe der zweiten und dritten Grundgleichung die erste subtrahirt, so erhält man:

$$9) \ldots (e+f-d)\Re = 2lx+2\Re\sqrt{xy}+2\Re\sqrt{xz}-2\Re\sqrt{yz}$$

Digitized by Google

$$\sqrt{xy} = \frac{\Re + u - l}{\Re + v - m}\, x \tag{7}$$

$$\sqrt{xz} = \frac{\Re + u - l}{\Re + w - n}\, x$$

$$\sqrt{yz} = \frac{(\Re + u - l)^2}{(\Re + v - m)(\Re + w - n)}\, x$$

$$2l\Re = \left| 2l + 2\Re\left(\frac{\Re+u-l}{\Re+v-m}\right) + 2\Re\left(\frac{\Re+u-l}{\Re+w-n}\right) - 2\Re\,\frac{(\Re+u-l)^2}{(\Re+v-m)(\Re+w-n)}\right] x$$

$$l = \frac{(\Re + u - l)(\Re - u + l)}{2(u - l)}$$

10) . . . $\frac{(\Re-u+l)}{2(u-l)}\Re = \left[\frac{(\Re-u+l)}{2(u-l)} + \frac{\Re}{\Re+v-m} + \frac{\Re}{\Re+w-n} - \frac{\Re(\Re+u-l)}{(\Re+v-m)(\Re+w-n)}\right] x$

$$\Re(\Re-u+l)(\Re+v-m)(\Re+w-n) = \left\{\begin{array}{l}(\Re-u+l)(\Re+v-m)(\Re+w-n)\\ +2\Re(u-l)(\Re+w-n)\\ +2\Re(u-l)(\Re+v-m)\\ -2\Re(u-l)(\Re+u-l)\end{array}\right\} x$$

oder

$$\left.\begin{array}{l} = \Re^3\\ +\Re^2(u+v+w)\\ -\Re^2(l+m+n)\\ +\Re(uv+uw+vw)\\ -\Re(um+un+vl+vl+vn+wl+wm)\\ +\Re(lm+ln+mn)\\ +lvw+muw+uuv\\ -umn-vln-wlm\\ -uvw\\ +lmn\\ \quad -2\Re(u-l)^2\end{array}\right\} x$$

Nun ist

$$\Re um + \Re un = \Re ud = lvw$$

daher heben sich die fünfte und siebente Reihe gegenseitig auf. Ferner ist

$$lmn = \Re^2(l+m+n)$$

und

Digitized by Google

$$\Re(lm+ln+mn) = \Re^3+uvw \qquad \text{(F. 357)}$$

Die Vereinfachung ergiebt also

$$\Re(\Re-u+l)(\Re+v-m)(\Re++-n) = \left.\begin{array}{l} 2\Re^3 \\ +\Re^2(u+v+w) \\ +\Re(uv+uw+vw) \\ -(umn+vln+wlm \\ \quad -2\Re(u-l)^2 \end{array}\right\} x$$

Ferner

$$wmn = \Re vw+\Re^2 u \qquad \text{(F. 199)}$$

also

$$umn+vln+wlm = \Re(uv+uw+vw)+\Re^2(u+v+w)$$

Also

$$\Re(\Re-u+l)(\Re+v-m)(\Re+w-n) = [2\Re^3-2\Re(u-l)^2]x$$

$$(\Re-u+l)(\Re+v-m)(\Re+w-n) = 2(\Re+u-l)(\Re-u+l)x$$

$$x = \frac{(\Re+v-m)(\Re+w-n)}{2(\Re+u-l)}$$

γ. Drittes Verfahren.

Es werde hier von Gleichung 9) ausgegangen

$$2\Re l = 2lx+2\Re\sqrt{xy}+2\Re\sqrt{wz}-2\Re\sqrt{yz}$$

$$x = \frac{(\Re+v-m)(\Re+w-n)}{(\Re+u-l)}\sqrt{yz} \qquad (7)$$

$$2\Re l = 2l\frac{(\Re+v-m)(\Re+w-n)}{(\Re+u-l)^2}\sqrt{yz}+2\Re\frac{(\Re+w-n)}{\Re+u-l}\sqrt{yz}-2\Re\sqrt{yz} \qquad (7)$$

$$+2\Re\frac{(\Re+v-m)}{\Re+u-l}\sqrt{yz}$$

11) . . . $(\Re+u-l)^2 2l\Re^2 = [2l(\Re+v-m)(\Re+w-n)$

$$+2\Re(\Re+u-l)(\Re+v-m+\Re+w-n-(\Re+u-l))]\sqrt{yz}$$

$$2l-\frac{(\Re+u-l)(u+l-n)}{\Re}$$

$$(\Re+u-l)\,.\,2l\Re^2 = [(u+l-\Re)(\Re+v-m)(\Re+w-n)$$

$$+2\Re^2(\Re+v+w-u+l-m-n)]\sqrt{yz}$$

$$(\Re+u-l)\,.\,2l\Re^2 = [2\Re^2(u-v-w+l+m+n-\Re)$$

$$+2\Re^2(\Re+v+w-u+l-m\quad n)\sqrt{yz}$$

Digitized by Google

$$(\Re + u - l)\,2l\Re^2 = 4\Re^2 l\sqrt{yz}$$

12) . . . $2\sqrt{yz} = \Re + u - l$

Jetzt kann man durch Gleichung 7) ohne Mühe Gleichung 8) erhalten.

δ. Viertes Verfahren.

$$\frac{(\Re + u - l)\sqrt{x} = (\Re + v - m)\sqrt{y}}{(\Re + u - l)\sqrt{xy} = (\Re + v - m)y} \qquad (7)$$

Ebenso

$$(\Re + v - m)\sqrt{xy} = (\Re + u - l)x$$

subtrahirt

$$(u - l - v + m)\sqrt{xy} = (\Re + v - m)y - (\Re + u - l)x$$

$$(u - l - v + m)2\Re\sqrt{xy} = (2\Re^2 + 2\Re v - 2\Re m)y - (2\Re^2 + 2\Re u - 2\Re l)x$$

Nun ist

$$2\Re\sqrt{xy} = f\Re - lx - my \qquad (1)$$

also

$$(u - l - v + m]2\Re\sqrt{xy} = f\Re(u - v + m - l) - l(u - v + m - l)x - m(u - v - x + m - l)y$$

Also

$$f\Re(u - v + m - l) = (2\Re^2 + 2\Re v - 2\Re m)y - (2\Re^2 + 2\Re u - 2\Re l)x + m(u - v + m - l)y + l(u - v + m - l)x$$

$$f\Re(u - v + m - l) + (2\Re^2 + + 2\Re u - 2\Re l + l^2 - lm - lu + lv)x = (2\Re^2 + 2\Re v - 2\Re m + m^2 - lm - mv + mu)y$$

subtrahirt erste Glch.

$$\Re^2 + 2\Re u - 2\Re l + u^2 - 2lu + l^2)x = \Re^2 + 2\Re v - 2\Re m + v^2 - 2mv + m^2)y$$

$$f\Re(u - v + m - l) + (\Re^2 - u^2 - lm + lu + lv)x = (\Re^2 - v^2 - lm + mv + mu)y$$

$$u^2 - \Re^2 = l^2 \qquad v^2 - \Re^2 = m^2$$

$$f\Re(u - v + m - l + l(u + v - f)x = m(n + v - f)y$$

$$lx = \frac{f\Re(v - m)}{u + v - f} = my - \frac{f\Re(u - l)}{u + v - f}$$

Nun ist

$$\frac{\Re[u^2 + fm + uv - f(u + v)]}{u + v - f} - \frac{\Re[v^2 + fl + uv - f(u + v)]}{u + v - f} \quad \text{subtr.}$$

13) . . . $lx - \Re u = my - \Re v = nz - \Re w = \Re(u - v)$

Digitized by Google

Die dritte Grundgleichung ist

$$f\Re = lx + my + 2\Re\sqrt{xy}$$

$$\begin{aligned} lx &= nz - \Re w + \Re u \quad (12) \\ my &= nz - \Re w + \Re v \end{aligned} \qquad \sqrt{xy} = \frac{(\Re + w - n)^2}{(\Re + u - l)(\Re + v - m)}$$

$$f\Re = 2nz - 2\Re w + \Re u + \Re v + \frac{2\Re(\Re + w - n)^2 z}{(\Re + u - l)(\Re + v - m)}$$

$$\Re[f + 2w - u - v](\Re + u - l)(\Re + v - m) = [2n(\Re + u - l)(\Re + v - m) + 2\Re(\Re + w - n)^2]z$$

$$\begin{aligned} \Re[f + 2w - u - v]\frac{(\Re + u - l)(\Re + v - m)}{\Re(\Re + w - n)} &= \left[\frac{2n(\Re + u - l)(\Re + v - m)}{\Re(\Re + w - n)} + 2(\Re + w - n)\right] z \\ &= [2(l + m + n - \Re + w - u - v) + 2(\Re + w - n)]z] \\ &= 2(f + 2w - u - v)z \\ z &= \frac{(\Re + u - l)(\Re + v - m)}{2(\Re + w - n)} \end{aligned}$$

Anmerkung 4. Von Gleichung 13) an kann man auch folgendermassen verfahren:

$$lx + my + 2\Re\sqrt{xy} = f\Re, \quad lx - \Re u = my - \Re v$$

$$lx - my = \Re u - \Re v$$

$$2lx + 2\Re\sqrt{xy} = \Re(f + u - v)$$

$$2lx = \Re(f + u - v) - 2\Re\sqrt{xy}$$

Ebenso

$$2my = \Re(f + v - u) - 2\Re\sqrt{xy}$$

$$4lmxy = \Re^2(f^2 - u^2 + 2uv - v^2) - 4\Re^2 f\sqrt{xy} + \Re^2 xy$$

$$(lm - \Re^2)xy + \Re^2 f\sqrt{xy} = \Re^2\left(\frac{f + u - v}{2}\right)\left(\frac{f + v - u}{2}\right)$$

$$lmn = \Re^2(l + m + n)$$

$$\left(\frac{l + m + n}{n}\Re^2 - \Re^2\right)xy + \Re^2 f\sqrt{xy} = \Re^2\left(\frac{f + u - v}{2}\right)\left(\frac{f + v - u}{2}\right)$$

$$\frac{f}{n}xy + f\sqrt{xy} = \left(\frac{f + u - v}{2}\right)\left(\frac{f + v - u}{2}\right)$$

$$xy + n\sqrt{xy} = \frac{n}{f}\left(\frac{f^2 - u^2 - v^2 + 2uv}{4}\right)$$

$$n(u^2 + v^2) = n(2\Re^2 + l^2 + m^2)$$

$$2nuv = 2wf\Re$$

$$\sqrt{xy} + \frac{n}{2} = \sqrt{\frac{nf^2 - 2n\Re^2 - nl^2 - nm^2 + 2wf\Re}{4f} + \tfrac{1}{4}n^2}$$

$$= \sqrt{\frac{2lmn - 2n\Re^2}{4f} + \tfrac{1}{2}\Re w + \tfrac{1}{4}n^2}$$

$$= \sqrt{\tfrac{1}{2}\Re^2 + \tfrac{1}{2}\Re w + \tfrac{1}{4}n^2}$$

$$= \sqrt{\tfrac{1}{2}\Re^2 + \tfrac{1}{2}\Re w + \tfrac{1}{4}w^2}$$

$$\sqrt{xy} + \frac{n}{2} = \tfrac{1}{2}\Re + \tfrac{1}{2}w$$

$$2\sqrt{xy} = \Re + w - n$$

Anmerkung 5. Die Gleichung 12) kann auch aus 7) und 8) abgeleitet werden. Es ist nämlich nach 7):

$$x = \frac{(\Re + v - m)(\Re + w - n)}{(\Re + u - l)^2}\sqrt{yz}$$

mit 8) verglichen ergiebt sich:

14) . . .
$$\begin{cases} 2\sqrt{yz} = \Re + u - l; & \text{ferner} \\ 2\sqrt{xy} = \Re + w - n \\ 2\sqrt{xz} = \Re + v - m \end{cases}$$

Anmerkung 6. Mit Hülfe dieser Gleichung 14) lassen sich nun noch wieder neue Gleichungen für x, y, z finden. Es ist

$$2\Re l = 2lx + 2\Re\sqrt{xy} + 2\Re\sqrt{xz} - 2\Re\sqrt{yz} \qquad (9)$$

Also

$$2\Re l = 2lx + \Re(\Re + w - n) + \Re(\Re + v - m) - \Re(\Re + u - l)$$

15) . . .
$$x = \frac{\Re}{2l}(l + m + n - \Re + u - v - w)$$

Nach dieser Gleichung lässt sich leicht eine Construction (die zweite) ausführen.

Digitized by Google

II. Auflösung.

$$d\Re = my + nz + 2\Re\sqrt{yz}$$
$$e\Re = lx + nz + 2\Re\sqrt{xz}$$

Die erste dieser Grundgleichungen mit e, die zweite mit d multiplicirt, giebt:

$$mey + nez + 2e\Re\sqrt{yz} = ldx + ndz + 2d\Re\sqrt{xz}$$
$$df - v^2 = ef - u^2$$

$$me(df - v^2)y + ne(df - v^2)z + 2e(df - v^2)\Re\sqrt{yz}$$
$$= ld(ef - u^2)x + nd(ef - u^2)z + 2d(ef - u^2)\Re\sqrt{xz}$$

$$me(df - v^2) = e^2v^2 \qquad ld(ef - u^2) = d^2u^2$$
$$ne(df - v^2) - nd(ef - u^2) = n(e - d)2\Re\Re = n(u^2d - v^2e)$$

$$e^2v^2y + ndu^2z + 2euvw\sqrt{yz} = d^2u^2x + nev^2z + 2duvw\sqrt{xz}$$

$$ndu^2 - nev^2 = w^2u^2 - w^2v^2$$

$$e^2v^2y + u^2w^2z + 2euvw\sqrt{yz} = d^2u^2x + v^2w^2z + 2duvw\sqrt{xz}$$

16) . . . $ev\sqrt{y} + uw\sqrt{z} = du\sqrt{x} + vw\sqrt{z}$

Die Coefficienten in dieser Gleichung sind zwar andere als die Coefficienten unter 3), aber das Verhältniss derselben ist in beiden Gleichungen dasselbe, und der weitere Verlauf dieser Auflösung kann also mit dem Verlauf der II. Auflösung leicht in Uebereinstimmung gebracht werden. Jedoch wird hier davon Abstand genommen und statt dessen ein anderer Weg eingeschlagen. Werden nach der Analogie noch zwei andere Gleichungen wie 16) gebildet, so hat man:

17) . . . $\begin{cases} ev\sqrt{y} + uw\sqrt{z} = du\sqrt{x} + vw\sqrt{z} \\ fw\sqrt{z} + vu\sqrt{x} = ev\sqrt{y} + wu\sqrt{x} \\ du\sqrt{x} + wv\sqrt{y} = fw\sqrt{z} + uv\sqrt{y} \end{cases}$

Aus der ersten und dritten Gleichung folgt

$$v(e + w - u)\sqrt{y} = w(f + v - u)\sqrt{z} \quad \text{(vergleiche Anmerkung 2)}$$

Wird diese Gleichung in die erste Grundgleichung

$$d\Re = my + nz + 2\Re\sqrt{yz}$$

gesetzt, so kommt

$$d\Re = my + \frac{nv^2(e + w - u)^2}{w^2(f + v - u)^2}y + 2\Re\sqrt{y}\,\frac{v(e + w - u)}{w(f + v - u)}\sqrt{y}$$

Digitized by Google

$$d\Re = \left[m + n\frac{v^2(e+w-u)^2}{w^2(f+v-u)^2} + 2\Re\frac{v}{w}\frac{(f+v-u)(e+w-u)}{(f+v-u)^2}\right]y$$

$$y = \frac{d\Re w^2(f+v-u)^2}{mw^2(f+v-u)^2 + nv^2(e+w-u)^2 + 2\Re vw(f+v-u)(e+w-u)}$$

$$mw^2 = \frac{de\Re^2}{l}, \quad nv^2 = \frac{df\Re^2}{l} \quad 2\Re vw = \frac{2du\Re^2}{l}$$

18) . . .
$$\begin{cases} y = \dfrac{lw^2(f+v-u)^2}{\Re[e(f+v-u)^2 + f(e+w-u)^2 + 2u(f+v-u)(e+w-u)]} \\ \text{Ebenso} \\ y = \dfrac{nu^2(d+v-w)^2}{\Re[e(d+v-w)^2 + d(e+u-w)^2 + 2w(d+v-w)(e+u-w)]} \end{cases}$$

Wenn in dem eingeklammerten Teile des Nenners dieser letzten Gleichung

$$e = l + n \quad \text{und}$$
$$d = m + n$$

gesetzt wird, so kommt für diesen Teil

$$\begin{aligned}
&= 2uvw + 2[(m+n)(l+n) - w^2](u+v) - 2w(lm+ln+mn) \\
&\quad + 2(w^2 - n^2)(w-n) + u^2(m+n) + v^2(l+n) \\
&\quad - w^2(l+m) + 2lmn + n(l^2+2lm+m^2) + lm(l+m) + 3n^2(l+m) \\
&= 4R\Re^2 + 4R\Re(u+v) - 2w(2R+\Re)\Re + 2\Re^2(w-u) \\
&\quad + u^2d + v^2e - w^2f + 2\Re^2(l+m+n) + nf^2 + lmf + 3n^2f \\
&= 4R\Re^2 + 4R\Re(u+v) - 4R\Re w - 2\Re^2 w + 2\Re^2 n - 2\Re^2 n + 2R\Re(l+m-n) \\
&\quad + 2\Re^2(l+m+n) + f(lm+ln+mn) + 3n^2f \\
&= 4R\Re^2 + 4R\Re(u+v) - 4R\Re w + 2R\Re(f-n) + 2\Re^2 f + f(2R+\Re)\Re + 3n^2f \\
&= 2R\Re[2\Re + 2u + 2v - 2w + 2f - n] + 3\Re^2 f + 3n^2 f \\
&\qquad\qquad 3f(\Re^2 + n^2) = 3fw^2 = 3u \,.\, 2R\Re \\
&= 2R\Re(2\Re + 2u + 2v - 2w + d + e + f)
\end{aligned}$$

wo R Umkreisradius des Dreiecks, dessen Fusspunktdreieck DEF ist. Für die erste Gleichung in 18) wird der Nenner diesem eben gefundenen Nenner ähnlich, demnach gehen die Gleichungen 18) über in

19) . . .
$$\begin{cases} y = \dfrac{lw^2(f+v-u)}{2R\Re^2(2\Re + 2v + 2w - 2u + d + e + f)} \\ y = \dfrac{nu^2(d+v-w)^2}{2R\Re^2(2\Re + 2u + 2v - 2w + d + e + f)} \end{cases}$$

Digitized by Google

Diese Ausdrücke haben, wie man in gewisser Beziehung sagen kann, eine schiefe Gestalt; um hieraus einen rectificirten Ausdruck zu erhalten, der mutmasslich auch von einfacherer Gestalt sein wird, könnte man die Gleichungen 19) addiren. Besser wird es aber jedenfalls sein, sie mit einander zu multipliciren und dann die Formeln 424', 425, 427 etc. in's Auge zu fassen. Aber hier ist noch ein anderer Weg möglich; am besten ist es nämlich, für x eine Gleichung zu bilden, die hinsichtlich des Nenners mit dem Nenner der zweiten Gleichung für y übereinstimmt, nämlich

$$x = \frac{nv^2(e+u-w)^2}{2R\Re^2(2\Re+2u+2v-2w+d+e+f)}$$

und diese Gleichung mit der zweiten Gleichung in 19) zu multipliciren. Es kommt:

$$20) \ldots \sqrt{xy} = \frac{nuv(d+v-w)(e+u-w)}{2R\Re^2(2\Re+2u+2v-2w+d+e+f)}$$

$$uv = \frac{2R\Re^2}{w}$$

$$\sqrt{xy} = \frac{n(d+v-w)(e+u-w)}{w(2\Re+2u+2v-2w+d+e+f)}$$

$$\sqrt{xy} = \frac{w(\Re+w-n)(\Re+u+v-w+l+m+n)}{w(2\Re+2u+2v-2w+d+e+f)}$$

$$\sqrt{xy} = \frac{\Re+w-n}{2}$$

Die weitere Entwicklung wie in Anmerkung 6.

Anmerkung 7. Ich erinnere mich nicht mehr, ob sich eine der Gleichungen 18) bei Crelle findet (1821), die weitere Entwicklung findet sich aber jedenfalls nicht bei ihm.

III. Auflösung.

Nachdem auf dem in Auflösung II. gezeigten Wege die Gleichung 3) gefunden ist, setze man

$$nz = d\Re - my - 2\Re\sqrt{yz} \quad \text{(erste Grundgleichung)}$$

$$nz = e\Re - lx - 2\Re\sqrt{xz} \quad \text{(zweite Grdgl.)}$$

Also

Digitized by Google

21) . . . $d\mathfrak{R} - my - 2\mathfrak{R}\sqrt{yz} = e\mathfrak{R} - lx - 2\mathfrak{R}\sqrt{xz}$

$$\sqrt{z} = \frac{vl\sqrt{x} - um\sqrt{y}}{\mathfrak{R}u - \mathfrak{R}v}$$ (Gleichung 3) in Auflösung II.)

$$\left.\begin{matrix} d\mathfrak{R}\mathfrak{R}u - \mathfrak{R}mu \\ -d\mathfrak{R}\mathfrak{R}v + \mathfrak{R}mv \\ +2\mathfrak{R}um \end{matrix}\right\} y - 2\mathfrak{R}vl\sqrt{xy} = \left\{\begin{matrix} e\mathfrak{R}\mathfrak{R}u - \mathfrak{R}ul \\ -e\mathfrak{R}\mathfrak{R}v + \mathfrak{R}vl \\ -2\mathfrak{R}vl \end{matrix}\right\} x + 2\mathfrak{R}um\sqrt{xy}$$

$$\begin{matrix} d\mathfrak{R}^2u - e\mathfrak{R}^2u + \\ -d\mathfrak{R}^2v + e\mathfrak{R}^2v + \end{matrix} \left\{\begin{matrix} \mathfrak{R}ul \\ \mathfrak{R}vl \end{matrix}\right\} x \left\{\begin{matrix} +\mathfrak{R}um \\ +\mathfrak{R}vm \end{matrix}\right\} y = \begin{matrix} (um+vl)2\mathfrak{R}\sqrt{xy} \\ 2\mathfrak{R}\sqrt{xy} = f\mathfrak{R} - lx - my \end{matrix}$$

$$= \begin{matrix} \mathfrak{R}umf + \mathfrak{R}vlf - uml x - vl^2 x \\ - um^2 y - vlmy \end{matrix}$$

$$\left.\begin{matrix} d\mathfrak{R}^2u - d\mathfrak{R}^2v + \mathfrak{R}ul \\ -e\mathfrak{R}^2u + e\mathfrak{R}^2v + \mathfrak{R}vl \\ -\mathfrak{R}mfu - \mathfrak{R}lfv + um\,l \\ + vl^2 \end{matrix}\right\} \left\{\begin{matrix} x + \mathfrak{R}um \\ + \mathfrak{R}vm \\ + vlm \\ + um^2 \end{matrix}\right\} y = 0$$

$$um + vl = \frac{\mathfrak{R}(\mathfrak{R}+w)}{n}(u+v)$$

$$\left.\begin{matrix} \mathfrak{R}un \\ +\mathfrak{R}vn \\ +\mathfrak{R}(\mathfrak{R}+w)(u+v) \end{matrix}\right\} lx + \left.\begin{matrix} \mathfrak{R}un \\ +\mathfrak{R}vn \\ +\mathfrak{R}(\mathfrak{R}+w)(u+v) \end{matrix}\right\} my = \begin{matrix} -d\mathfrak{R}^2un + d\mathfrak{R}^2vn \\ +e\mathfrak{R}^2un - e\mathfrak{R}^2vn \\ +f\mathfrak{R}umn + f\mathfrak{R}vln \end{matrix}$$

22) . . . $(u+v)(\mathfrak{R}+w+n)lx + (u+v)(\mathfrak{R}+w+n)my$

$$\begin{matrix} = fn(um+vl) - \mathfrak{R}dun + \mathfrak{R}dvn \\ + \mathfrak{R}eun - \mathfrak{R}evn \\ = f\mathfrak{R}(\mathfrak{R}+w)(u+v) - \mathfrak{R}umn + \mathfrak{R}vmn \\ (403) \quad - \mathfrak{R}un^2 + \mathfrak{R}vn^2 \\ + \mathfrak{R}un^2 - \mathfrak{R}vn^2 \\ + \mathfrak{R}uln - \mathfrak{R}vln \\ = f\mathfrak{R}(\mathfrak{R}+w)(u+v) + \mathfrak{R}uln + \mathfrak{R}vmn \\ + \mathfrak{R}umn - \mathfrak{R}vln \end{matrix}$$

$$uln + vmn = (u+v)[n(l+m+n) - w(\mathfrak{R}+w)]$$

$$umn = \mathfrak{R}(vw + \mathfrak{R}u)$$

$$vln = \mathfrak{R})uw + \mathfrak{R}v)$$

$$\begin{matrix} = \mathfrak{R}(u+v)(\mathfrak{R}+w)f \\ + \mathfrak{R}(u+v)[n(l+m+n) - w(\mathfrak{R}+w)] \\ - \mathfrak{R}^2w(u+v) - \mathfrak{R}^3(u+v) \end{matrix}$$

Digitized by Google

$$= \Re(u+v)[(\Re+w)(l+m-w)+n(l+m+n)]$$
$$-\Re(u+v)[(\Re+w)\Re]$$
$$= \Re(u+v)[(\Re+w)(l+m-w-\Re)+n(l+m+n)]$$
$$= \Re(u+v)[(\Re+w+n)(l+m+n-w-\Re)]$$

23) . . . $lx+my = \Re(l+m+n-\Re-w)$

Ebenso

$$lx+nz = \Re(l+m+n-\Re-v)$$
$$my+nz = \Re(l+m+n-\Re-u)$$

Folglich

$$2lx+2my+2nz = 3\Re(l+m+n)-3\Re^2-\Re(u+v+w)$$
$$2my+2nz = 2\Re(l+m+n)-2\Re^2-2\Re u \quad \text{subtrahirt}$$

$$2lx = \Re(l+m+n)-\Re^2+\Re u-\Re v-\Re w$$

$$x = \frac{\Re}{2l}[l+m+n-\Re+u-v-w]$$

Anmerkung 8. Die directe Ableitung der Gleichung 23) war bisher vielleicht noch nicht gelungen.

IV. Auflösung.

(Die einfachste und beste).

$$d\Re = my+nz+2\Re\sqrt{yz}$$
$$e\Re = nz+lx+2\Re\sqrt{xz}$$
$$f\Re = lx+my+2\Re\sqrt{xy}$$

Aus der ersten Grundgleichung folgt

$$nz+2\Re\sqrt{yz} = \Re d-my$$

$$z+\frac{2\Re\sqrt{y}}{n}\sqrt{z} = \frac{\Re d-my}{n}$$

quadratisch behandelt

$$\sqrt{z} = \frac{-\Re\sqrt{y}\pm\sqrt{\Re dn-mny+\Re^2 y}}{n}$$

$$\Re dn = \frac{vwln}{u}$$

$$\Re^2-mn = \frac{\Re vw}{u}$$

$$24) \ldots \begin{cases} n\sqrt{z} = -\Re y + \sqrt{\frac{vw}{u}} \cdot \sqrt{ln - \Re y} \\ \text{Ebenso} \\ n\sqrt{z} = -\Re x + \sqrt{\frac{uw}{v}} \cdot \sqrt{mn - \Re x} \end{cases}$$

aus der zweiten Grundgleichung.

Also

$$25) \ldots -\Re\sqrt{y} + \sqrt{\frac{vw}{u}}\sqrt{ln - \Re y} = -\Re x + \sqrt{\frac{uw}{v}} \cdot \sqrt{mn - \Re x}$$

α) $\Re(\sqrt{x} - \sqrt{y}) = \sqrt{\frac{uw}{v}}\sqrt{mn - \Re x} - \sqrt{\frac{vw}{u}}\sqrt{ln - \Re y}$ quadrirt:

$$\Re^2(x + y - 2\sqrt{xy}) = \frac{uw}{v}(mn - \Re x) + \frac{vw}{u}(ln - \Re y) - 2w\sqrt{(lm - \Re x)(ln - \Re y)}$$

$$uwm = \Re ev \qquad vwl = \Re ud$$

$$= \Re en - \frac{\Re uwx}{v} + \Re dn - \frac{\Re vwy}{u} - 2w\sqrt{lmn \cdot n - \Re n \cdot lx - \Re n \cdot my + \Re^2 xy}$$

$$\frac{\Re uw}{v} = ln - \Re^2 \qquad \frac{\Re vw}{u} = mn - \Re^2$$

$$= \Re(e + d)n - (ln - \Re^2)x - (mn - \Re^2)y - 2w\sqrt{[\Re^2(l + m + n)n - \Re n(lx + my) + \Re^2 xy]}$$

dritte Grundgleichung:

$$lx + my = f\Re - 2\Re\sqrt{xy}$$

$$-2\Re\sqrt{xy} = \Re(e + d)n - lnx - mny - 2w\sqrt{[\Re^2(l + m + n)n - (\Re nf\Re - \Re n \cdot 2\Re\sqrt{xy}) + \Re^2 xy]}$$

$$-2\Re^2\sqrt{xy} = \Re(e + d)n - n(lx + my) - 2w\sqrt{[\Re^2 n^2 + 2\Re \cdot \Re n\sqrt{xy} + \Re^2 xy]}$$

$$-2\Re^2\sqrt{xy} = \Re(e + d)n - n(lx + my) - 2w - (\Re n + \Re\sqrt{xy})$$

$$(2\Re^2 - 2\Re w)\sqrt{xy} = -\Re(e + d)n + n(lx + my) + 2wn$$

$$2\Re n\sqrt{xy} = \Re fn - n(lx + my)$$

die dritte Grundgleichung addirt:

Digitized by Google

$$2\Re(\Re - w + n)\sqrt{xy} = -\Re(e + d - f)n + 2wn$$

$$2(\Re - w + n)\sqrt{xy} = -2n^2 + 2wn = (\Re + w - n)(\Re - w + n)$$

$$2\sqrt{xy} = \Re + w - n$$

Das Weitere wie in Anmerkung 6., oder, indem man jetzt aus der dritten Grundgleichung die Gleichung 23) bildet.

β) Die Gleichung 25) gestattet auch folgendes Verfahren:

$$-\Re\sqrt{y} + \sqrt{ln\,\frac{vw}{u} - \frac{vw}{u}\Re y} = -\Re\sqrt{x} + \sqrt{\frac{mn\,uw}{v} - \frac{uw}{v}\Re x}$$

$$\frac{ln\,vw}{u} - \frac{\Re u d n}{u} - \Re dn = \frac{\Re f dn}{f} - \frac{dn}{f}lx + \frac{dn}{f}my\,\frac{dn}{f} + 2\Re\sqrt{xy}$$

$$\frac{\mathfrak{F}\,vw}{u} = mn - \Re^2$$

Ebenso

$$\frac{uwmn}{v} = \frac{en}{f}lx + \frac{en}{f}my + \frac{en}{f}; \quad \frac{\Re um}{n} = ln - \Re^2$$

$$-\Re\sqrt{y} + \sqrt{\frac{df\,lnu + df\,nmy + dfn\,2\Re\sqrt{xy}}{f^2} - mny + \Re^2 y}$$

$$= -\Re\sqrt{x} + \sqrt{\frac{efl nx + ef\,mny + fen\,2\Re\sqrt{xy}}{f^2} - lnx + \Re^2 x}$$

$$-\Re\sqrt{y} + \sqrt{\frac{df\,lnx + (df\,mn - f^2mn + \Re^2 f^2)y + dfn\,2\Re\sqrt{xy}}{f^2}}$$

$$= -\Re\sqrt{x} + \sqrt{\frac{ef\,mny + (efln - f^2ln + \Re^2 f^2)x + fen\,2\Re\sqrt{xy}}{f^2}}$$

$$dfln = \frac{(l+m+n)^2\Re^2 v^2}{m^2}; \quad df\,mn - f^2mn + \Re^2 f^2 = n^2v^2$$

$$efmn = \frac{(l+m+n)^2\Re^2 u^2}{l^2}; \quad efln - f^2ln + \Re^2 f^2 = n^2u^2$$

$$-\Re\sqrt{y} + \frac{(l+m+n)\Re v}{fm}\sqrt{x} + \frac{nv}{f}\sqrt{y}$$

$$= -\Re\sqrt{x} + \frac{(l+m+n)\Re u}{fl}\sqrt{y} + \frac{nu}{f}\sqrt{x}$$

Digitized by Google

$$\left[\frac{(l+m+n)\mathfrak{F}v}{fm}+\mathfrak{R}-\frac{nn}{f}\right]\sqrt{x}=\left[\frac{(l+m+n)\mathfrak{R}u}{fl}+\mathfrak{R}-\frac{nv}{f}\right]\sqrt{y}$$

$$(l+m+n)\mathfrak{F}v=m\mathfrak{F}v+\mathfrak{R}vv=m\mathfrak{F}v+uvm$$

26) . . . $(uv+\mathfrak{F}v+\mathfrak{F}f-un)\sqrt{x}=(nv+\mathfrak{F}u+\mathfrak{R}f-vn)\sqrt{y}$

Die Coefficienten dieser Gleichung sind wieder ganz andere als diejenigen der Gleichung 6) und in Anmerkung 2; aber ihr Verhältniss ist mit dem Verhältniss der Coefficienten in Gleichung 7) übereinstimmend, und es wird sich also Gleichung 26) auf Gleichung 7) reduciren lassen, wenn man diesen Weg weiter verfolgt.

V. Auflösung.

(Der vorigen ähnlich).

Wird von der Summe der ersten und zweiten Grundgleichung die dritte subtrahirt, so kommt, (ähnlich wie in Gleichung 9)):

$$2n\mathfrak{R}=2nz+2\mathfrak{R}\sqrt{xz}+2\mathfrak{R}\sqrt{yz}-2\mathfrak{R}\sqrt{yx}$$

$$z+\frac{\mathfrak{R}(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{n}\sqrt{z}=\frac{\mathfrak{R}(n+\sqrt{xy})}{n}$$

quadratisch behandelt,

27) . . . $$\sqrt{z}=\frac{-\mathfrak{R}(\sqrt{x}+\sqrt{y})\pm\sqrt{4\mathfrak{R}n(n+\sqrt{xy})+\mathfrak{R}^2(x+y+2\sqrt{xy}}}{2n}$$

Wird die erste Grundgleichung nach z quadratisch behandelt, so kommt (vergl. IV):

$$\sqrt{z}=\frac{-\mathfrak{R}\sqrt{y}}{n}\pm\sqrt{\frac{\mathfrak{R}dn-mny+\mathfrak{R}^2y}{n^2}}$$

$$mn-\mathfrak{R}^2=\frac{\mathfrak{R}^2d}{l}$$

$$\sqrt{z}=\frac{-\mathfrak{R}\sqrt{y}+\sqrt{\frac{\mathfrak{R}dln-\mathfrak{R}^2dy}{l}}}{n}$$

Ebenso

$$\sqrt{z}=\frac{-\mathfrak{R}\sqrt{x}+\sqrt{\frac{\mathfrak{R}emn-\mathfrak{R}^2ex}{m}}}{n}$$

addirt und dann durch 2 dividirt:

Digitized by Google

$$28) \ldots \sqrt{z} = \frac{-\Re(\sqrt{x}+\sqrt{y}) + \sqrt{\frac{\mathfrak{F}emn - \Re^2 ex}{m}} + \sqrt{\frac{\Re dln - \Re^2 dy}{l}}}{2n}$$

Aus 27) und 28) folgt

$$\sqrt{\frac{\mathfrak{F}emn - \Re^2 ex}{m}} + \sqrt{\frac{\Re dln - \Re^2 dy}{l}}$$

$$= \sqrt{4\Re n(n+\sqrt{xy}) + \Re^2(x+y+2\sqrt{xy}}$$

$$+2\sqrt{\frac{\Re^2 delmn^2 - \Re^2 delnx - \Re^3 demny + \Re^4 dexy}{lm}} \Bigg\} \quad \frac{\mathfrak{F}emn - \Re^2 ex}{m} + \frac{\mathfrak{F}dln - \Re^2 dy}{l}$$

$$= 4\mathfrak{F}n(n+\sqrt{xy}) + \Re^2(x+y+2\sqrt{xy})$$

$lx + my = f\Re - 2\Re\sqrt{xy}$ (dritte Grundgleichung)

Mit lm multiplicirt

$$+2lm\sqrt{\frac{\Re^2 delmn^2 - \Re^3 den(f\Re - 2\Re\sqrt{xy}) + \Re^4 dexy}{lm}} \Bigg\} \quad \Re elmn - \Re^2 elx + \Re dlmn - \Re^2 dmy$$

$$= 4\Re lmn(n+\sqrt{xy}) + \Re^2 lm(x+y+2\sqrt{xy})$$

$lmn = \Re^2(l+m+n)$ (F. 220), durch $\Re^2$ dividirt

$$+2lm\sqrt{\frac{den(l+m+n) - denf + 2den \cdot 2\sqrt{xy} + dexy}{lm}} \Bigg\} \quad (\Re e + \Re d)(l+m+n) - elx - dmy$$

$$= 4\Re(l+m+n)(n+\sqrt{xy}) + lmx + lmy + 2lm\sqrt{xy}$$

$$\Re(d+e)(l+m+n) + 2lm\sqrt{\frac{de(n^2+2n\sqrt{xy}+xy}{lm}}$$

$$= \begin{cases} 4\Re(l+m+n)n + 4\Re(l+m+n)\sqrt{xy} \\ +(el+lm)x + (dm+lm)y + 2lm\sqrt{xy} \end{cases}$$

$$\Re(d+e-4n)(l+m+n) + 2\sqrt{delm}(n^2+2n\sqrt{xy}+xy$$

$$= 4\Re(l+m+n)\sqrt{xy} + (l+m+n)(lx+my) + 2lm\sqrt{xy}$$

$$delm = \frac{(l+m+n)\Re w}{n}$$

$$\Re(l+m+n)(l+m-2n) + 2\frac{(l+m+n)\Re w(n+\sqrt{xy}}{n}$$

$$= 4\Re(l+m+n)\sqrt{xy} + (l+m+n)(lx+my) + 2lm\sqrt{xy}$$

Digitized by Google

Wird mit n multiplicirt und durch $l+m+n$ dividirt, so kommt

$$\mathfrak{R}(f-2n)n+2\mathfrak{R}w(n+\sqrt{xy})=4\mathfrak{R}n\sqrt{xy}+2\mathfrak{R}^2\sqrt{xy}+n(lx+my)$$

$$\mathfrak{R}fn=2\mathfrak{R}n\sqrt{xy}+n(lx+my)$$

$$-2\mathfrak{R}n^2+2\mathfrak{R}wn+2\mathfrak{R}w\sqrt{xy}=2\mathfrak{R}n\sqrt{xy}+2\mathfrak{R}^2\sqrt{xy}$$

$$-n^2+wn=(n+\mathfrak{R}-w)\sqrt{xy}$$

$$\sqrt{xy}=\frac{wn-n^2}{\mathfrak{R}+n-w}$$

$$\sqrt{xy}=\frac{(wn-n^2)(\mathfrak{R}-n+w)}{(\mathfrak{R}+n-w)(\mathfrak{R}-n+w)}$$

$$\sqrt{xy}=\frac{(wn-n^2)(\mathfrak{R}-n+w)}{-2n^2+2nw}$$

$$\sqrt{xy}=\left(\frac{\mathfrak{R}-n+w}{2}\right)$$

$$2\sqrt{xy}=\mathfrak{R}+w-n$$

VI. Auflösung.

(Die von Crelle mitgeteilte Auflösung der Redacteure eines französischen Journals etwas verändert und zu Ende geführt. — Gergonne und Lavernède, 1810, 1811.)

$$d\mathfrak{R}=my+nz+2\mathfrak{R}\sqrt{yz}$$

$$e\mathfrak{R}=lx+nz+2\mathfrak{R}\sqrt{xz}$$

$$f\mathfrak{R}=lx+my+2\mathfrak{R}\sqrt{xy}$$

Man setze: $y=s^2x$

und $z=t^2x$

wodurch die 3 Grundgleichungen folgende Gestalt gewinnen:

$$29)\ \ldots\begin{cases} d\mathfrak{R}=x(ms^2+nt^2+2\mathfrak{R}st) \\ e\mathfrak{R}=x(l\ \ +nt^2+2\mathfrak{R}t) \\ f\mathfrak{R}=x(l\ \ +ms^2+2\mathfrak{R}s) \end{cases}$$

Die erste dieser Grundgleichungen giebt

$$x=\frac{d\mathfrak{R}}{ms^2+nt^2+2\mathfrak{R}st}$$

Setzt man diesen Wert in die andern beiden Gleichungen ein, so kommt:

Digitized by Google

$$30) \ldots \begin{cases} e(ms^2+nt^2+2\mathfrak{N}st) = d(l+nt^2+2\mathfrak{R}t) \\ f(ms^2+nt^2+2\mathfrak{N}st) = d(l+ms^2+2\mathfrak{R}s) \end{cases}$$

Die erste Gleichung wird mit lm, die zweite mit ln multiplicirt. Es kommt

$$el(m^2s^2+2\mathfrak{P}mst)+elmnt^2 = dm(l^2+2l\mathfrak{R}t)+dlmnt^2$$

$$dmnt^2 = (l+n)(l+m+n)\mathfrak{R}^2t^2 = [el+lm+n(l+m+n)]\mathfrak{R}^2t^2$$

$$dlmnt^2 = (m+n)(l+m+n)\mathfrak{R}^2t^2 = [dm+lm+n(l+m+n)]\mathfrak{R}^2t^2$$

$$el(m^2s^2+2m\mathfrak{P}st+\mathfrak{R}^2t^2 = dm(l^2+2l\mathfrak{R}t+\mathfrak{R}^2t^2)$$

$$el : dm = u^2 : v^2$$

$$31) \ldots \begin{cases} u(ms+\mathfrak{N}t) = v(l+\mathfrak{R}t). \text{ Ebenso} \\ u(nt+\mathfrak{N}s = v(l+\mathfrak{R}s) \end{cases}$$

Aus der ersten Gleichung folgt

$$s = \frac{vl-(u-v)\mathfrak{N}t}{um}$$

dies in die zweite Gleichung gesetzt, giebt

$$32) \ldots \begin{cases} t = \dfrac{l[(u-w)\mathfrak{N}v-uvm]}{(u-v)(u-w)\mathfrak{N}^2-u^2mn}. \text{ Ebenso} \\ s = \dfrac{l[(u-v)\mathfrak{N}w-uvn]}{(u-v)(u-w)\mathfrak{N}^2-u^2mn} \end{cases}$$

$$uvm = \mathfrak{N}ev$$
$$u^2mn = \mathfrak{N}^2ef$$
$$uvn = \mathfrak{N}vf$$

$$33) \ldots \begin{cases} s = \dfrac{lv}{\mathfrak{N}} \cdot \dfrac{f+v-u}{ef-(u-v)(u-w)} \\ t = \dfrac{lv}{\mathfrak{N}} \cdot \dfrac{e+w-u}{ef-(u-v)(u-w)} \end{cases}$$

also

$$34) \ldots \begin{cases} ms^2 = \dfrac{ml^2v^2(f+v-u)^2}{\mathfrak{N}^2[ef-(u-v)(u-w)]^2} \\ nt^2 = \dfrac{nl^2v^2(e+w-u)^2}{\mathfrak{N}^2[ef-(u-v)(u-w)]^2} \\ 2\mathfrak{N}st = \dfrac{2lvw(f+v-u)(e+w-u)}{\mathfrak{N}[ef-(u-v)(u-w)]^2} \end{cases}$$

Digitized by Google

$$35)\ \ldots \begin{cases} ms^2 = lde\left[\dfrac{f+v-u}{ef-(u-v)(u-w)}\right]^2 \\ nt^2 = ldf\left[\dfrac{e+w-u}{ef-(u-v)(u-w)}\right]^2 \\ 2\mathfrak{B}st = \dfrac{2ldu(f+v-u)(e+w-u)}{[ef-(u-v)(u-w)]^2} \end{cases}$$

Nun ist unter 29)

$$x = \frac{d\mathfrak{R}}{\sqrt{ms^2+nt^2+2\mathfrak{B}st}}$$

Daher ist

$$36)\ \ldots x = \frac{\mathfrak{R}}{l}\cdot\frac{[ef-(u-v)(u-w)]^2}{\sqrt{e(l+v-u)^2+f(e+w-u)^2+2u(f+v-u)(e+w-u)}}$$

Bis hierher die Redacteure Gergonne und Laverniède. Diese Gleichung kann nun auf die bekannte Gleichung in Anmerkung 6) reducirt werden. Es kommt:

$$x = \frac{\mathfrak{R}}{l}\cdot\frac{2R\mathfrak{R}[(l+m+n)^2-(\mathfrak{R}+v+w-u)^2]}{2R\mathfrak{R}2[(l+m+n)+(\mathfrak{R}+v+w-u]}$$

$$37)\ \ldots x = \frac{\mathfrak{R}}{2l}[l+m+n-(\mathfrak{R}+v+w-u)]$$

Anmerkung 9. Die vorstehende Auflösung kürzt die von Crelle mitgeteilte Auflösung der genannten Redacteure ziemlich wesentlich ab und führt sie zu Ende. Die Original-Auflösung ist sehr mangelhaft, teils, weil man darin die Symmetrie und Eleganz vermisst, indem die Auflösung sich in schiefgestaltigen Ausdrücken bewegt und diese die Auffassung der analogen Beziehungen erschweren, teils, weil sie an unnötiger Weitschweifigkeit leidet, und endlich, weil in Gleichung 36) noch der eigentliche Schluss fehlt.

Anmerkung 10. Aus den beiden Gleichungen 31) können auch die Gleichungen 5), sowie auch die in Anmerkung 2. enthaltenen Gleichungen hergeleitet werden; nämlich

$$\frac{u\mathfrak{R}l-v\mathfrak{R}t+ums}{v} = l = \frac{u\mathfrak{B}s-w\mathfrak{B}s+unt}{w} \qquad (31)$$

$$s(vw\mathfrak{B}-nv\mathfrak{R}+uvm) = t(vw\mathfrak{R}-uw\mathfrak{R}+uvn) \qquad (5)$$

$$uvm = \mathfrak{B}vw \qquad uvn = \mathfrak{B}uf$$

Digitized by Google

$$sv(e+w-u) = tw(f+v-u)$$
$$s^2x = y \qquad t^2x = z$$
$$v(e+w-u)\sqrt{y} = w(f+v-u)\sqrt{z}$$

Dasselbe Resultat erhält man auch sehr leicht aus den Gleichungen 33), denn $t^2y = s^2z$.

Anmerkung 11. Adams beschäftigt sich in seinem „Malfatti'schen Problem", Winterthur 1846, auch mit der Reduction der Gleichung 36). Dieselbe ist ihm nicht vollständig gelungen, indem er nicht die Malfatti'schen, sondern nur ähnliche Ausdrücke erhält, nämlich

$$x = \frac{\mathfrak{R}^2}{lR} \cdot \frac{\mathfrak{R}_1^2}{(l+m+n+\mathfrak{R}+v+w-u)}$$

Hinsichtlich der Grösse $\mathfrak{R}_1$ bedarf es hier einer Erklärung; dieselbe hat folgende Bedeutung. Adams spricht von einem Kreise, der dem Dreieck *DEF*, Fig. 5 und 6, eingeschrieben ist und in diesen Figuren $\mathfrak{R}$ zum Radius hat (bei ihm $= r$), und ausserdem von 3 anderen das Dreieck *DEF* auswärts tangirenden Kreisen. Die Mittelpunkte dieser Kreise stimmen in Figur 6 mit den Eckpunkten des Dreiecks *ABC* überein. Der von *A* aus zu beschreibende Kreis berührt die Seite *d* unmittelbar, von *e* und *f* aber deren Verlängerungen. Jede Seite des Dreiecks *DEF* berührt also — den inneren Kreis mitgerechnet — im Grunde 4 Kreise, und man sieht leicht, dass $A\mathfrak{A}$, $B\mathfrak{B}$, $C\mathfrak{C}$ Potenzlinien der äusseren Kreise sind. Von dem Dreieck *ABC* denkt Adams sich nun wieder 4 berührende Kreise; den Radius des inneren bezeichnet er mit $\mathfrak{R}$ (in Fig. 6 mit r übereinstimmend), und die Radien der auswärts berührenden Kreise mit $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2$, $\mathfrak{R}_3$. Es mag nun noch bemerkt werden, dass bei Adams $2\mathfrak{R}$ in Figur 6 $= R$, und dass $\mathfrak{R}_1 = 2R + r - x$ in Fig 6 ist.

Zweites Verfahren.

Ein anderer Gang in der VI. Auflösung ist folgender. Wenn die zweite Gleichung in 29) mit f und die 3te mit e multiplicirt wird, so ergiebt sich:

Digitized by Google

38) . . . $fl+fnt^2+2\mathfrak{F}ft = el+ems^2+2\mathfrak{R}es$

$$\frac{w^2f}{n} = \frac{v^2-e}{m}$$

multiplicirt

$$\frac{w^2f^2l}{n}+w^2f^2t^2+\frac{2\mathfrak{R}w^2f^2t}{n} = v^2e^2\frac{l}{m}+v^2e^2s^2+\frac{2\mathfrak{F}v^2e^2s}{m}$$

Nun ist

$$\frac{\mathfrak{F}^2v^2e}{m^2} = \frac{\mathfrak{R}^2w^2f^2}{n^2} = \frac{v^2e^2l}{m} - \frac{w^2f^2l}{n}$$

denn

$$\frac{v^2e^2(lm-\mathfrak{R}^2)}{m^2} = \frac{w^2f^2(ln-\mathfrak{R}^2)}{n^2}$$

$$\frac{\mathfrak{F}^2w^2f^2}{n^2}+w^2f^2t^2+2\frac{\mathfrak{R}w^2f^2t}{n} = \frac{\mathfrak{F}^2v^2e^2}{m^2}+v^2e^2s^2+2\frac{\mathfrak{F}v^2e^2s}{m}$$

$$\frac{\mathfrak{R}wf}{n}+wft = \frac{\mathfrak{R}ve}{m}+ves$$

$$mwf(\mathfrak{R}+nt) = nve(\mathfrak{R}+ms)$$

$$mwf\mathfrak{F}(\mathfrak{R}+nt) = nve\mathfrak{F}(\mathfrak{R}+ms)$$

$$wf\mathfrak{R} = uvn \qquad ve\mathfrak{R} = uvm$$

39) . . . $v(\mathfrak{R}+nt) = w(\mathfrak{R}+ms)$ oder

$$\frac{\mathfrak{R}+nt}{w} = \frac{\mathfrak{R}+ms}{v}$$

Werden hieraus t und s wieder entfernt, $\left(t=\sqrt{\frac{z}{x}},\ s=\sqrt{\frac{y}{x}}\right)$, so erhält man die Gleichungen 4), und man kann dann die Entwicklung fortsetzen.

Anmerkung 12. Aus der Zusammenstellung der Gleichung 39) mit der ersten Gleichung von 31) gehen ähnliche Gleichungen wie die in Anmerkung 2. enthaltenen hervor.

$$vms = \mathfrak{F}v+vnt-\mathfrak{F}w \quad (39) \qquad ums = \mathfrak{F}vt+vl-\mathfrak{F}ut \quad (31)$$

$$uvms = uvnt+luv-\mathfrak{R}uw \qquad uvms = vwl+\mathfrak{F}vwt-\mathfrak{F}uvt$$

$$uvn = \mathfrak{R}wf \qquad vwl = \mathfrak{F}ud$$

$$wft+uv-uw = ud+vwt-uvt$$

$$(wf+uw-vw)t = ud+uw-uv$$

40) . . . $\begin{cases} t = \dfrac{u(d+v-w)}{w(f+u-v)} \\ s = \dfrac{u(d+v-w)}{v(e+u-w)} \end{cases}$

Digitized by Google

Wenn man aber beide Gleichungen in 31) addirt, und zwar so:

$$\Re ut + ums = \Re vt + vl$$

$$\Re ws + wl = \Re us + unt$$

$$(\Re w + um)s + \Re ut + wl = (\Re v + un)t + \Re us + vl$$

$$\Re(\Re w - \Re u + um)s + \Re wl = \Re(\Re v - \Re u + un)t + \Re vl$$

$$wmls + \Re wl = vlnt + \Re vl \quad (39) \text{ subtr.}$$

$$\Re(\Re w - \Re u + um)s - (\Re uv + \Re^2 w)s = \Re(\Re v - \Re u + un)t - (\Re uw + \Re^2 v)t \quad \text{(F. 201)}$$

$$(-\Re u + um - uv)s = (-\Re u + un - uw)t$$

41) . . . $(\Re + v - m)s = (\Re + w - n)t$

so geht daraus, (indem man 39) zu Hülfe nimmt), die Gleichung 7) hervor; denn man braucht in 41) für s und t nur die ursprünglichen Ausdrücke wieder herzustellen. Es kommt:

42) . . . $(\Re + v - m)\sqrt{y} = (\Re + w - n)\sqrt{z} = (\Re + u - l)\sqrt{x}$

Aus einer Vergleichung der Wege, die zu den Resultaten 40) und 41) führten, ersieht man, wie notwendig es ist, wenn man einfache Resultate erhalten will, dass die Entwicklung sich in symmetrischen Ausdrücken bewegt. Es gilt dies überhaupt von der ganzen Behandlung des Problems

Anmerkung 13. Aus der vorigen Anmerkung geht ferner leicht hervor, dass die wichtige Gleichung 7) (oder 42)) sich aus 4) auch noch auf eine andere und zwar bessere Art als es in Auflösung II. geschah, ableiten lässt. Man kann nämlich in Gleichung 4)

$$u(m\sqrt{y} + \Re\sqrt{z}) = v(l\sqrt{x} + \Re\sqrt{z})$$
$$v(n\sqrt{z} + \Re\sqrt{x}) = w(m\sqrt{y} + \Re\sqrt{x})$$
$$w(l\sqrt{x} + \Re\sqrt{y}) = u(n\sqrt{z} + \Re\sqrt{y})$$

die erste und dritte Gleichung mit $\Re$, die zweite aber mit l multipliciren und dann alle 3 Gleichungen addiren. Man erhält:

$$\left.\begin{array}{l} \Re um\sqrt{y} + \Re^2 u\sqrt{z} + \Re wl\sqrt{x} + \Re^2 w\sqrt{y} \\ \qquad + vln\sqrt{z} + \Re vl\sqrt{x} \end{array}\right\} =$$

Digitized by Google

$$\left\{\begin{array}{l} \Re vl\sqrt{x} + \Re^2 v\sqrt{z} + \Re un\sqrt{z} + \Re^2 u\sqrt{y} \\ \qquad + wlm\sqrt{y} + \Re wl\sqrt{x} \end{array}\right.$$

$$vln = \Re uw + \Re^2 v; \quad wlm = \Re uv + \Re^2 w$$

$$\Re um\sqrt{y} + \Re^2 u\sqrt{z} + \Re uw\sqrt{z}$$
$$= \Re un\sqrt{z} + \Re^2 u\sqrt{y} + \Re uv\sqrt{y}$$

$$\Re u(\Re + w - n)\sqrt{z} = \Re u(\Re + v - m)\sqrt{y}$$

$$(\Re + w - n)\sqrt{z} = (\Re + v - m)\sqrt{y}$$

Die übrigen 7 Lösungen folgen später.

Digitized by Google

III.

Ueber die Verspätung des Flutmaximums inbezug auf die Culmination des Mondes.

Von

C. Benz.

Bezeichnet man unter der Annahme der Aequatorstellung des Mondes die Entfernung desselben vom Mittelpunkte der Erde mit l, und ist a ein Punkt des Aequators der letzteren, φ der von dem zu a gehörigen Erdradius r und l eingeschlossene Winkel, γ die Anziehungskraft des Mondes in der Entfernung 1, so ist die Componente der Beschleunigung in der Richtung der Rotation des Punktes a im ersten Quadranten westlich vom Culminationsmeridian für diesen Punkt

$$1) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\gamma l \sin\varphi}{(l^2 - 2lr\cos\varphi + r^2)^{3/2}} + \frac{\gamma \sin\varphi}{l^2}$$

Da $dx = r\,d\varphi$, so ergiebt sich, wenn man mit dx multiplicirt und dann integrirt

$$2) \qquad \tfrac{1}{2}v^2 = \frac{\gamma}{(l^2 - 2lr\cos\varphi + r^2)^{1/2}} - \frac{\gamma r\cos\varphi}{l^2} + c$$

wo v die Geschwindigkeit und c die Integrationsconstante bezeichnet.

Für einen Punkt des Aequators beträgt die Geschwindigkeit annähernd 469 m, dieser Wert gilt für

$$\varphi = \frac{\pi}{2}$$

demnach ist für c der Wert

Digitized by Google

$$\frac{469^2}{2} m - \frac{\gamma}{(l^2+r^2)^{1/2}} \quad \text{zu setzen.}$$

Unter Berücksichtigung dieses Wertes geht Gleich. 2), wenn man die höheren Potenzen von $\frac{r}{l}$ vernachlässigt, da dieser Bruch etwa $= \frac{1}{60}$ ist, über in

$$\tfrac{1}{2}v^2 = \frac{469^2}{2} m + \tfrac{3}{2} \frac{\gamma r^2 \cos^2\varphi}{l^3}$$

Hieraus folgt:

3) $$v = 469 \left(1 + \frac{3 \,.\, 9{,}8 \,.\, \cos^2\varphi}{2 \,.\, 80 \,.\, 60^3 \,.\, 469^2}\right) m$$

da γ annähernd $\frac{9{,}8}{80} m$ für $r = 1$ ist.

Es sei ferner M die Wassermasse von der Länge des Quadranten, der Breite 1 und der Tiefe s, dann ist ein unendlich kleiner Teil dieser Masse von derselben Breite und Tiefe

$$= \frac{Mr\,d\varphi}{r\frac{\pi}{2}} = \frac{M\,d\varphi}{\frac{\pi}{2}}$$

Da $\frac{s}{r}$ ein kleiner Bruch ist, so kann man die Rotationsgeschwindigkeit am Grunde und an der Oberfläche von M annähernd als gleich annehmen. Multiplicirt man nun Gl. 3) mit $\frac{M\,d\varphi}{\frac{\pi}{2}}$ und integrirt zwischen den Grenzen

$$\varphi = 0 \quad \text{und} \quad \varphi = \frac{\pi}{2}$$

so erhält man als Bewegungsgrösse für diesen Quadranten

4) $$v_1 M = 469 \left(1 + \frac{3 \,.\, 9{,}8}{4 \,.\, 80 \,.\, 60^3 \,.\, 469^2}\right) mM$$

Die obere Grenze

$$\varphi = \frac{\pi}{2}$$

ist nur annähernd genommen; gsnauer ist sie

$$\varphi = 89^0\ 30'$$

da φ als Winkel an der Basis eines gleichschenkligen Dreiecks zu

Digitized by Google

bestimmen ist, dessen Schenkel jeder $= l$ und dessen Basis $= r_1 \cos\varphi$, also

$$= \frac{r}{2l} = 0{,}00\,830$$

weil in diesem Falle die Anziehung des Mondes auf den Punkt a und den Mittelpunkt der Erde gleich stark ist.

Für den ersten Quadranten östlich vom Culminationsmeridian erhält man auf ähnliche Weise

$$5) \qquad v_2 M_1 = 469\left(1 - \frac{3 \cdot 9{,}8}{4 \cdot 80 \cdot 60^3 \cdot 469^2}\right) mM$$

Aus Gl 4) und 5) ergiebt sich annähernd

$$6) \qquad M_1 = \left(1 + \frac{3 \cdot 9{,}8}{2 \cdot 80 \cdot 60^3 \cdot 469^2}\right) M$$

Bei Gleichheit der Bewegungsgrössen muss also auf dem östlichen Quadranten eine grössere Wassermasse vorhanden sein als auf dem westlichen, das Flutmaximum muss sich demnach nach Osten vom Culminationsmeridian verschieben.

Nimmt man den Aequatorialdurchschnitt der Erde unter Berücksichtigung der Flut als eine Ellipse mit den halben Achsen r und $r + \sigma$ an, wo σ die Höhe der Flut bezeichnet, und bezeichnet man ferner den Winkel der Verschiebung des Flutmaximums mit χ, so erhält man annähernd als Flächenunterschied des Kreis- und des dazu gehörigen Teiles des Ellipsenquadranten einerseits

$$\tfrac{1}{2}\sigma r\left(\frac{\pi}{2} + \chi\right), \quad \text{andererseits} \quad \tfrac{1}{2}\sigma r\left(\frac{\pi}{2} - \chi\right)$$

also eine Differenz von $\sigma r \chi$; für den Zustand der Gleichheit der Bewegungsgrössen muss demnach annähernd

$$\frac{\sigma \cdot r\,\chi}{s \cdot r\,\frac{\pi}{2}} M = \frac{3 \cdot 9{,}8}{2 \cdot 80 \cdot 60^3 \cdot 469^2} M$$

sein, hieraus ergiebt sich

$$7) \qquad \chi = \frac{3 \cdot 9{,}8}{2 \cdot 80 \cdot 60^3 \cdot 469^2} \cdot \frac{s}{\sigma} \cdot \frac{\pi}{2}$$

Für σ kann man annähernd $\frac{2s}{80 \cdot 60^3}$ setzen. Unter Berücksichtigung dieses Wertes geht Gleichung 7) über in

Digitized by Google

8) $\chi = \frac{3 \cdot 9{,}8}{4 \cdot 469^2} \cdot \frac{\pi}{2} = 10{,}8''$ oder in Zeit = 0,7 Sec.

Wegen Lage und Gestalt der Continente muss aber diese Zeit vergrössert werden. An den Westküsten derselben fehlt der Gegendruck in ost-westlicher Richtung, an den Ostküsten in west-östlicher, sodass sich hier das Wasser besonders hoch stauen muss, da die Küsten ihre Rotationsgeschwindigkeit behalten, das Wasser auch nicht plötzlich, dem veränderten Drucke entsprechend, in der Herstellung des Gleichgewichts folgen kann.

In ähnlicher Weise lässt sich auch für den entgegengesetzten Meridian eine Verspätung des Flutmaximums ableiten, da in den beiden anderen Quadranten der Mittelpunkt der Erde stärker angezogen wird als ein Punkt der Peripherie.

Eine Verzögerung der Rotationsgeschwindigkeit der Erde kann aber durch die Verspätung des Flutmaximums nicht herbeigeführt werden, da die Flutmassen wieder zurückströmen müssen.

Gleichung 8) muss auch annähernd für die Atmosphäre gelten, wenn sich auch wegen anderer Einflüsse und Ursachen die Verschiebung schwer durch Beobachtung wird nachweisen lassen.

Digitized by Google

IV.

Untersuchungen über die Attraction zweier homogenen Körper.

Von

Emil Liebenthal.

In seiner Inaugural-Dissertation beschäftigte sich Verfasser mit der Attraction, welche erstens zwei homogene Polyeder und zweitens ein homogenes Polyeder und ein homogenes dreiaxiges Ellipsoid auf einander ausüben. Im Nachstehenden möge nun der erste Teil ausführlicher mitgeteilt werden, während der zweite nur kurz erwähnt werden soll.

Es mögen die Massen zweier unveränderlicher Systeme m, m' so auf einander wirken, dass jeder Punkt P des ersten Systems auf jeden Punkt P' des zweiten und umgekehrt jeder Punkt P' des zweiten Systems auf jeden Punkt P des ersten nach dem Newtonschen Attractionsgesetze wirkt. Es werden sich dann sämtliche Attractionskräfte im Gleichgewicht halten, wenn man das System starr macht. Nach den Gesetzen der Statik reduciren sich die an den Punkten P wirkenden Kräfte für einen beliebigen Punkt des Raumes auf eine Resultante R und ein Kräftepar H. Für denselben Punkt reduciren sich auch die an den Punkten P' wirkenden Kräfte auf eine Resultante R' und ein Kräftepar H', die R und H an Grösse gleich, dem Sinne nach jedoch entgegengesetzt sind. Wir wollen nun diesen Reductionspunkt zum Anfang eines rechtwinkligen Coordinatensystems machen und die Resultante R und das resultirende Par H aller an m angreifenden Kräfte in die Componenten X, Y, Z und L, M, N nach den Axen zerlegen. Es ist dann, wenn wir die Kraft, mit der sich 2 Masseneinheiten in der Einheit der Entfernung anziehen, der Einfachheit wegen gleich der Einheit setzen:

Digitized by Google

$$X = \int\int \frac{x' - x}{r^3}\, dm\, dm' \qquad L = \int\int \frac{yz' - y'z}{r^3}\, dm\, dm'$$

$$Y = \int\int \frac{y' - y}{r^3}\, dm\, dm' \qquad M = \int\int \frac{zx' - z'x}{r^3}\, dm\, dm'$$

$$Z = \int\int \frac{z' - z}{r^3}\, dm\, dm' \qquad N = \int\int \frac{xy' - x'y}{r^3}\, dm\, dm'$$

r bedeutet darin den Abstand der unbestimmten Elemente dm, dm', deren Coordinaten xyz, $x'y'z'$ seien, und von den Integrationen ist die eine über m, die andere über m' auszudehnen. Diese Grössen X, Y, Z; L, M, N lassen sich nun durch die Differentialquotienten der Function

$$V = \int\int \frac{dm\, dm'}{r}$$

ausdrücken, welche daher das Potential der Massen m, m' auf ninander genannt wird. Erteilen wir nämlich dem System m, dessen Attractionskräfte wir reduciren wollen, eine virtuelle Verrückung, welche in die Verschiebungen $\partial\xi\, \partial\eta\, \partial\zeta$ parallel den Axen und in die Rotationen von den Amplituden $\partial\sigma$, $\partial\sigma'$, $\partial\sigma''$ um die Coordinatenaxen zerlegt werden kann, so liefert das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten als Bedingung für das Gleichgewicht zwischen den Attractionskräften und $-X$, $-Y$, $-Z$, $-L$, $-M$, $-N$

$$\partial V = X\partial\xi + Y\partial\eta + Z\partial\zeta + L\partial\sigma + M\partial\sigma' + N\partial\sigma''$$

Legen wir dann durch einen beliebigen Punkt (ξ, η, ζ) des Systems m ein mit diesem fest verbundenes Coordinatensystem u, v, w, dessen Axen der Lage nach durch die 3 Euler'schen Coordinaten ψ, ϑ, φ gegeben sein mögen, so wird V eine Function voe ξ, η, ζ; φ, ϑ, ψ. ψ resp. φ sei dabei der Winkel, den die Schnittlinie der uv- und xy-Ebene mit der x- resp. u-Axe bildet, und ϑ sei der Winkel der z- und w-Axe. Geben wir zunächst dem System m nach und nach Verschiebungen parallel den Coordinatenaxen, so folgt

$$X = \frac{\partial V}{\partial \xi}, \qquad Y = \frac{\partial V}{\partial \eta}, \qquad Z = \frac{\partial V}{\partial \zeta}$$

Erteilen wir ferner dem System m nach und nach 3 Rotationen um die Coondinatenaxen, so erhalten wir, da sich ξ, η, ζ, ψ, ϑ, φ ändern werden:

$$L = \frac{\partial V}{\partial \sigma} = \frac{\partial V}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial \sigma} + \frac{\partial V}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial \sigma} + \frac{\partial V}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial \sigma} + \frac{\partial V}{\partial \psi}\frac{\partial \psi}{\partial \sigma} + \frac{\partial V}{\partial \vartheta}\frac{\partial \vartheta}{\partial \sigma} + \frac{\partial V}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial \sigma}$$

Digitized by Google

$$M = \frac{\partial V}{\partial \sigma'} = \frac{\partial V}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial \sigma'} + \frac{\partial V}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial \sigma'} + \frac{\partial V}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial \sigma'} + \frac{\partial V}{\partial \psi}\frac{\partial \psi}{\partial \sigma'} + \frac{\partial V}{\partial \vartheta}\frac{\partial \vartheta}{\partial \sigma'} + \frac{\partial V}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial \sigma'}$$

$$N = \frac{\partial V}{\partial \sigma''} = \frac{\partial V}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial \sigma''} + \frac{\partial V}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial \sigma''} + \frac{\partial V}{\partial \xi}\frac{\partial \zeta}{\partial \sigma''} + \frac{\partial V}{\partial \psi}\frac{\partial \psi}{\partial \sigma''} + \frac{\partial V}{\partial \vartheta}\frac{\partial \vartheta}{\partial \sigma''} + \frac{\partial V}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial \sigma''}$$

Hierin können wir zunächst wieder

$$\frac{\partial V}{\partial \xi} = X; \quad \frac{\partial V}{\partial \eta} = Y; \quad \frac{\partial V}{\partial \zeta} = Z$$

setzen. Die Grössen $\frac{\partial \xi}{\partial \sigma}, \frac{\partial \eta}{\partial \sigma}, \frac{\partial \zeta}{\partial \sigma}$ u. s. w. findet man durch die Bemerkung, dass hier eine parallel der yz-Ebene gerichtete Translation von der Grösse $\sqrt{\eta^2 + \zeta^2}\,\partial\sigma$, in die Verschiebungen

$$\partial\xi = \sigma, \quad \partial\eta = \zeta\,\partial\sigma \quad \text{und} \quad \partial\zeta = \eta\,\partial\sigma$$

zu zerlegen ist; es ist also:

$$\frac{\partial \xi}{\partial \sigma} = 0, \quad \frac{\partial \eta}{\partial \sigma} = -\zeta, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial \sigma} = \eta$$

Ganz ebenso finden wir die der Rotationsamplitude $\partial\sigma'$ resp. $\partial\sigma''$ um die Axe parallel der y- resp. z-Axe entsprechenden Werte von $\partial\xi$, $\partial\eta$, $\partial\zeta$.

Die Grössen

$$\frac{\partial \psi}{\partial \sigma}, \frac{\partial \vartheta}{\partial \sigma}, \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma}, \frac{\partial \psi}{\partial \sigma''}, \frac{\partial \vartheta}{\partial \sigma''}, \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma''}, \frac{\partial \psi}{\partial \sigma''}, \frac{\partial \vartheta}{\partial \sigma''}, \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma''}$$

ergeben sich mit Hülfe des Satzes vom Parallepiped der Rotationen von unendlich kleinen Amplituden. Denken wir uns ∂o, $\partial\sigma'$, $\partial\sigma''$ so auf die Axen abgetragen, dass eine Amplitude, die einer Drehung im positiven oder negativen Sinne entspricht, die Richtung der betreffenden positiven oder negativen Axe hat, und projiciren diese Amplituden auf die beweglichen Coordinatenaxen der u, v, w, so erhalten wir Rotationen, welche die früheren ersetzen. Mit Hülfe der 3 bekannten Gleichungen aus der Mechanik, welche die Beziehungen zwischen den Amplituden um die beweglichen Axen und den Differentialen $\partial\psi$. $\partial\vartheta$, $\partial\varphi$, ausdrücken, gewinnen wir die drei Gleichungen:

Digitized by Google

a) $\partial\sigma(\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\cos\vartheta) +$
$\partial\sigma'(\sin\varphi\cos\psi\cos\vartheta + \sin\psi\cos\varphi) +$
$\partial\sigma''\sin\varphi\sin\vartheta = \cos\varphi\,\partial\vartheta + \sin\varphi\sin\vartheta\,\partial\psi$

b) $\partial\sigma(-\sin\psi\cos\varphi\cos\vartheta - \sin\varphi\cos\psi) +$
$\partial\sigma'(\cos\varphi\cos\psi\cos\vartheta - \sin\varphi\sin\psi) +$
$\partial\sigma''\sin\vartheta\cos\varphi = -\sin\varphi\,\partial\vartheta + \cos\varphi\sin\vartheta\,\partial\psi$

c) $\partial\sigma\sin\vartheta\sin\psi - \partial\sigma'\sin\vartheta\cos\psi + \partial\sigma''\cos\vartheta = \partial\varphi + \cos\vartheta\,\partial\psi$

Wir finden hieraus durch Auflösung nach $\partial\vartheta$, $\partial\varphi$ und $\partial\psi$:

$$\partial\vartheta = \partial\sigma\cos\psi + \partial\sigma'\sin\psi$$
$$\partial\varphi\sin\vartheta = \partial\sigma\sin\psi - \partial\sigma'\cos\psi$$
$$\partial\psi\sin\vartheta = \partial\sigma''\sin\vartheta - \partial\sigma\sin\psi\cos\vartheta + \partial\sigma'\cos\psi\cos\vartheta$$

Wenn wir also dem System m drei Rotationen von den Amplituden $\partial\sigma$, $\partial\sigma'$, $\partial\sigma''$ erteilen, so ändern sich ϑ, φ und ψ um Grössen, welche durch diese Gleichungen gegeben sind. Daraus folgt:

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial\sigma} = \cos\psi, \quad \frac{\delta\varphi}{\partial\sigma} = \frac{\sin\psi}{\sin\vartheta}, \quad \frac{\partial\psi}{\partial\sigma} = -\frac{\sin\psi\cos\vartheta}{\sin\vartheta}$$

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial\sigma'} = \sin\psi, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial\sigma'} = -\frac{\cos\psi}{\sin\vartheta}, \quad \frac{\partial\psi}{\partial\sigma'} = \frac{\cos\psi\cos\vartheta}{\sin\vartheta}$$

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial\sigma''} = 0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial\sigma''} = 0, \quad \frac{\partial\psi}{\partial\sigma''} = 1$$

Hierdurch sind L, M, N vollständig bestimmt, wenn wir

$$V = \int\int \frac{dm\,dm'}{r}$$

als Function von ψ, ϑ, φ, ξ, η, ζ dargestellt haben.

Aus unseren Untersuchungen geht also hervor, dass zur Bestimmung der Attraction der Massen m, m' die Kenntniss der Function

$$V = \int\int \frac{dm\,dm'}{r}$$

allein genügt und dass wir uns das System m' fest denken können, wenn es sich um die Bestimmung der Attraction handelt, welche das System m in der Lage, die es gerade einnimmt, von dem System m' erfährt.

Digitized by Google

Bevor ich nun dazu übergehe, jene Function V für den Fall der Attraction zweier homogenen Polyeder zu berechnen, werde ich, um den Gang der Untersuchung nicht zu unterbrechen, die Sätze, auf welche ich mich berufen habe, vorausschicken.

1.

Wenn die Functionen F_1, F_2, F_3 von x, y, z im Innern eines bestimmten Raumes endlich und stetig sind, so gilt die Gleichung

$$\iiint \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_2}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz$$
$$= \iint \Big(F_1 \cos(n,x) + F_2 \cos(n,y) + F_3 \cos(n,z)\Big)\, do$$

wo linker Hand über diesen bestimmten Raum und rechter Hand über dessen gesamte Oberfläche, dessen unbestimmtes Element durch do bezeichnet werden möge, zu integriren ist. (n,x), (n,y) und (n,z) sind die Winkel, welche die auf dem Elemente do nach dem Aeussern des Körpers gezogene Normale mit den positiven Axen einschliesst.

2.

Bedeutet $\varphi(\varrho)$ irgend eine Function der Entfernung ϱ des Elementes do einer ebenen Fläche von einem in dieser Ebene aber ausserhalb der geschlossenen ebenen Fläche gelegenen Punkt, so besteht, wenn man

$$\int \varrho\varphi(\varrho)\,d\varrho = \psi(\varrho)$$

setzt, die Gleichung

$$\iint \varphi(\varrho)\,do = \int \frac{\psi(\varrho)}{\varrho} \cos\overline{\nu\varrho}\,.\,ds$$

wo links über die geschlossene Fläche und rechts über den Umfang derselben zu integriren ist; ds ist ein unbestimmtes Element der Begrenzung, ϱ dessen Entfernung vom angezogenen Punkte und $\overline{\nu\varrho}$ ist der Winkel, den die auf dem Elemente ds nach dem Aeussern dieser Fläche errichtete Normale ν mit dem von dem angezogenen Punkte nach ds gezogenen Radiusvector ϱ einschliesst. Liegt der Punkt aber innerhalb der geschlossenen ebenen Fläche, so ist zu dem Integral auf der rechten Seite noch der Beitrag: $-2\pi\psi(o)$ [1]) hinzuzufügen.

---

1) Cfr. Mertens, Bestimmung des Potentials eines homogenen Polyeders. (Crelle's Journ. Bd. 69 p. 286).

Digitized by Google

3.

Aus der Gleichung

$$r^2 = (x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2$$

folgt durch Differentiation

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial z^2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 r}{\partial x'^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial y'^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial z'^2}\right)$$

Bestimmung des Potentials zweier homogener Polyeder auf einander.

Die constante Dichtigkeit beider Körper werde ich der Einfachheit wegen der Einheit gleichsetzen, da von der Einheit verschiedene Dichtigkeiten nur einen constanten Factor involviren würden. Den Anfang des absoluten Coordinatensystems lege ich, wie schon oben bemerkt ist, in den Reductionspunkt, für welchen die Attrationskräfte von m reducirt werden sollen. Das Polyeder m resp. m' möge n resp. n' Seitenflächen besitzen. Ich werde sie dadurch bezeichnen, dass ich jeder derselben eine der Zahlen aus der Reihe 1, 2, 3 . . . n resp $1'$, $2'$, $3'$ . . . n', wo natürlich im allgemeinen n von n' verschieden sein wird, als Index beifüge. Das Polyeder m ist also begrenzt von den Flächen 1, 2 . . n und das System m' von den Flächen $1'$, $2'$ . . . n'. Allgemein werde ich eine Fläche des Systems m resp. m' durch i resp. i' bezeichnen, so dass also i resp. i' eine Zahl aus der Reihe 1, 2 . . n resp. $1'$, $2'$ . . . n' darstellt. Die Coordinaten eines Punktes der Seite i resp. i' will ich x_1, y_1, z_1 resp. x_1', y_1', z_1' nennen und die Gleichungen dieser Seiten seien in der Normalform gegeben durch

$$A_1\,x_1 + B_1\,y_1 + C_1\,z_1 - D_1 = 0$$
$$A_1'x_1' + B'_1y_1' + C_1'z_1' - D_1' = 0$$

so dass die A, B, C die Cosinus der Winkel sind, welche die vom Coordinatenanfang auf die betreffende Seite gefällte Senkrechte von der Länge D mit den positiven Richtungen der Axen einschliesst, do_i resp. do_i' sei ein unbestimmtes Element der Seite i resp. i'. Teile ich nun, wie es gewöhnlich geschieht, das System der Massen m, m' durch Ebenen parallel den Coordinatenebenen in Elemente $dx\,.\,dy\,.\,dz$; $dx'\,.\,dy'\,.\,dz'$, so ist wegen der gleich der Einheit angenommenen Dichtigkeit beider Systeme

$$dm = dx\,.\,dy\,.\,dz \quad \text{und} \quad dm' = dx'\,.\,dy'\,.\,dz'$$

Da der Abstand r der Elemente dm, dm' ausgedrückt wird durch

Digitized by Google

$$r = \sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}$$

so ergiebt sich für V der Ausdruck

$$V = \iiint\iiint \frac{dx\,dy\,dz\,dx'\,dy'\,dz'}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}$$

den wir auch unter der Form

$$V = \iiint dx\,dy\,dz \iiint \frac{dx'\,dy'\,dz'}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}$$

schreiben können, und der mit Rücksicht auf den Satz 3) übergeht in

$$V = \frac{1}{2}\iiint dx\,dy\,dz \iiint dx'\,dy'\,dz' \left(\frac{\partial^2 r}{\partial x'^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial y'^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial z'^2}\right)$$

Die Anwendung des Satzes 1) liefert dann für das über m' auszudehnende Integral ein über die Oberfläche von m' zu erstreckendes, das wir in eine Summe von Integralen zerlegen, von denen sich jedes nur auf eine einzelne Polyederfläche bezieht. Wir erhalten also

$$V = \frac{1}{2}\sum_{1}^{n'}{}' \iiint dx\,dy\,dz \iint do_i' \left(A_i' \frac{\partial r}{\partial x_i'} + B_i' \frac{\partial r}{\partial y_i'} + C_i' \frac{\partial r}{\partial z_i'}\right)$$

wo zunächst über die Seitenfläche i' zu integriren und darauf nach i' von $1' \ldots n'$ über alle Seiten i' zu summiren ist. Den durch die Gleichungen der betreffenden Ebenen gegebenen Grössen $A_1' B_1' C_1'$ haben wir in diesem Ausdruck für V ihre Vorzeichen zu lassen oder ihnen die entgegengesetzten zu geben, je nachdem die vom Coordinatenanfang auf die Seite i' gefällte Senkrechte die Richtung der von dem Elemente do_1' nach dem Aeussern oder Innern des Körpers gezogenen Normale hat. Durch Umkehrung der Integrationsordnung erhalten wir, wenn wir benutzen, dass

$$\frac{\partial r}{\partial x_i'} = -\frac{\partial r}{\partial x}, \quad \frac{\partial r}{\partial y_i'} = -\frac{\partial r}{\partial y} \text{ und } \frac{\partial r}{\partial z_i'} = -\frac{\partial r}{\partial z}$$

ist, und dass die $A_1' B_1' C_1'$ als constante Grössen vor das Integralzeichen treten können:

$$V = -\frac{1}{2}\sum_{1}^{n'}{}' \left[A_1' \iint do_1' \iiint dx\,dy\,dz \frac{\partial r}{\partial x} + B_1' \iint do_1' \iiint dx\,dy\,dz \frac{\partial r}{dy} + C_i' \iint do_1' \iiint dx\,dy\,dz \frac{\partial r}{\partial z}\right]$$

Digitized by Google

Eine nochmalige Anwendung des Satzes 1) auf die Gleichung liefert:

$$V = -\frac{1}{2}\sum_{1}^{n}\sum_{1'}^{n'}\left[(A_1'A_1+B_1'B_1+C_1'C_1)\iint do_i'\iint do_i'\,r\right]$$

wo zunächst über die Seite i zu integriren und darauf die Summation dieser Integralausdrücke über alle Seiten i zu erstrecken ist. Die Bestimmung des Vorzeichens der Grössen A_1, B_1, C_1 ist analog von A_1', B_1', C_1'. Berücksichtigen wir noch, dass $(A_1'A_1'+B_1'B_1+C_1'C_1)$ abgesehen vom Vorzeichen gleich dem Cosinus des Neigungswinkels der Ebenen i und i' ist, den wir mit (i, i') bezeichnen wollen, so können wir V die kürzere Form geben

$$V = \frac{1}{2}\sum_{1}^{n}\sum_{1'}^{n'}\varepsilon_{ii'}\left(\cos(i,i')\iint do_1'\iint do_1'\,r\right)$$

wenn ε_{ii} nach dem Obigen die Werte $+1$ oder -1 annimmt.

Wir haben hierdurch V ausgedrückt durch eine Seite von $n.n'$ vierfachen Integralen von der allgemeinen Form $\iiiint do_1'.do_1.r$, bei denen sich die Integrationen über die Polyederflächen i und i' erstrecken. Um dieses vierfache Integral weiter zu behandeln, wollen wir zunächst das Doppelintegral $\iint do_1 r$ ins Auge fassen und dasselbe zur Abkürzung U nennen. Fällen wir nun von dem Elemente do_1' auf die Ebene i das Lot p_1, dessen Fusspunkt N_1 von dem Elemente do_1 um die Strecke ϱ_1 entfernt sein möge, so ist

$$r^2 = p_1^2+\varrho_1^2$$

also

$$U = \iint do_1'\sqrt{p_1^2+\varrho_1^2}$$

Bei Anwendung des Satzes 2) auf diesen Ausdruck erhalten wir also für den Fall, dass der Fusspunkt N_1 ausserhalb der Polyederfläche i liegt:

$$U = \frac{1}{3}\int\frac{\sqrt{(p_1^2+\varrho_1^2)^3}}{\varrho}\cos\overline{\nu\varrho}\,ds$$

wo über die durch eine Reihe von Kanten gebildete Begrenzung dieser Fläche zu integriren ist. Wenn N_1 dagegen innerhalb der Fläche i liegt, so ist auf der rechten Seite noch $-\frac{2\pi}{3}p_1^3$ hinzuzufügen. Es möge nun allgemein unter k eine von den Ebenen ver-

Digitized by Google

standen werden, die mit der Ebene i eine Kante bildet, die wir kurz die Kante der Ebenen i und k nennen wollen. Bezeichnet dann $ds_{i,k}$ ein Element der Kante von i und k, $\varrho_{i,k}$ dessen Entfernung von dem Punkte N_i, so erhalten wir also:

$$U = \frac{1}{3}\,\Sigma^k \int \frac{\sqrt{(p_i^2+\varrho^i{}_{,k}{}^2)^3}}{\varrho_{i,k}} \cos(\nu_{i,k},\ \varrho_{i,k})\, ds_{i,k}$$

wo nach k über alle Kanten der Seitenfläche i zu integriren ist. Fällen wir nun von dem Punkte N_i auf die Kante von i und k das Lot $N_i N_{i,k}$, das mit $q_{i,k}$ bezeichnet werden möge, so wird

$$\cos(\nu_{i,k},\ \varrho_{i,k}) = \frac{q_{i,k}}{\varrho_{i,k}}$$

wo wir dem $q_{i,k}$ das positive oder negative Vorzeichen zu geben haben, je nachdem N_i auf der innern oder äussern Seite der Kante der Seitenflächen i und k liegt. Werden die s von dem Fusspunkte $A_{i,k}$ der Senkrechten $N_i N_{i,k}$ positiv nach der einen und negativ nach der entgegengesetzten Seite hin gezählt, so wird, wenn dem Elemente $ds_{i,k}$ der Wert $s_{i,k}$ entspricht:

$$\varrho_{i,k}{}^2 = q_{i,k}{}^2 + s_{i,k}{}^2$$

Wir müssen dabei nach derjenigen Richtung hin integriren, nach welcher die s wachsen. Seien nun $s'_{i,k}$ und $s''_{i,k}$ die Werte von s, welche den Eckpuvkten dieser Kante entsprechen und $s'_{i,k} < s''_{i,k}$, so ist:

$$U = \frac{1}{3}\,\Sigma_k\, q_{i,k} \int_{s'_{i,k}}^{s''_{i,k}} \frac{\sqrt{(p_1^2+q_{1,k}{}^2+s_{1,k}{}^2)^3}}{q_{1,k}{}^2+s_{1,k}{}^2}\, ds_{i,k}$$

Das jetzt zu behandelnde Integral

$$\int_{s'}^{s''} \frac{\sqrt{(p^2+q^2+s^2)^3}}{q^2+s^2}\, ds$$

bei dem ich der Kürze wegen die Indices fortgelassen habe, kann zerlegt werden in

$$p^2 \int_{s'}^{s''} \frac{\sqrt{p^2+q^2+s^2}}{q^2+s^2}\, .\, ds + \int_{s'}^{s''} \sqrt{p^2+q^2+s^2}\, .\, ds$$

Digitized by Google

Das erste dieser Integrale ist von Mertens in seiner Abhandlung über die Bestimmung des Potentials eines homogenen Polyeders auf einen materiellen Punkt berechnet; er findet:

$$\int_{s'}^{s''} \frac{\sqrt{p^2+q^2+s^2}}{q^2+s^2}\,ds = \log\frac{s''+\sqrt{p^2+q^2+s''^2}}{s'+\sqrt{p^2+q^2+s'^2}} + \frac{p}{q}\operatorname{arc\,tg}\frac{ps''}{q\sqrt{p^2+q^2+s''^2}} - \frac{p}{q}\operatorname{arc\,tg}\frac{ps'}{q\sqrt{p^2+q^2+s'^2}}$$

wo die arc tg zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ zu nehmen sind.

Unter Benutzung der bekannten Recursionsformel

$$\int s^m(a+bs^n)^p\,ds = \frac{s^{m+1}(a+bs^n)^p}{np+m+1} + \frac{anp}{np+m+1}\int s^m(a+bs^n)^{p-1}\,ds$$

ergiebt sich für das zweite Integral

$$\int_{s'}^{s''} \sqrt{p^2+q^2+s^2}\,.\,ds = \frac{p^2+q^2}{2}\log\frac{s''+\sqrt{p^2+q^2+s''^2}}{s'+\sqrt{p^2+q^2+s'^2}} + \frac{s''\sqrt{p^2+q^2+s''^2}}{2} - \frac{s'\sqrt{p^2+q^2+s'^2}}{2}$$

Denken wir uns jetzt den p, q, s ihre früheren Indices wiedergegeben, so stellen

$$\sqrt{p_i^2+q_{i,k}^2+s''_{i,k}{}^2} \quad \text{und} \quad \sqrt{p_i^2+q_{i,k}^2+s'_{i,k}{}^2}$$

die Entfernungen $r''_{i,k}$ und $r'_{i,k}$ des Elementes do_i' von den Endpunkten der Kante von i und k dar, $s''_{i,k}$ und $s'_{i,k}$ sind ihrem absoluten Werte nach die Projectionen dieser Entfernungen auf dieselbe Kante. Substituiren wir nun in U die für die beiden Integrale gefundenen Werte, so erhalten wir also den gesuchten Ausdruck des Potentials der beiden Polyeder aufeinander in der Form

$$V = \frac{1}{6}\sum_{1'}^{n'}{}_{i'}\sum_{1}^{n}{}_{i}\,\Sigma_k\,\varepsilon_{i,k}\cos(i,\,i')\int do_1'\Big(q_{i,k}\frac{3p_1{}^2+q_{i,k}{}^2}{2}\log\frac{s''_{i,k}+r''_{i,k}}{s'_{i,k}+r'_{i,k}} + p_1{}^2\operatorname{arc\,tg}\frac{p_{i,k}\,s''_{i,k}}{q_{i,k}\,r''_{i,k}} - p_1{}^2\operatorname{arc\,tg}\frac{p_{i,k}\,s'_{i,k}}{q_{i,k}\,r'_{i,k}} + q_{i,k}\frac{s''_{i,k}\,r''_{i,k}}{2} - q_{i,k}\frac{s'_{i,k}\,r_{i,k}}{2}\Big)$$

Digitized by Google

$$-\frac{\pi}{3}\sum_{1'}^{n'}\sum_{1}^{n}\varepsilon_{ii'}(\cos(i,\,i')\int do_{i'}\,p_i^3$$

wo sich die Integration in dem letzten Gliede auf der rechten Seite über denjenigen Teil der Fläche i' zu erstrecken hat, für den N_i innerhalb der Fläche i liegt.

Zur leichteren Uebersicht sei noch einmal die Bedeutung der in dieser Gleichung vorkommenden Grössen angegeben. Es ist p_i das von dem Elemente $do_{i'}$ auf die Polyederfläche i gefällte Lot und $\varphi_{i,k}$ dasjenige, welches vom Fusspunkt N_i jenes Lotes auf die Kante der Seitenflächen i und k gefällt ist. $q_{i,k}$ erhält das positive oder negative Vorzeichen, je nachdem N_i auf der inneren oder äusseren Seite dieser Kante liegt. $r''_{i,k}$ und $r'_{i,k}$ sind die Entfernungen des Elementes $do_{i'}$ von den Endpunkten der Kante und die absoluten Werte von $s''_{i,k}$ und $s'_{i,k}$ die Projectionen von $r''_{i,k}$ und $r'_{i,k}$ auf dieselbe Kante; ihre wirklichen Werte sind die den Endpunkten der Kante von i und k entsprechenden Werte von s und zwar haben wir $s'_{i,k} < s''_{i,k}$ zu nehmen. Die Summe Σ_k erstreckt sich über alle Kanten der Seitenfläche i Das Zeichen $\sum_{1}^{n}{}_i$ deutet an, dass die entsprechenden Ausdrücke für alle Grenzflächen l des Polyeders m zu bilden und zu addiren sind. Die Integration erstreckt sich zunächst über die Polyederfläche i' und $\sum_{1'}^{n'}{}_{i'}$ bezeichnet eine Summation über sämtliche Polyederflächen i',

Ich habe jetzt zu zeigen, wie man die Grössen p_i, $q_{i,k}$, $r''_{i,k}$, $r'_{i,k}$, $s''_{i,k}$, $s'_{i,k}$ analytisch auszudrücken und daraus V als Function jener im Eingange erwähnten 6 Grössen ξ, η, ζ. ψ, ϑ, φ darzustellen habe.

Es ist, wenn $do_{i'}$ die Coordinaten $x_{i'}$, $y_{i'}$, $z_{i'}$ hat

$$p_1 = [A_1 x_1' + B_1 y_1' + C_1 z_1' - D_1]$$

wo die eckige Klammer andeuten soll, dass wir von dem Ausdruck in der Klammer den absoluten Wert zu nehmen haben, weil in dem Ausdruck von V nur der absolute Wert von p_i in Betracht gezogen wird.

Die Grösse $q_{i,k}$ findet man leicht durch folgende Betrachtung. Es schneidet die von dem Punkte N_1 auf die Ebene k gefällte Senkrechte $N_1 O_k$ die in dem Punkte $N_{1,k}$ auf der Kante errichtete in

Digitized by Google

der Ebene k liegende Senkrechte $N_{1,k}O_k$. Dadurch entsteht das bei O_k rechtwinklige Dreieck $N_1 O_k N_{1,k}$. Der Winkel $N_1 N_{1,k} O_k$ ist also der Neigungswinkel der Ebenen i und k und kann nach Analogie unserer früheren Bezeichnung mit Wkl. (i, k) bezeichnet werden. Da nun, wie man leicht findet, N_1 die Coordinaten

$$x_1' - p_1 A_1; \quad y_1' - p_1 B_1; \quad z_1' - p_1 C_1$$

hat, so ergiebt sich

$$N_1 O_k = [(x_1' - p_1 A_1) A_k + (y_1' - p_1 B_1) B_k + (z_1' - p_1 C_1) C_k - D_k]$$

wo die eckige Klammer dieselbe Bedeutung hat als vorher. Nun ist

$$q_{1,k} = \frac{A_1 D_k}{\sin(i, k)}$$

oder da

$$\cos(i, k) = \pm (A_1 A_k + B_1 B_k + C_1 C_k) \quad \text{ist}$$

$$q_{1,k} = \frac{N_1 O_k}{\sqrt{(B_1 C_k - B_k C_1)^2 + (C_1 A_k - C_k A_1)^2 + (A_1 B_k - A_k B_1)^2}}$$

Dem sich hieraus ergebenden absoluten Werte von $q_{i,k}$, den wir als Function von x_1', y_1', z_1' dargestellt haben, müssen wir dann nach den früher angegebenen Bestimmungen das positive oder negative Vorzeichen geben. Die Coordinaten der Endpunkte der Kante von i und k findet man aus den Gleichungen der 3 Ebenen i, k, l_1 und i, k, l_2, die in diesen Endpunkten zusammenstossen. Die Coordinaten werden also nur abhangen von den Grössen

$$A_1; \; B_1, \; C_1; \quad A_k, \; B_k, \; C_k; \quad A_{l_1}, \; B_{l_1}, \; C_{l_1}; \quad A_{l_2}, \; B_{l_2}, \; C_{l_2}$$

Wir können also die Entfernungen $r''_{i,k}$ und $r'_{i,k}$ bestimmen. Zur Berechnung der absoluten Werte von $s'_{i,k}$ und $s''_{i,k}$ ist die Kenntniss der Cosinus derjenigen Winkel erforderlich, welch die Radienvectoren $r''_{i,k}$ und $r'_{i,k}$ einerseits und die Kante der Seitenflächen i und k anderseits mit den Coordinatenaxen einschliessen. Die 6 ersten Cosinus sind bekannt, sobald man die Coordinaten der Endpunkte der Kante gefunden hat. Die 3 letzteren, die wir nach Analogie mit $A_{1,k}$, $B_{i,k}$, $C_{i,k}$ bezeichnen wollen, finden wir aus der Bemerkung, dass die Kante senkrecht steht auf den Normalen der Ebenen i und k, durch die 3 Gleichungen

$$A_1 A_{1,k} + B_1 B_{1,k} + C_1 C_{1,k} \quad A_k A_{1,k_1} + B_i B_{1,k} + C_k C_{1,k} = 0$$

und

$$N^2_{1,k} + B^2_{1,k} + C^2_{1,k} = 1$$

Digitized by Google

Wir legen nun durch einen beliebigen Punkt (ξ, η, ζ) des Polyeders m ein mit diesem fest verbundenes Coordinatensystem u, v, w, dessen Axen der Lage nach durch die oben besprochenen Winkel ψ, ϑ, φ bestimmt sein mögen. Der Kürze halber wollen wis jedoch zunächst die Cosinus der Winkel einführen, welche die beweglichen Axen mit den festen einschliessen; diese seien: a, a', a''; b, b', b''; c, c', c''. Die Gleichung der Seite i sei in Bezug auf das bewegliche Coordinatensystem in der Normalform

$$\mathfrak{A}_1 u_i + \mathfrak{B}_1 v_i + \mathfrak{C}_1 w_i - \mathfrak{D}_1 = 0$$

wo wir $\mathfrak{A}_i$, $\mathfrak{B}_i$, $\mathfrak{C}_i$, $\mathfrak{D}_i$ als gegeben ansehen müssen. Da nun durch die Transformationsformeln

$$x = \xi + au + bv + cw, \quad y = \eta + a'u + b'v + c'w$$
$$z = \zeta + a''u + b''v + c''w$$

$$A_i x_i + B_i y_i z_i - D_i \ . \ . \ .$$

übergehen soll in $\lambda(\mathfrak{A}_i v_i + \mathfrak{B}_i v_i + \mathfrak{C}_i w_i - \mathfrak{D}_i)$, wo λ eine, noch zu bestimmende Constante ist, so folgen die Gleichungen

$$A_1 a + B_1 a' + C_1 a'' = \lambda \mathfrak{A}_1, \quad A_1 b + B_1 b_1' + C_1 b'' = \lambda \mathfrak{B}_i$$
$$A_1 c + B_1 c' + C_1 C'' = \lambda \mathfrak{C}_1, \quad D_1 - A_1 \xi - B_1 \eta - C_1 \zeta = \lambda \mathfrak{D}_1$$

Die ersteren 3 Gleichungen liefern

$$A_1 = \lambda(\mathfrak{A}_1 a + \mathfrak{B}_1 b + \mathfrak{C}_1 c), \quad B_1 = \lambda(\mathfrak{A}_1 a' + \mathfrak{B}_1 b' + \mathfrak{C}_1 c')$$
$$C_1 = \lambda(\mathfrak{A}_1 a'' + \mathfrak{B}_1 b'' + \mathfrak{C}_1 c'')$$

aus ihnen findet man

$$\lambda = \pm 1$$

durch die Bemerkung, dass

$$A_1^2 + B_1^2 + C_1^2 = 1$$

ist. Die vierte Gleichung endlich bestimmt D_i. Wir haben hiermit also die $A_1 B_1 C_1 D_1$ ausgedrückt $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{D}_1$; a, b, c; a', b', c'; a'', b'', c''. Die 9 letzteren Cosinus haben wir dann auszudrücken durch die sin und cos der ϑ, ψ, φ vermittelst der bekanntien Gleichungen. Somit haben wir V dargestellt als Functon von z, η, ζ; ψ, ϑ, φ; A_1', B_1', C_1', D_1; $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}_1'$, $\mathfrak{C}_1'$, $\mathfrak{D}_1'$, von denen die letzteren 8 Grössen von den ersten 3 unabhängig sind. Die in der Einleitung angegebenen Gleichungen gestatten uns schliesslich X, Y, Z und L, M, N zu berechnen.

Aus der eben angegebenen analytischen Darstellung der Grössen p, q, r, s geht hervor, dass wir in dem Ausdruck für das Doppel-

Digitized by Google

potential zweier homogenen Polyeder, das wir in Gestalt eines Doppelintegrals erhielten, noch eine Integration auszuführen vermögen. Zunächst erkennen wir, wenn zur Abkürzung

$$\tfrac{1}{2}\varepsilon_{i,i'} \cdot \cos(i, i') = a_{i,i'}$$

gesetzt wird, dass sich in dem Integral

$$-2\pi a_{i,i'} \int do_{i'} \cdot p_i^3$$

beide Integrationen ausführen lassen.

Betrachten wir ferner einen der Endpunkte der Kante von i und k, dem die Werte $s''_{i,k}$ und $r''_{i,k}$ entsprechen mögen, so erhalten wir in V die Summe der beiden folgenden zur Abkürzung mit A und B bezeichneten Integrale:

$$A = a_{i,i'} \int do_{1,i'} \left(q_{1,k} \frac{3p_1^2 + q\,q_{1,k}^2}{2} \log(s'_{i,k} + r''_{1,k}) + p_1^3 \operatorname{arc\,tg} \frac{p_1\, s''_{1,k}}{q_{1,k}\, r''_{1,k}} \right)$$

und

$$B = \int do_{i'}\, q_{i,k} \frac{s''_{i,k}\, r''_{i,k}}{2}$$

Bezeichnen wir die Coordinaten dieses betreffenden Endpunktes mit $\alpha_{i,k}$, $\beta_{i,k}$, $\gamma_{i,k}$, so wird, abgesehen vom Vorzeichen,

$$s''_{1,k} = (x_1' - \alpha_{1,k}) A_{1,k} + (y_1' + \beta_{1,k}) B_{1,k} + (z_1' - \gamma_{1,k}) C_{1,k}$$

$$r''_{1,k} = \sqrt{(x_1' - \alpha_{1,k})^2 + (y_1' - \beta_{1,k})^2 + (z_1' - \gamma_{1,k})^2}$$

$$p_1 = (A_1 x_1' + B_1 y_1' + C_1 z_1' - D_1]$$

$$q_{1,k} = \lambda x_1' + \mu y_1' + \nu z_1' + \sigma$$

wenn wir zur Abkürzung die λ, μ, ν, σ, die als bekannt gelten, einführen. Diese Grössen setzen wir in A und B ein, wodurch die zu integrirenden Grössen Functionen von x_1', y_1', z_1' und

$$\Re(x_1', y_1', z_1') = \sqrt{(x_1' - \alpha_{1,k})^2 + (y_1' - \beta_{1,k})^2 + (z_1' - \gamma_{1,k})^2}$$

werden. Die ebene Fläche i' ist jetzt in eine endliche Anzahl von durch Grade begrenzten Teilen zu teilen, so dass in jedem Teile das Vorzeichen der Ausdrücke für $q''_{1,k}$, $s''_{1,k}$ ungeändert bleibt Teilen wir nun jeden dieser ebenen Flächenteile von i', über welchen zu integriren ist, durch Ebenen parallel der xz- und yz-Ebene in Elemente

$$do_1' = \frac{dx_1'\, dy_1'}{C_1'}$$

und drücken z_1' vermöge der Gleichung der Ebene i' als Function von x_1', y_1'' durch die Gleichung

Digitized by Google

$$z_1' = \frac{D_1'}{C_1'} - \frac{A_1'}{C_1'} x_1' - \frac{B_1'}{C_1'} y_1'$$

aus, so erhalten wir A als Summe von 2 Integralen von der Form

$$\iint dx_1' dy_1' f(x_1' y_1') \Phi(x_1', y_1' R)$$

wenn $f(x_1', y_1')$ ein ganzer Ausdruck dritten Grades in Bezug auf x_1', y_1' und Φ eine transcendente Function x_1', y_1' und $R(x_1', y_1')$ ist. R sei dabei der Ausdruck, der aus $\Re(x_1', y_1', z_1')$ dadurch hervorgeht, dass man z_1' durch x_1' und y_1' ausdrückt. Hierbei ist über alle Werte von x_1', y_1' zu integriren, welche innerhalb der Projection des betrachteten Flächenteils von i' auf die xy-Ebene liegen. Die Anwendung der teilweisen Integration ergiebt, wenn wir die Integration nach y_1' ausführen wollen, und wenn

$$\int f(x_1', y_1') dy_1' = \psi(x_1', y_1') \quad \text{ist:}$$

$$A = \Sigma \int dx_1' \left[\psi \Phi - \int dy' \psi \frac{\partial \Phi}{\partial y_1'} \right]$$

Da aus $\frac{\partial \Phi}{\partial y_1'}$ die transcendenten Functionen log und arctg verschwinden, so erhalten wir unter dem Integralzeichen eine rationale Function von x_1', y_1' und $R(x_1' y_1'))$, die sich nach den bekannten Regeln der Integration durch Einführung einer neuen Integrationsvariablen rational machen lässt. Die Integration der so erhaltenen rationalen Function bietet keine principiellen Schwierigkeiten. Dass in B eine rationale Function von x_1'. y_1' und R auftritt, sieht man sofort. Wir können also auch bei B eine Integration ausführen. Dieselben Betrachtungen gelten auch für den andern Endpunkt der Kante der Seitenflächen i und k, dem die Grössen $s'_{i,k}$ und $r_{i,k}$ entsprechen mögen. Summiren wir jetzt diese Integrationsausdrücke über alle Kanten der Seitenfläche i und erstrecken dann die Summation über sämtliche Flächen i und schliesslich über sämtliche Flächen i' des Systems m', so werden wir den Ausdruck des Potentials der beiden Polyeder in Gestalt eines einfachen Integrals erhalten.

Was die Bestimmung der Attraction eines homogenen Polyeders und eines homogenen dreiaxigen Ellipsoids aufeinander anbelangt, so kann zunächst dieses letztere nach dem Maclaurin'schen Satze durch die in der Ebene der grösseren und mittleren Axe liegende confocale elliptische Scheibe ersetzt werden, deren Dichtigkeit im Elemente $d\omega$ durch die Gleichung

Digitized by Google

$$\varphi(x, y) = \frac{2abc}{\sqrt{(a^2-b^2)(b^2-c^2)}} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2-c^2} - \frac{y^2}{b^2-c^2}} \quad \ldots \; a > b > c$$

gegeben wird, wenn das feste Coordinatensystem der x, y, z mit den 3 Axen a, b, c des Ellipsoids zusammenfällt. Mithin kann V in der Form des fünffachen Integrals

$$V = \int \frac{dm\, d\omega}{r} \cdot \varphi(x, y)$$

geschrieben werden, wo die Integration über die elliptische Scheibe und über das Polyeder m zu erstrecken ist. Da nun $\int \frac{dm}{r}$ das Potential des homogenen Polyeders auf die an dem Orte des Elements $d\omega$ concentrirt gedachte Masseneinheit ist, und da sich ferner dieses Potential als geschlossener Ausdruck darstellen lässt, in welchem dieselben transcendenten Functionen wie bei der Attraction zweier homogenen Polyeder, multiplicirt mit ganzen rationalen Functionen der Coordinaten, auftreten, so erhält man V schliesslich in Gestalt eines Doppelintegrals.

Für ein verlängertes Rotationsellipsoid $a > b$, $b = c$ ergiebt sich V unmittelbar als einfaches Integral, da in diesem Falle die elliptische Scheibe in das zwischen den beiden Brennpunkten enthaltene Stück der x-Axe übergeht, dessen Dichtigkeit im Punkte x, 0, 0 gleich

$$\frac{ac^2\pi}{\sqrt{a^2-c^2}} \left(1 - \frac{x^2}{a^2-c^2}\right)$$

also ein ganzer Ausdruck zweiten Grades von x ist

Wenn dann in ähnlicher Weise wie bei zwei homogenen Polyedern die teilweise Integration angewandt wird, lässt sich in V auch noch die letzte Integration ausführen.

Digitized by Google

V.

Eine Hypothese über das Gesetz der Dichtigkeit im Innern der Erde.

Von

Emil Oekinghaus.

Die Frage, in welcher Art und Grösse die Dichtigkeit im Innern der Erde nach dem Mittelpunkt hin sich ändert, ist wie es scheint, schon oft gestellt worden, ohne befriedigend gelöst worden zu sein. Ob überhaupt eine Möglichkeit vorhanden ist, diese Frage endgültig zu beantworten, steht um so mehr dahin, als uns über die Zusammensetzung und Verschiedenheiten der Massen sowie über die Zunahme der Temperatur, Druck, Veränderung des Aggregatzustandes des Erdinnern nichts bekannt ist, indem die Tiefen, bis wohin man die Bohrlöcher gebracht hat, in keinem Verhältniss stehen zu dem Erdhalbmesser.

Die folgenden Bemerkungen bezwecken auch durchaus nicht die definitive Lösung der Aufgabe; sie sollen vielmehr nur einen problematischen Versuch dazu bilden, und insofern wäre auch unsere Bearbeitung gegenstandslos und überflüssig, da ein directer Beweis durch Beobachtung nicht erbracht werden kann. Der Reiz aber, den das Unbekannte ausübt, wird wol immer als Entschuldigung dafür dienen können, wenn man einmal, das Bekannte verlassend, am Ariadnefaden einer Hypothese sich in die labyrinthischen Räume des Unbekannten hineinwagt.

Der Hauptgegenstand indessen, der mich bestimmte, einige Rechnungen hierüber mitzuteilen, war die vollständige Uebereinstimmung derselben mit den Versuchen und Resultaten, welche der

Digitized by Google

englische Astronom Airy im Jahre 1854 in der Kohlengrube Harton bei Newcastle zwecks Bestimmung der mittleren Erddichte erhalten hat.

Auf Grund der Ansicht, dass die Dichtigkeit der Erdschichten nach dem Mittelpunkt hin stetig zunehme, muss die wachsende Beschleunigung der Schwere eine Beschleunigung der Oscillationen des Pendels hervorbringen. Vermittelst des elektrischen Telegraphen ergaben die Vergleiche im Gang des oberen und unteren Pendels für letzteres eine Beschleunigung von $2^1/_4$ Secunden pro Tag in einer Tiefe von $383\,m$. Diesen Bestimmungen gemäss fand Airy für die mittlere Dichtigkeit der Erde den Wert 6,566.

Wir nehmen an, dass analog dem durch eine Exponentialfunction sich darstellende Gesetz der Dichtigkeit der Atmosphäre das Gesetz der Dichtigkeit der concentrisch gelagerten Erdschichten sich ebenfalls durch eine entsprechende Function darstellen lasse. Dieselbe sei

$$1) \qquad \delta = D e^{-kx^3}$$

Hierin bedeute δ die Dichte in der Kugelschicht vom Halbmesser x, D diejenige des Erdkerns, k eine Constante, x sei in Teilen des Erdhalbmessers $a = 1$ ausgedrückt.

Die Masse der Kugel vom Radius x ist demnach

$$M_x = 4\pi D \int_0^x e^{-kx^3} x^2 dx$$

also

$$2) \qquad M_x = \tfrac{4}{3}\pi \frac{D}{k}(1 - e^{-kx^3})$$

Die Gesamtmasse der Erde ist folglich

$$3) \qquad M = \tfrac{4}{3}\pi \frac{D}{k}(1 - e^{-k})$$

Wenn nun die mittlere Dichte der Erde $= \varrho$ ist, so folgt vermöge $M = \frac{4}{3}\pi\varrho$ aus den beiden letzten Bestimmungen

$$4) \qquad \varrho = \frac{D}{k}(1 - e^{-k})$$

und bezeichnet noch δ_o die Dichte der obersten Schicht, so gewinnt man vermöge

Digitized by Google

5) $$\delta o = De^{-k}$$

die Relation

6) $$\varrho = \frac{\delta o}{k}(e^k - 1)$$

Um die Beschleunigungen zu finden, welche die Kugeln vom Halbmesser x und 1 auf einen Punkt ihrer Oberflächen ausüben, haben wir gemäss der Attractionstheorie die Massen derselben durch das Quadrat ihrer Radien zu dividiren. Man hat also

$$g_x : g = \frac{1 - e^{-kx^3}}{x^2} : \frac{1 - e^{-k}}{1^2}$$

7) $$\frac{g_x}{g} = \frac{1 - e^{-kx^3}}{x^2(1 - e^{-k})}$$

Die Pendelformel

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

zeigt nun, dass die Quadrate der Schwingungszeiten gleichlanger Pendel sich umgekehrt wie die Beschleunigungen an den Beobachtungsorten verhalten. Es ist also

8) $$\frac{t^2}{t_x^2} = \frac{g_x}{g}$$

und vermöge der vorhergehenden Relation

9) $$\frac{t^2}{t_x^2} = \frac{1 - e^{-kx^3}}{x^2(1 - e^{-k})}$$

Wir differentiiren diese Gleichung in der Form

$$t_x^2(1 - e^{-kx^3}) = Cx^2$$

und erhalten

$$2(1 - e^{-kx^3}) t_x \frac{dt_x}{dx} + 3kt_x^2 x^2 e^{-kx^3} = 2Cx$$

d. i.

10) $$\frac{x}{t_x}\frac{dt_x}{dx} + \frac{3}{2}\frac{kx^3}{(e^{kx^3} - 1)} = 1$$

Da aber die durchbrochene Schicht des 385 m tiefen Schachtes nur 1/16621,7 des Erdhalbmessers beträgt, so können wir auch noch für weit grössere Tiefen den letzten Ausdruck vereinfachen in

11) $$\frac{dt}{t\,dx} = 1 - \frac{3}{2}\frac{k}{e^k - 1}$$

Digitized by Google

dx bedeutet die Zunahme von x nach Aussen, dt die Zunahme der Oscillationsdauer des Pendels im Punkte x.

Bezeichnen wir daher mit Δy die Tiefe des Schachtes und mit Δt die Abnahme der Oscillationszeit in dieser Tiefe, so ist

12) $$\frac{\Delta t}{t\,\Delta y} = 1 - \tfrac{3}{2}\frac{\delta o}{\varrho}$$

Da aber nach den Bestimmungen Airy's

$$\Delta y = \frac{1}{16621{,}7}$$

ist, so erhalten wir nach Einsetzung dieses Ausdruckes und

$$\frac{\Delta t}{t} = \frac{2^1/_4}{86\,400}$$

in die obige Formel die Relation

$$\frac{\delta o}{\varrho} = \tfrac{3}{2}\left(1 - \frac{\Delta t}{t\,\Delta y}\right) = \tfrac{3}{2}\left(1 - 16621{,}7 \cdot \frac{2^1/_4}{86\,400}\right) = \tfrac{3}{2}(1 - 0{,}4328)$$

oder

$$\frac{\delta o}{\varrho} = 0{,}3781$$

welches das Verhältniss ausdrückt zwischen der Oberflächendichte und der mittleren Erddichte.

Da nun die Dichtigkeit der oberen Schicht zu 2,5 bestimmt wurde, so erhalten wir endlich als mittlere Dichte der Erde

13) $$\varrho = 6{,}61$$

ein Resultat, welches von dem Werte Airys

$$\varrho = 6{,}566$$

nur wenig abweicht.

Wenn man nun in der gefundenen Zahl nicht ein Spiel des Zufalls erblicken will, der ja allerdings nicht ausgeschlossen ist, so wird man immerhin das zu Anfang definirte Gesetz der Zunahme der Dichtigkeit als möglicherweise der Wahrheit sehr nahe kommend anerkennen können.

Man bemerke, dass in der Bedingungsgleichung für die obersten Schichten der Ausdruck k nicht vorkommt.

Um denselben zu bestimmen, benutzen wir zunächst den Ausdruck

Digitized by Google

14) $$\frac{\varrho}{\delta o} = \frac{e^k - 1}{k}$$

eine in Bezug auf k transcendente Gleichung. Man findet

$$k = 1{,}707$$

Damit kann man endlich noch die Dichte des Mittelpunkts der Erde berechnen. Vermittelst der Formel

$$D = \delta o\, e^k$$

folgt

15) $$D = 13{,}78$$

ein Wert, welcher das specifische Gewicht des Quecksilbers um ein Geringes übertrifft.

Die Dichte in einer beliebigen Entfernung vom Mittelpunkte ist demnach

16) $$\delta = 13{,}78\, e^{-1{,}707 x^2}$$

Die Bestimmung der Constanten dieser Gleichung beruhte lediglich auf den Beobachtungsarten Airy's, und die Gleichung kann als Ausdruck des Gesetzes für den Fall gelten, dass diese Werte auf der ganzen Erdoberfläche dieselben sind. Hierüber liegen aber nur wenig Beobachtungstatsachen vor.

Indessen sind in neuerer Zeit Untersuchungen über Schwerebestimmungen in verschiedenen Tiefen durch v. Sterneck in Adalbertschacht des Silberbergwerkes in Pribram (1883) und im Abrahamschachte bei Freiberg (1885) in Sachsen angestellt worden. Die Beobachtungen ergeben, dass die Schwere im Innern der Erde grösser ist, als an der Oberfläche, dass aber die Zunahme an den verschiedenen Orten sehr verschieden sei. In Harton nimmt sie bei 383 m Tiefe ebensoviel zu, als in Pribram bei 623 m und in Freiberg bei etwa 400 m.

Es wäre demnach sehr wünschenswert, wenn diese Versuche an recht vielen Punkten des Erdballs fortgesetzt würden, um durch eine Reihe von Beobachtungswerten den mittleren Wert Δt festzustellen, welcher einer bestimmten Tiefe Δy, etwa gleich 500 m, annähernd entspricht. Wie es scheint, muss die Tiefe, welche der Hartoner Zeit von $2^1/_4$ Secunden entspricht, im allgemeinen grösser angenommen werden. Unter der Voraussetzung, dass die Oberflächendichte überall die gleiche sei, nämlich 2,5 wollen wir für Δy die mittlere Tiefe von 500 m in Teilen des Radius zu Grunde legen,

Digitized by Google

da dieselbe für $\Delta t = 2^1/_4$ gleicher Schwerezunahme den Tiefen $400\,m$ und 623 ungefähr im Mittel entsprechen dürfte.

Setzt man diese Werte in 12) ein, so erhalten wir als mittlere Dichte

17) $$\varrho = 5{,}6$$

einen Wert, welcher den aus andern Beobachtungen und Berechnungen abgeleiteten Werten von ϱ sehr nahe kommt.

Die Dichte des Erdmittelpunkts ist nun wegen $k = 1{,}4$

18) $$D = 10{,}375$$

also etwas kleiner und wahrscheinlich genauer, als der erste Wert.

Die gefundene Zahl entspricht ungefähr dem specifischen Gewicht des Silbers.

Diese Zahlen dürften es möglich erscheinen lassen, dass die oben angenommene mittlere Tiefe von $500\,m$ anstatt der des Hartoner Schachtes von $383\,m$ in Bezug auf gleiche und dem letzteren entsprechende Schwerezunahme gewählt werden muss. Hierüber können indessen nur Beobachtungen entscheiden.

Die Beschleunigung in der Kugelschicht vom Radius x ist

$$\frac{g_x}{g} = \frac{1 - e^{-kx^3}}{x^2(1 - e^{-k})}$$

Dieselbe ist im Mittelpunkt = null. Sie erleidet von aussen nach innen zuerst eine Zunahme, dann eine Abnahme. Ihren Maximalwert erhält man aus der differentiirten Gleichung, er ergiebt sich aus

19) $$e^u = \tfrac{3}{2}u + 1, \quad u = kx^3$$

$$u = 0{,}768$$

woraus $$x = 0{,}818 \quad \text{folgt.}$$

Der grösste Wert der Beschleunigung liegt also der Oberfläche verhältnismässig nahe, da der betreffende Radius $^4/_5$ des Erdhalbmessers ist. Die Berechnung des entsprechenden Wertes von g_x ergiebt $10{,}31\,m$ in der Tiefe von weniger als $^1/_5$ des Erdhalbmessers. Von da an nimmt sie wieder ab. Der Ort, wo sie wieder dem Werte von g an der Oberfläche gleich ist, ergiebt sich aus

20) $$1 - e^{-kx^3} = x^2(1 - e^{-k})$$

$$x = 0{,}605$$

Digitized by Google

Diese Verhältnisse werden erklärlicher, wenn man die Dichtigkeitscurve

21) $$y = De^{-kx^3}$$

construirt. Man hat zunächst

$$\frac{dy}{dx} = -3kDx^2e^{-kx^3}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 3kDx(3kx^3 - 2)e^{-kx^3}$$

Hieraus erkennt man, dass die Curve einen Wendepunkt besitzt, bestimmt durch

$$x^3 = \frac{2}{3k}$$

$$x = 0{,}723$$

Von aussen nach innen gerechnet steigt also die Dichtigkeit sehr rasch. Bis zu der Tiefe von ungefähr stark $^1/_4$ des Erdhalbmessers wächst die Dichtigkeit von 2,5 auf 5,3, also auf fast die mittlere Dichtigkeit, was die rasche Zunahme der Beschleunigung erklärlich macht.

Von Interesse ist noch die Bestimmung des Maximums der Schwere. Die Schwere eines *cdm* Wasser ist an der Oberfläche $1\,kg$. Im Mittelpunkt ist die Schwere null. Dieselbe hängt nämlich von der Masse und der entsprechenden Beschleunigung ab und ist

$$= mg$$

oder, da δ die Masse in der Volumeneinheit ist

$$= \delta \,.\, g_x$$

Hiernach haben wir folgendes Verhältniss der Schwere oder des Druckes einer Volumeneinheit in einem Punkte x im Vergleich zur Schwere an der Oberfläche

22) $$\frac{m_x g_x}{mg} = \frac{1 - e^{-kx^3}}{x^3(1 - e^{-k})} e^{k(1-x^3)}, \quad mg = 2{,}5\,kg = \delta o$$

Hieraus ergiebt sich unmittelbar, dass die Schwere im Mittelpunkt ($x = 0$) = null ist. Es ist also möglich, dass auch hier ein Maximalwert existirt. Wir differentiiren die Gleichung und erhalten als Bedingungsgleichung

Digitized by Google

23) $$e^u = \frac{1+3u}{1+\frac{3}{2}u}, \quad kx^3 = u, \quad k = 1{,}4$$

woraus

$$u = 0{,}231$$

und

$$x = 0{,}5485$$

Das Maximum der Schwere liegt also ungefähr in der Mitte des Erdhalbmessers.

Das obige Verhältniss wird nun

24) $$\frac{\frac{3}{2}(1+\frac{3}{2}u)\,u\,e^k}{x^2(1+3u)^2(1-e^{-k})} \quad \text{d. i.} = 3.$$

Hiernach ist die Schwere oder der Druck eines bestimmten Volumens in dem bezeichneten Orte dreimal so gross als der eines gleichen Volumens an der Erdoberfläche.

In der oberen Hälfte des Radius wächst also die Schwere beträchtlich nach der Mitte zu an, worauf sie dann wieder bis zum Centrum abnimmt. Wir wollen noch das Gewicht des ganzen Erdballs bestimmen. Ist der Radius einer Kugel $= a = 1$ und ϱ ihre mittlere Dichtigkeit, so ist ihr Gewicht, wenn alle Teile gleich schwer sind

$$G_1 = 4\pi \int_0^a \varrho r^2\, dr = \tfrac{4}{3}\pi a^3 \varrho = \tfrac{4}{3}\pi\varrho$$

Sind dagegen die Teile nicht gleich schwer, aber gleichförmig dicht, so ist, wenn die Attraction dem Abstand vom Centrum proportional ist,

$$G_2 = 4\pi \int_0^a \varrho r^2 \cdot \frac{r}{a}\, dr = \pi\varrho a^3 = \pi\varrho$$

also kleiner.

Führen wir nun für ϱ ein

$$\delta = De^{-kx^2}$$

so folgt zunächst vermöge 22)

25) $$G_3 = \frac{4\pi\delta o e^k}{1-e^{-k}} \int_0^1 (e^{-kx^2} - e^{-2kx^2})\, dx$$

oder

Digitized by Google

$$G_3 = \frac{\pi\delta ok e^k}{1-e^{-k}}\left(1-\frac{4}{1\,.\,2}\frac{(2^2-1)k}{7}+\frac{4}{1\,.\,2\,.\,3}\frac{(2^3-1)k^2}{10}\right.$$
$$\left.-\frac{4}{4!}\frac{(2^4-1)k^3}{13}+\frac{4}{5!}\frac{(2^5-1)k^4}{16}\ldots\right)$$

Hieraus folgt der Wert

$$G_3 = 7{,}07\,\pi$$

welcher von dem mittleren Werte

$$G_1 = \tfrac{4}{3}\pi\varrho = 7{,}46\,\pi$$

wenig verschieden ist.

Laplace entwickelt im II. Band seiner Mechanik des Himmels eine Differentialgleichung 2 Ordnung, vermittelst welcher die Abplattung des Erdsphäroides bestimmt werden kann, wenn das Gesetz der Dichtigkeit der Erde bekannt ist.

Sie kann in folgender Form aufgestellt werden:

26) $$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{6kx^2e^{-kx^3}}{1-e^{-k}}\frac{dy}{dx}-\frac{6y}{x^2}\left(1-\frac{kx^3e^{-kx^3}}{1-e^{-k}}\right)=0$$

Ist hieraus y bestimmt, so folgt die Abplattung der Erde bis auf Grössen 2. Ordnung genau vermittelst

27) $$p = \frac{1/289\,y}{2y-\dfrac{6k}{5(1-e^{-k})}\displaystyle\int_0^1 e^{-kx^3}d(yx^5)}$$

Führt man ein

28) $$y = Ax^3-Bx^6+Cx^9-Dx^{12}+\ldots$$

worin A als Constante des Integrals $= 1$ angenommen werden darf, so erhält man folgende Bedingungsgleichung zwischen den Coefficienten

$$(5\,.\,6-6)B-(8\,.\,9-6)Cx^3+(11\,.\,12-6)Dx^6$$
$$-14\,.\,15-6)Ex^9+\ldots=-6B\left(1-kx^3+\frac{k^2x^6}{1\,.\,2}-\frac{k^3x^9}{3!}+\ldots\right)$$
$$\times(4-7Bx^3+10x^6-13Dx^9\ldots)$$

und man gewinnt der Reihe nach die Werte

$$B = \frac{k}{1-e^{-k}}$$

$$C = \frac{B}{11}(7B+4k)$$

Digitized by Google

$$D = \frac{B}{21}(10C + 7kB + 2k^2)$$

$$E = \frac{B}{34}(13D + 10kC + \tfrac{7}{2}Bk^2 + \tfrac{2}{3}k^3)$$

$$F = \frac{B}{50}(16E + 13kD + 5k^2C + \tfrac{7}{6}k^3B + \tfrac{1}{6}k^4)$$

Da indessen die Reihe 28) für $k = 1{,}4$ divergirt, so ist die Reihenform unzulässig und es ist deshalb schwierig, den Wert von y und damit den obigen Ausdruck für p zu erhalten. Man sieht aber, dass es von besonderem Interesse sein würde, einen theoretischen Wert von

$$p = \frac{a - b}{a}$$

aus den obigen Gleichungen herzuleiten und denselben mit dem bekannten zu vergleichen. Vielleicht ist es nicht ausgeschlossen, dass auf anderem Wege dennoch eine Lösung gefunden werden kann, wenn sie in Angriff genommen wird.

Digitized by Google

VI.

Ueber successive Fusspunktspolygone.

Von

H. Schotten, Dr. ph.

In Jahrgang 34 p. 311 der Zeitschrift für Mathematik und Physik habe ich eine Verallgemeinerung des bekannten Simson'schen Satzes nach der Richtung hin veröffentlicht, dass es sich nicht um Lote, sondern um Gerade handelt, die unter einem beliebigen, aber bestimmten Winkel gegen die Seiten des Dreiecks geneigt sind. Der verallgemeinerte Satz lautet: „Zieht man von einem Punkte des einem Dreieck umbeschriebenen Kreises unter beliebigem, aber gleichem Winkel Strahlen nach den drei Seiten, so liegen die Durchschnittspunkte auf einer Geraden." Es ergab sich, dass in diesem Falle zwei Gerade resultiren, die für den Specialfall des Simsonschen Satzes in eine zusammenfallen. Zugleich wurde auf einige Folgerungen näher eingegangen und auf den Zusammenhang mit früheren Arbeiten von mir hingewiesen [1]).

In den folgenden Zeilen handelt es sich um eine anderweite Verallgemeinerung des Simson'schen Satzes, worin eine Ausdehnung auf Polygone gewonnen wird.

1) Ueber einige bemerkenswerte Gattungen der Hypocykloiden. — Inaug.-Diss. Marburg 1883. Ueber Fusspunktscurven. — Progr. — Hersfeld 1887.

Allgemeiner Satz: Fällt man auf die Seiten eines Sehnen-n-ecks Lote von einem Punkte P des Umkreises, so resultirt als Fusspunktenfigur ein n-eck mit einer einspringenden Ecke; fällt man wiederum (von demselben Punkte P aus) auf die Seiten dieses Fusspunkten-n-ecks Lote, so resultirt als zweite Fusspunktenfigur ein n eck mit zwei einspringenden Ecken u. s. f. Ist die Zahl der überhaupt möglichen einspringenden Ecken erreicht, so ergibt sich schliesslich als Fusspunktenfigur (immer denselben Punkt P als Pol vorausgesetzt) eine Gerade. Führt man diese Construction für P_1 und P_2 als Pole aus, unter der Voraussetzung, dass P_1 und P_2 Gegenpunkte des Umkreises sind, so sind die resultirenden beiden Geraden

1) parallel, wenn n gerade ist,

2) senkrecht zu einander, wenn n ungerade ist.

Da die Zahl der möglichen einspringenden Ecken $(n-3)$ beträgt, so hat man $(n-2)$ mal die Construction der Fusspunktenfigur auszuführen, bis man die Gerade erhält.

Von diesem allgemeinen Satze ist der bekannte Simson'sche Satz ein Specialfall: und es leuchtet ein, dass auch der von mir jetzt aufgestellte Satz ebenso noch der Erweiterung fähig ist, wie der Simson'sche, nämlich nach der Richtung hin, wie dies l. c. von mir geschehen ist. Die im Simson'schen Falle einem Paar Gegenpunkte entsprechenden Geraden — ein sogenanntes Paar — stehen senkrecht zu einander. Die Zahl der möglichen einspringenden Ecken ist hier 0, die Anzahl der Constructionen daher eins; und die senkrechte Lage von $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ folgt, weil n ungerade ist. Einer besonderen Figur wird es für diesen Fall nicht bedürfen.

Es sei gestattet, noch weitere Specialfälle zu betrachten.

1) Das Viereck. — Es sei in Figur 1) $ABCD$ das gegebene Viereck; Z der Mittelpunkt des Umkreises; P_1 und P_2 seien zwei Gegenpunkte des Kreises und die Pole für die Construction der Fusspunktenpolygone resp. der Geraden. Die dem Pole P_1 entsprechenden Punkte tragen ebenfalls den Index 1; die P_2 entsprechenden den Index 2; es ist also $E_1 F_1 G_1 H_1$ das dem Pole P_1 entsprechende Fusspunktenviereck von $ABCD$ und $\mathfrak{G}_1$ die zugehörige Gerade, während das Fusspunktenviereck $E_2 F_2 G_2 H_2$ und die Gerade $\mathfrak{G}_2$ dem Pole P_2 entsprechen. Mit Hülfe congruenter Dreiecke lässt sich leicht nachweisen, dass

Digitized by Google

$$AE_1 = BE_2, \quad BF_1 = CF_2, \quad CG_1 = DG_2, \quad DH_1 = AH_2,$$

es ergibt sich sofort, dass auch

$$AE_2 = BE_1, \quad BF_2 = CF_1, \quad CG_2 = DG_1, \quad DH_2 = AH_1$$

ist. E_1 und E_2 liegen demnach symmetrisch gegen A und B, F_1 und F_2 gegen B und C, G_1 und G_2 gegen C und D, H_1 und H_2 gegen D und A. Je zwei, wie z. B. E_1 und E_2 liegen gleichweit von Z entfernt. Die Zahl der möglichen einspringenden Ecken ist 1, die Anzahl der Constructionen also 2; das resultirende Paar ist parallel, da n gerade ist.

2) Das Fünfeck. — Es sei in Fig. 2) $ABCDE$ das gegebene Fünfeck; Z der Mittelpunkt des Umkreises; P_a und P_b seien zwei Gegenpunkte des Kreises und die Pole für die Constructionen. Die dem Pole P_a entsprechenden Punkte tragen ebenfalls den Index a und daneben die der Construction entsprechende Ziffer. Demgemäss werden die dem Pole entsprechenden Fusspunktspolygone F_{a_1} G_{a_1} H_{a_1} J_{a_1} K_{a_1}, F_{a_2} G_{a_2} H_{a_2} J_{a_2} K_{a_2}, während die zugehörige Gerade mit $\mathfrak{G}_a$ bezeichnet ist; dem Pole P_b entsprechen die Fusspunktspolygone F_{b_1} G_{b_1} H_{b_1} J_{b_1} K_{b_1} und F_{b_2} G_{b_2} H_{b_2} J_{b_2} K_{b_2} sowie die Gerade $\mathfrak{G}_b$. — Die Zahl der möglichen einspringenden Ecken ist 2, die Anzahl der Constructionen 3 (rechnet man die resultirende Gerade als Fusspunktsfigur mit, so ist deren Anzahl gleich der Anzahl der Constructionen). Im Uebrigen finden analoge Beobachtungen über die symmetrische Lage der neuen Ecken statt wie beim Viereck. Das resultirende Paar steht senkrecht zu einander.

Es erübrigt noch in dieser vorläufigen Notiz die Frage zu berühren, welche Abweichungen vom allgemeinen Fall eintreten, wenn P besondere Lagen einnimmt. Es ergibt sich, dass, wenn P mit einer Ecke des Sehnenpolygons zusammenfällt, die Constructionen sich wesentlich vereinfachen, während allerdings ihre Anzahl unverändert bleibt. Die Fusspunktenfiguren haben in diesem Falle immer mindestens eine Ecke weniger: die einspringenden Ecken fallen auf jeden Fall jedesmal fort. So gelangt man beim Fünfeck, wenn der Pol mit einer Ecke zusammenfällt, erst zu einem Viereck, dann zu einem Dreieck, schliesslich zu einer Geraden, die in diesem Falle dann immer mit einer Ecke der Fusspunktspolygone zusammenfällt und auch auf der resultirenden Geraden liegt, oder mit andern Worten, wenn der Pol mit einer Ecke des gegebenen n-ecks zusammenfällt, so enthält die resultirende Gerade den Pol. Führt man die Constructionen bei einem regelmässigen $2n$-eck aus, so fallen die

Digitized by Google

beiden Parallelen, die einem Paar Gegenpunkte entsprechen, also ein sogenanntes Paar bilden, in eine zusammen. Ferner zeigen auch im allgemeinen Falle die Fusspunktsfiguren, die zum Gegenpunkte eines solchen Poles gehören, besondere Beziehungen.

Die weitere Bearbeitung dieses Problems, besonders die Untersuchung der Beziehungen zwischen den verschiedenen Fusspunktsfiguren und die Untersuchung der Enveloppe der resultirenden Geraden, wenn P alle Punkte des Umkreises durchläuft; ferner die Erweiterung, dass die Strahlen nicht rechtwinklig, sondern unter beliebigem, aber festem Winkel gegen die Seiten gezogen werden; endlich die Ausdehnung des Problems auf Curven, sowie die Feststellung des Zusammenhangs dieser Untersuchungen mit den Steinerschen bleibt späterer Bearbeitung vorbehalten.

Schmalkalden, den 4. October 1892.

Digitized by Google

VII.

Einaxige Polyeder von kleinster Oberfläche bei constantem Inhalt.

Von

R. Hoppe.

Unter einem einaxigen Körper sei ein Körper verstanden, der sich durch $n \geqq 3$ Ebenen, die sich in einer Geraden, der Axe, schneiden, in n congruente Sectoren, bestehend aus je 2 symmetrischen Hälften, zerlegen lässt, so dass die Grenzflächen der benachbarten Sectoren einander decken.

Ferner sollen 2 Polyeder mit gleichvielen Ecken gleichgeordnet heissen, wenn nur entsprechende Ecken durch Kanten verbunden sind.

Demgemäss heisse ein Polyeder einaxig geordnet, wenn es einem einaxigen Polyeder gleichgeordnet ist.

Wird nun ein Polyeder, das aus 2 symmetrischen Hälften besteht, in ein gleichgeordnetes von gleichem Inhalt unendlich wenig deformirt, so wird seine Oberfläche, wofern sie nicht constant ist, stets vergrössert. Auf einen Beweis dieses Satzes gehen wir nicht ein, da er bloss die Auswahl von Polyedern motiviren soll. Da nämlich die Grenzebenen der Sectoren einaxiger Polyeder, sowie die ihrer Hälften Symmetrieebenen des ganzen Polyeders sind, so folgt, dass das Minimum der Oberfläche eines einaxig geordneten Polyeders einem einaxigen Polyeder zukommt. Alle Resultate der Untersuchung einaxiger Polyeder in Bezug auf ihre Minimaloberfläche lassen sich

Digitized by Google

also sofort auf ihre gleichgeordneten anwenden, und wenn überdies das Polyeder von einer die Axe normal schneidenden Ebene symmetrisch geteilt wird, so gilt dasselbe Minimum auch für alle symmetrisch und gleich geordneten Polyeder.

Im Folgenden will ich die einfachsten Polyeder, nämlich Prisma, Pyramide und deren Zusammensetzungen, welche mutmasslich schon berechnet worden sind, nur resultatweise mitaufführen und zu diesen noch das Prismatoid nebst seinen Zusammensetzungen mit den vorigen samt Berechnung hinzufügen. Es sei stets vorausgesetzt, dass jede Symmetrie, die bei den untersuchten Polyedern stattfindet, bei allen Variationen erhalten bleibt. Zur gleichmässigen Bezeichnung sei P Inhalt, F Oberfläche des Polyeders, $\lambda = \frac{n}{4}$ Rechten,

$$B = \frac{n}{4} a^2 \cot 2\lambda$$

ein regelmässiges $n$eck von der Seite a.

I. Prisma von von der Höhe h über der Basis B.

$$P = \frac{n}{4} a^2 h \cot 2\lambda; \quad F = n a \left(h + \frac{a}{2} \cot 2\lambda \right)$$

für kleinstes F bei constantem P

$$h = a \cot 2\lambda; \quad P = \frac{n}{4} a^3 \cot^2 2\lambda; \quad F = \frac{3n}{2} a^3 \cot 2\lambda$$

für $P = 1$

$$F = 3 (2n \operatorname{tg} 2\lambda)^{\frac{1}{3}}.$$

II. Pyramide von der Höhe h über der Basis B.

$$P = \frac{n}{12} a^2 h \cot 2\lambda; \quad F = \frac{n}{4} a (a \cot 2\lambda + 2q_1)$$

$$q_1^2 = \frac{a^2}{4} \cot^2 2\lambda + h^2$$

für kleinstes F bei constantem P

$$h = \sqrt{2}\, a \cot 2\lambda; \quad P = \frac{n}{6\sqrt{2}} a^3 \cot^2 2\lambda; \quad F = n a^3 \cot 2\lambda$$

für $P = 1$

$$F = 2 (9n \operatorname{tg} 2\lambda)^{\frac{1}{3}}.$$

III. Doppelpyramide von der Höhe $h + h$ über und unter der Basis B.

Digitized by Google

$$P = \frac{n}{6} a^3 h \cot 2\lambda; \quad F = n a q_1 \quad (q_1 \text{ wie in II.})$$

für kleinstes F bei constantem P

$$h = \frac{a}{\sqrt{2}} \cot 2\lambda; \quad P = \frac{n}{6\sqrt{2}} a^2 \cot^2 2\lambda; \quad F = \frac{n\sqrt{3}}{2} a^2 \cot 2\lambda$$

für $P = 1$

$$F = 3 (n\sqrt{3} \operatorname{tg} 2\lambda)^{1/3}$$

IV. Prisma von der Höhe h auf der Basis B mit 1 pyramidalen Aufsatz von der Höhe k auf der Endfläche.

$$P = \frac{n}{12} a^2 (3h + k) \cot 2\lambda; \quad F = n a \left(h + \frac{a}{4} \cot 2\lambda + \tfrac{1}{2} q \right)$$

$$q^2 = \tfrac{1}{4} a^2 \cot^2 2\lambda + k^2 \qquad (1)$$

für kleinstes F bei constantem P

$$h = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}} a \cot 2\lambda; \quad k = \frac{a}{\sqrt{5}} \cot 2\lambda$$

$$P = n \frac{3+\sqrt{5}}{24} a^3 \cot^2 2\lambda; \quad F = n \frac{3+\sqrt{5}}{4} a^2 \cot 2\lambda$$

für $P = 1$

$$F = \{qn(3+\sqrt{5}) \operatorname{tg} 2\lambda\}^{1/3}$$

V. Prisma von der Höhe h auf der Basis B mit 2 pyramidalen Aufsätzen von der Höhe k auf beiden Endflächen.

$$P = \frac{n}{12} a^2 (3h + 2k) \cot 2\lambda; \quad F = n a (h + q) \quad (q \text{ wie in IV.})$$

für kleinstes F bei constantem P

$$h = k = \frac{a}{\sqrt{5}} \cot 2\lambda$$

$$P = \frac{n\sqrt{5}}{12} a^3 \cot^2 2\lambda; \quad F = \frac{n\sqrt{5}}{2} a^2 \cot 2\lambda$$

für $P = 1$

$$F = (18\sqrt{5} \cdot n \operatorname{tg} 2\lambda)^{1/3}$$

VI. Prismatoid von der Höhe h auf der Basis B.

Ein einaxiges Prismatoid wird eingeschlossen von 2 congruenten regelmässigen $n$ecken als Endflächen B auf 2 parallelen Ebenen im

Digitized by Google

Abstande gleich der Höhe h und mit Mittelpunkten auf der Axe liegend und von $2n$ gleichschenkligen Dreiecken D, deren Grundlinie eine Kante a der einen Endfläche, deren Spitze eine Ecke der andern ist.

Es lässt sich zerlegen in $2n$ congruente sechsseitige Fünfecke, deren jedes aus 2 Tetraedern besteht. Sind A_0, A_2, A_4, . . . die Ecken der einen Endfläche, A_{-1}, A_1, A_3, . . . die der andern, H_0, H_1 die gleich hohen Punkte der Axe, und nimmt man die Axe zur zAxe, die xAxe parallel $H_0 A_0$ durch H_1, so ist die Tabelle der Coordinaten der Ecken jenes Fünfecks:

	x	y	z
A_{-1}	$c\cos 2\lambda$	$-c\sin 2\lambda$	0
A_0	c	0	h
A_1	$c\cos 2\lambda$	$c\sin 2\lambda$	0
H_0	0	0	h
H_1	0	0	0

wo $a = 2c\sin 2\lambda$, und nach absoluten Werten sind jene 2Tetraeder:

$$A_{-1}A_0A_1H_1 = \tfrac{1}{6}\begin{vmatrix} c\cos 2\lambda & -c\sin 2\lambda & 0 \\ c & 0 & h \\ c\cos 2\lambda & c\sin 2\lambda & 0 \end{vmatrix}$$
$$= \tfrac{1}{6}c^2h\sin 2\lambda\cos 2\lambda$$

$$A_0A_1H_0H_1 = \tfrac{1}{6}\begin{vmatrix} c & 0 & h \\ c\cos 2\lambda & c\sin 2\lambda & 0 \\ 0 & 0 & h \end{vmatrix}$$
$$= -\tfrac{1}{6}c^2h\sin 2\lambda$$

Ihre Summe ist das gesuchte Fünfeck, daher, wenn zur Abkürzung

$$\mu = \frac{1+2\cos 2\lambda}{2\cos 2\lambda}$$

gesetzt wird:

$$P = \frac{n}{6}\mu a^2 h\cot 2\lambda$$

Der Mantel von P teilt sich in $2n$ gleichschenklige Dreiecke. Grundlinie ist a, Höhe sei r, Fusspunkt derselben C_0; dann sind dessen Coordinaten:

Digitized by Google

$$x = c\cos 2\lambda; \quad y = 0; \quad z = 0$$

also

$$r^2 = (A_0 C_0)^2 = c^2(1-\cos 2\lambda)^2 + h^2 = \frac{a^2}{4}\operatorname{tg}^2\lambda + h^2 \qquad (2)$$

und der Mantel wird $= nar$, daher nach Addition der 2 Endflächen, d. i. der zwei B

$$F = na\left(r + \frac{a}{2}\cot 2\lambda\right)$$

Bedingungen des constanten P und kleinsten F bei variirenden a und h sind die Gleichungen:

$$a\partial h + 2h\partial a = 0$$

$$(r + a\cot 2\lambda)\partial a + \frac{a}{r}\left(\frac{a\partial a}{4}\operatorname{tg}^2\lambda + h\partial h\right) = 0$$

woraus nach Elimination von ∂h:

$$a^2\operatorname{tg}^2\lambda - 2h^2 + 2ar\cot 2\lambda = 0$$

Diese in h biquadratische Gleichung hat 2 reelle, und unter diesen nur eine positive Wurzel, nämlich:

$$h = \frac{a}{\sqrt{2}}\sqrt{(\operatorname{tg}^2\lambda + \cot^2 2\lambda + x\cot 2\lambda)}$$

$$x^2 = 3\operatorname{tg}^2\lambda + \cot^2 2\lambda$$

Nach Einsetzung erhält man:

$$P = \frac{na^3}{6\sqrt{2}}\mu\cot 2\lambda\sqrt{(\operatorname{tg}^2\lambda + \cot^2 2\lambda + x\cot 2\lambda)}$$

$$F = na^2(\cot 2\lambda + \tfrac{1}{2}x)$$

für $P = 1$

$$F = 2(\cot 2\lambda + \tfrac{1}{2}x)\left\{\frac{9n\operatorname{tg}^2 2\lambda}{\mu^2(\operatorname{tg}^2\lambda + \cot^2 2\lambda + x\cot 2\lambda(}\right\}^{1/3}$$

VII. Prismatoid von der Höhe h auf der Basis B mit 2 pyramidalen Aufsätzen von gleicher Höhe k auf beiden Endflächen.

Hier ist

$$P = \frac{na^2}{6}(\mu h + k)\cot 2\lambda; \quad F = na(r+q) \qquad (3)$$

Bedingungen des kleinsten F bei constantem P sind:

Digitized by Google

$$a(\mu\,\partial h + \partial k) + 2\,\partial a(\mu h + k) = 0$$

$$a\left(\frac{a\,\partial a}{4r}\operatorname{tg}^2\lambda + \frac{h\,\partial h}{r} + \frac{a\,\partial a}{4q}\cot^2 2\lambda + \frac{k\,\partial k}{q}\right) + \partial a(r+q) = 0$$

Nach Elimination von ∂k geben die Coefficienten der unabhängigen ∂h, ∂a:

$$\frac{h}{r} = \frac{\mu k}{q}; \quad \frac{a^2}{4}\left(\frac{\operatorname{tg}^2\lambda}{r} + \frac{\cot^2 2\lambda}{q}\right) + r + q \quad \frac{2k}{q}(\mu h + k) = 0$$

Eliminirt man q und multiplicirt mit r, so kommt:

$$\frac{a^2}{4}\left\{\left(2 + \frac{\mu k}{h}\right)\operatorname{tg}^2\lambda + \frac{h}{\mu k}\cot^2 2\lambda\right\} + \left(\frac{\mu k}{h} - 1\right)h^2 - \frac{2hk}{\mu} = 0$$

Zwischen k und h hat man vermöge Gl. (1) (2) die Relation:

$$\mu^2\left(\frac{a^2}{4h^2}\operatorname{tg}^2\lambda + 1\right) = \frac{a^2}{4k^2}\cot^2 2\lambda + 1 \tag{4}$$

Multiplicirt man die vorige Gleichung mit $\frac{h}{k}$ und eliminirt k^{-2}, so kommt:

$$\frac{\mu h}{k}\left(\frac{a^2}{2}\operatorname{tg}^2\lambda - h^2\right) = -\frac{\mu^2 a^2}{2}\operatorname{tg}^2\lambda - (2\mu^2 - 3)h^2 \tag{5}$$

Hiervon das Quadrat gibt nach Einsetzung des Wertes von k^{-2}:

$$a^2\left\{\frac{\mu^2 a^2}{2}\operatorname{tg}^2\lambda + (2\mu^2 - 3)h^2\right\}^2 =$$

$$\mu^2\left(\frac{a^2}{2}\operatorname{tg}^2\lambda - h^2\right)^2\{\mu^2 a^2\operatorname{tg}^2\lambda + 4(\mu^2 - 1)h^2]\operatorname{tg}^2 2\lambda$$

Sind h_1^2, h_2^2, h_3^2 die Wurzeln dieser kubischen Gleichung für h^2, so ist

$$h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 = \frac{\mu^2(3\mu^2 - 4)\operatorname{tg}^2\lambda\operatorname{tg}^2 2\lambda + (2\mu^2 - 3)^2}{4\mu^2(\mu^2 - 1)\operatorname{tg}^2 2\lambda}a^2 > 0 \tag{6}$$

$$h_2^2 h_3^2 + h_1^2(h_2^2 + h_3^2) = -\frac{\operatorname{tg}^2\lambda\operatorname{tg}^2 2\lambda + 2\mu^2 - 3}{4(\mu^2 - 1)\operatorname{tg}^2 2\lambda}\operatorname{tg}^2\lambda \cdot a^4 < 0 \tag{7}$$

$$h_1^2 h_2^2 h_3^2 - \frac{\mu^2\operatorname{tg}^4\lambda(1 - \operatorname{tg}^2\lambda\operatorname{tg}^2 2\lambda)}{16(\mu^2 - 1)\operatorname{tg}^2 2\lambda}a^6 \gtrless 0 \tag{8}$$

und zwar für $n \gtrless 3$

Digitized by Google

$$\operatorname{tg}^4\lambda \operatorname{tg}^2 2\lambda \gtreqless 1; \quad \frac{3}{2} < \mu \leqq 2$$

Nach Gl. (8) ist für $n > 3$ eine der Wurzeln, z. B. h_1^2 positiv. Da also $h_2^2 h_3^2$ positiv ist, so ist nach Gl. (7) $h_2^2 + h_3^2$ negativ, folglich sind auch die Addenden negativ oder complex. Demnach ist von den 8 Wurzeln h stets eine und nur eine reell positiv.

Für $n = 3$ wird ein h^2, z. B. h_1^2, null, daher $h_2^2 h_3^2$ negativ, das ist nur für reelle Factoren möglich, und zwar offenbar ist der eine positiv, der andere negativ, folglich nur ein h und nur eins positiv.

Die Gleichung wird in diesem Falle:

$$h^6 - \frac{19}{48} a^2 h^4 - \frac{1}{18} a^4 h^2 = 0$$

und hat die einzige positive Wurzel:

$$h = \frac{1}{12}\sqrt{\frac{57 + 9\sqrt{97}}{2}}$$

Nachdem der Wert von h gefunden ist, geben die Gl. (4) (3) eindeutig k, P und F.

VIII. Prismatoid von der Höhe h auf der Basis B mit einem pyramidalen Aufsatz von der Höhe k auf einer Endfläche.

Hier ist

$$P = \frac{n a^2}{6}(\mu h + \tfrac{1}{2}k)\cot 2\lambda; \quad F = n a(r + \tfrac{1}{4}a\cot 2\lambda + \tfrac{1}{2}q)$$

Bedingungen des kleinsten F bei constantem P sind:

$$a(\mu\,\partial h + \tfrac{1}{2}\partial k) + 2\partial a(\mu h + \tfrac{1}{2}k) = 0$$

$$a\left(\frac{a\,\partial a}{4r}\operatorname{tg}^2\lambda + \frac{h\,\partial h}{r} + \frac{\partial a}{2}\cot 2\lambda + \frac{a\,\partial n}{8q}\cot^2 2\lambda + \frac{k\partial k}{2q}\right) + \partial a(r + \tfrac{1}{2}q) = 0$$

Nach Elimination von ∂k geben die Coefficienten der unabhängigen ∂h, ∂a:

$$\frac{h}{r} = \frac{\mu k}{q}$$

Digitized by Google

$$\frac{a^2}{4r}\operatorname{tg}^2\lambda+\frac{a^2}{8q}\cot^2 2\lambda+\frac{a}{2}\cot 2\lambda+r+\tfrac{1}{2}q=\frac{k}{q}(2\mu h+k)$$

woraus nach Elimination von q und Multiplication mit r:

$$\frac{a^2}{2}\operatorname{tg}^2\lambda+\frac{a^2h}{8\mu k}\cot^2 2\lambda+\frac{\mu k}{2h}\left(\frac{a^2}{4}\operatorname{tg}^2\lambda+h^2\right)+\frac{ar}{2}\cot 2\lambda=h^2+\frac{hk}{\mu}$$

Hier sind k und r durch ihre Werte aus den Gl. (4) (2) in h darzustellen. Macht man die Gleichung rational, so wird sie 6. Grades in h^2.

Bemerkungen. 1. Prismatoide mit prismatischen Aufsätzen auf Endflächen haben keine Oberflächen-Minima, weil deren erste Bedingung

$$\frac{h}{r}=\frac{2\mu}{3}$$

unerfüllbar ist.

2. Alle regelmässigen Polyeder, nur das Dodekaeder ausgegenommen, sind als Specialfälle in den vorstehenden enthalten. I. für $n=4$ ist ein Würfel, II. für $n=3$ ein Tetraeder, III. für $n=4$ ein Oktaeder, VI. für $n=3$ gleichfalls, VII. für $n=5$ ein Ikosaeder. Da die Oberflächen der regelmässigen Polyeder Minima für constanten Inhalt unter allen gleichgeordneten sind, so bestätigen diese 5 Fälle den in der Einleitung erwähnten Satz und sind zugleich Proben der Rechnung.

Folgende Tabelle gibt die Oberfläche für den Inhalt = 1.

n	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
3	6,537	7,206	6,240	6,227	5,936	5,717	6,191	5,589
4	6	6,604	5,719	5,707	5,440	5,576	5,253	5,380
5	5,810	6,395	5,539	5,527	5,268	5,549	5,148	5,339
6	5,719	6,275	5,451	5,440	5,185	5,541	5,101	5,318
7	5,667	6,238	5,402	5,391	5,139	5,539	5,075	5,306
8	5,634	6,201	5,370	5,360	5,108	5,537	5,056	5,302
9	5,613	6,178	5,351	5,340	5,090	5,537	5,051	5,300
.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.
∞	5,536	6,093	5,277	5,266	5,019	5,536	5,019	5,266

Das absolute Minimum der Oberfläche eines Körpers für das Volum 1 ist

$$F=4{,}83598\ldots$$

Diesem kommt das Polyeder VII. am nächsten, wiewol erst für $n > 3$.

Die die Gestalt der 3 letzten Polyeder bestimmenden Abmessungen, welche sich nicht so einfach wie die der 4 ersten allgemein ausdrücken lassen, mag folgende Tabelle geben.

	VI		VII			VIII		
n	$h:a$	a	$h:a$	$k:a$	a	$h:a$	$k:a$	a
3	0,816	1,285	0,711	0,151	1,361	0,760	0,153	1,294
4	1,096	0,929	0,766	0,343	0,969	0,920	0,348	0,951
5	1,423	0,724	0,851	0,526	0,771	1,129	0,532	0,747
6	1,758	0,593	0,956	0,699	0,640	1,350	0,704	0,615
7	2,094	0,502	1,074	0,864	0,546	1,570	0,868	0,524
8	2,426	0,436	1,202	1,023	0,476	1,821	1,026	0,455
9	2,754	0,386	1,331	1,179	0,422	2,033	1,181	0,403

Die Werte der a entsprechen $P = 1$.

Digitized by Google

VIII.

Ueber Formelpaare der mechanischen Quadratur.

Von

Rudolf Skutsch.

Die Bestrebungen, einen Anhalt zur Schätzung des bei Anwendung einer mechanischen Quadraturformel begangenen Fehlers lediglich durch Hinzuziehung neuer Ordinaten zu gewinnen, datiren bis auf Stirlings Methodus differentialis zurück. Stirling nahm zu den Ordinaten der Cotesischen Formeln und zwar nur derjenigen mit ungerader Ordinatenzahl, deren Ueberlegenheit ihm bekannt gewesen zu sein scheint, je eine Ordinate vor der Anfangs- und hinter der Endordinate hinzu in demselben Abstande von den letzteren, den benachbarte Cotesische Ordinaten von einander haben.

Die zu der so vermehrten Ordinatenzahl gehörige Quadraturformel erhält man aus der Cotesischen durch Addition einer Correction, deren Grösse einen ungefähren Schluss auf den übrig bleibenden Fehler zulässt.

Sei allgemein eine Näherungsform

$$\int_a^b y\,dx = A$$

eine zweite, durch Hinzunahme von Ordinaten vervollkommnete $= B$, so kann man eine beliebige Anzahl von Quadraturformeln X finden, welche denselben Genauigkeitsgrad von A, d. h. dieselbe Ordnung des ersten Gliedes der Fehlerreihe besitzen, wenn man setzt

Digitized by Google

$$A + \alpha X = (\alpha + 1) B$$

Für beliebige α wird hierin aus den Fehlergliedern die in A und X, aber nicht in B auftreten, eine fortlaufende Proportion sich bilden lassen. Durch geeignete Wahl von α kann man in X, welches im allgemeinen sämtliche Ordinaten enthält, die in B auftreten, eine oder falls A und B wie bei Cotes symmetrisch gebaut sind, zwei Ordinaten zum Verschwinden bringen.

Die neuerdings mehrfach aufgestellten Formelpaare, d. h. Paare von mechanischen Quadraturformeln, welche den wahren Wert eines bestimmten Integrals mit mehr oder minder grosser Wahrscheinlichkeit zwischen sich einschliessen, sind nun nichts anderes als zwei solche Näherungen A und X mit positivem α, und die obige einfache Gleichung wird uns sehr schnell zur Einsicht von der Unvollkommenheit der vorhandenen Formelpaare und zur Aufstellung der denkbar zweckmässigsten führen.

Die ersten Formelpaare teilte, so weit mir bekannt ist, Herr Ligowski im 58ten Bande dieser Zeitschrift mit. Er hatte entweder zu vorhandenen, teils allgemein bekannten, teils von ihm selbst gefundenen A für $\alpha = 1$ ein X berechnet, welches im allgemeinen keine von den Ordinaten enthielt, die in A vorkamen, und zwar so, dass der Fehler von B nur ein Glied weniger hatte, als die von A und X; oder er hatte zu vorhandenen A und X von gleicher Fehlerordnung den Factor α bestimmt, für den sich in der Summe $A + \alpha X$ die ersten Fehlerglieder heben. Er gelangt so trotz Anwendung irrationaler Constanten in X zu einem Mittelwert B mit geringerer Genauigkeit als sich vermittelst der in letzterem auftretenden Ordinaten durch Newtonsche Quadratur erzielen lässt; dass er aber den Wert B überhaupt nicht als selbständige Quadraturformel auffasste, geht wol am klarsten daraus hervor, dass er als Resultat „vielen Rechnens“ auch zwei Quadraturformeln mit je 4 zu rationalen Abscissenwerten gehörigen Ordinaten angiebt, von denen zwei beiden gemeinschaftlich sind, und bei denen ich darauf aufmerksam machte [1]), dass ihr Mittelwert B die Cotesische Formel für 6 Ordinaten ist, also wenigstens den Genauigkeitsgrad besitzt, den man mit den in ihm vorkommenden Ordinaten erreichen kann. Eines grossen Rechnungsaufwandes bedarf es hier durchaus nicht Denn lässt man einfach von den Ordinaten einer Cotesischen Formel B eine oder mehrere fort und berechnet nach Newton die Coefficienten für eine

1) Preisarbeit 1891, Manuscript in der Bibliothek der Kgl. Techn. Hochschule in Charlottenburg.

Quadraturformel A mit den übrigen Ordinaten, so erhält man X ohne weiteres in der Form

$$X = \frac{\alpha+1}{\alpha} B - \frac{A}{\alpha}$$

worin α beliebig ist, aber zweckmässig nach einer obigen Bemerkung gewählt wird.

Einer Besprechung der Radauschen Formelpaare [1]) will ich eine kurze Uebersicht über die Gausssche Ordinatenwahl vorausschicken.

Nach Gauss sind bekanntlich bestimmte Integrale einer ganzen rationalen Function vom $(2n-1)$ten Grade bei passender Wahl der zugehörigen Werte der unabhängig Veränderlichen schon durch n Functionswerte gegeben. Dieser Satz, den man aus hier nicht in Betracht kommenden Gründen wol überall unter Anwendung der Lagrangeschen Interpolationsformel bewiesen findet, ergiebt sich nebst den Gleichungen für die Werte der Abscisse recht unmittelbar bei Anwendung der Cotesischen Interpolationsformel

$$y = y_0 + (x-x_0)\Delta y_0 + (x-x_0)(x-x_1)\Delta^2 y_0 + (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\Delta^3 y_0 + \ldots$$

worin $\Delta^r y_0$ den $r$ten Differenzenquotienten aus den $r+1$ Werten y_0, y_1 bis y_r berechnet, bedeutet, und welche genaue Resultate giebt für ganze rationale Functionen, deren Grad niedriger ist, als die Anzahl der auf der rechten Seite berechneten Glieder. Ihre Integration liefert

$$\int y\,\partial x = y_0 \int \partial x + \Delta y_0 \int (x-x_0)\partial x + \Delta^2 y_0 \int (x-x_0)(x-x_1)\partial x + \ldots$$

Will man nun aus n Werten das Integral einer Function von höherem als dem $(n-1)$ten Grade genau berechnen, so muss man so viele der Coefficienten von $\Delta^n y_0$, $\Delta^{n+1} y_0$ etc. als möglich gleichzeitig verschwinden lassen, was nach Jakobi [2]) bewirkt wird, wenn man ebensoviele der Integrale

$$\int (x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})\partial x,$$

---

1) Comptes rendus 1880 p. 913.

2) Crelles Journal, Bd. I.

$$\int\int (x-x_0)(x-x_1)\ .\ .\ .\ (x-x_{n-1})\,\partial x^2$$

$$\int\int\int (x-x_0)(x-x_1)\ .\ .\ .\ (x-x_{n-1})\,\partial x^3$$

u. s. f. zwischen denselben Grenzen zum Verschwinden bringt. Von diesen Gleichungen können n durch Disposition über die n Werte x_0 bis x_{n-1} erfüllt werden, wodurch dann offenbar der Grad der genau integrirbaren ganzen rationalen Functionen vom $(n-1)$ten auf den $(2n-1)$ten gehoben wird. Dann aber kann das Integral bei $\Delta^{2n} y_0$ auf keine Weise zum Verschwinden gebracht werden, da dies bei Jakobischer Reduction noch auf die nunmehr unerfüllbare Bedingung

$$\int^{n+1} (x-x_0)(x-x_1)\ .\ .\ .\ (x-x_{n-1})\,\partial x^{n+1} = 0$$

führen würde. Man ersieht hieraus, dass, wenn n Ordinaten in obiger Weise bestimmt worden sind, und der Genauigkeitsgrad der gefundenen Quadraturformel durch neue hinzugenommene Ordinaten erhöht werden soll, hierzu $n+1$ Ordinaten notwendig und ausreichend sind.

Sind von den n Werten nur r disponibel, so kann man dieselben so bestimmen, dass die Integrale bis zum $r$ten einschliesslich verschwinden, d. h. dass die zugehörige Quadraturformel für Functionen vom $(n+r-1)$ten Grade genaue Resultate giebt.

Radau stellte den Gaussschen Formeln für m Ordinaten solche mit $(m+1)$ anderen gegenüber, von welch' letzteren er zwei, nämlich Anfangs- und Endordinate des Intervalls, willkürlich annahm; die übrigen sind nach dem vorher gehenden bestimmt, da die Fehlerordnung die der Gaussschen Formel sein soll.

Er berechnete ferner die ersten Fehlerglieder beider Formeln und fand, dass man den Factor α allgemein gleich $\frac{m}{m+1}$ zu nehmen hat, um den Grad der mit B genau integrirten Parabeln über $2m-1$ zu heben. Da er im ganzen $2m+1$ Ordinaten benutzt, so ist die Genauigkeit wenigstens für die so gewählten Ordinaten so gross als möglich.

Indessen ist es klar, dass bei anderer Wahl der $m+1$ Ordinaten, insbesondere, wenn man von der willkürlichen Festsetzung zweier von ihnen absieht, Formeln B mit viel höherer Genauigkeit sich aufstellen lassen. Bei geeigneter Wahl aller $m+1$ Ordinaten

kann man zum Beispiel eine Formel X aus ihnen bilden, welche denselben Genauigkeitsgrad und überdies dieselben Verhältnisse zwischen den drei ersten Fehlergliedern wie die Gausssche Formel A aufweist. Dürfen ferner auch p von den m Gaussschen Ordinaten in die Complementärformel eintreten, so kann man durch Wahl der $m+1$ anderen Ordinaten $p+3$ Verhältnisse übereinstimmend machen. Setzt man jedoch für $p = m$ die $p+2$ Proportionen und $2m-1$ sonstigen Gleichungen an, so wird die Complementärformel identisch mit der Gaussschen —, der Factor α erhält den Wert -1 und in der Gleichung

$$A - A = (1-1)B$$

wird B unbestimmt. Am bequemsten gelangen wir zu der günstigsten Complementärformel wieder durch die obige Betrachtung. Wir haben gesehen, dass $m+1$ Ordinaten erforderlich sind, um die Genauigkeit einer Gaussschen Formel mit m Ordinaten zu steigern, und die stets aus m gegebenen und $m+1$ zu wählenden Ordinaten eine Formel hergestellt werden kann, welche Functionen vom $(3m+1)$ten Grade genau integrirt.

Ist also A die Gausssche Formel mit m Ordinaten, B die verjüngte Formel mit $2m+1$ Ordinaten und Genauigkeitsgrad $3m+1$, so giebt es eine unendliche Anzahl von Formeln X mit im allgemeinen $2m+1$ Ordinaten, worunter m Gausssche, welche den Genauigkeitsgrad $2m-1$ besitzen. Die letzteren haben also geringeren Genauigkeitsgrad als vermittelst ihrer Ordinaten erzielt werden könnte. Dieser Uebelstand kommt indessen in Wegfall, wenn man über α wieder so disponirt, dass in X von den $2m+1$ Ordinaten eine oder zwei nicht auftreten. Bei unserer Formel spielt auch die aus Gauss' Kritik der Cotesischen Formeln zu entnehmende Tatsache eine Rolle, dass der Genauigkeitsgrad von Quadraturformeln, deren Ordinaten symmetrisch im Intervall stehen, stets durch eine ungerade Zahl dargestellt wird, ein Satz, welcher sich übrigens leicht mit Hülfe der Cotesischen Interpolationsformel und der Jakobischen Reduction beweisen lässt Hiernach ist der Genauigkeitsgrad unserer Formel, wenn $3m+1$ eine gerade, also m eine ungerade Zahl ist, nicht $3m+1$, sondern $3m+2$.

Der Wert von Formelpaaren überhaupt darf nicht überschätzt werden. Die Beibringung eines strengen Beweises, dass die beiden Näherungen den wahren Integralwert wirklich einschliessen, wird fast ausnahmslos ausserordentlich schwierig und zeitraubend sein. Mit der Anzahl der Fehlerglieder, die in A, aber nicht in B auftreten, wächst zwar im allgemeinen die Wahrscheinlichkeit, dass die

Digitized by Google

Einschliessung erfolgt, zugleich aber auch das Missverhältniss zwischen der Differenz der Näherungswerte und dem wirklichen Fehler des Mittelwertes.

Zur Erläuterung vorstehender Ausführungen mögen folgende Rechnungsresultate dienen. Die zweckmässigste Complementärformel zu Gauss' Formel mit 3 Ordinaten auf eine Function $f(x)$ im Intervall -1 bis $+1$ angewendet, lautet:

$$\int_{-1}^{+1} f(x)dx = 0{,}202\,538\,961\,83[f(-0{,}960\,491\,268\,71) + f(+0{,}960\,491\,268\,71)] + 0{,}776\,815\,854\,70[f(-0{,}434\,243\,749\,24) + f(+0{,}434\,243\,749\,24)] + 0{,}041\,290\,366\,93[f(0)]$$

Hier ist $\alpha = 1{,}069\,200\,050\,00$ zu nehmen.

Für den $\log\text{nat}\,2 = 0{,}693\,147\,180\,56$ findet man mit 3 Gaussschen Ordinaten

$$A = 0{,}693\,121\,693\,12$$

mit obiger Formel

$$X = 0{,}693\,171\,018\,27$$

als Mittelwert mit 7 Ordinaten

$$B = 0{,}693\,147\,180\,49$$

Radau's Complementärformel mit 4 Ordinaten giebt den Näherungswert

$$X = 0{,}693\,181\,818\,18$$

den Mittelwert (mit $\alpha = \frac{3}{4}$)

$$B = 0{,}693\,147\,460\,99$$

Radau's Mittelwert mit 11 Ordinaten, a. a. O. von ihm selbst mitgeteilt, ist

$$B = 0{,}693\,147\,180\,70$$

also noch immer ungenauer als der obige mit 7 Ordinaten.

Obgleich der Genauigkeitsgrad der Gaussschen Formel mit 7 Ordinaten um 2 höher ist, als der der oben aufgestellten, so ist infolge kleinerer Fehlergliedcoefficienten der letzteren die numerische Grösse des Fehlers bei beiden nur wenig unterschieden, denn die Gausssche Formel mit 7 Ordinaten ergiebt

$$\log\text{nat}\,2 = 0{,}693\,147\,180\,54$$

IX.

Ueber eine Behandlung einer Curve 4. Ordnung und der allgemeinen Curve 3. Ordnung mittelst Kegelschnittcoordinaten.

Von

Hermann Oppenheimer,

Dr. ph. in Hamburg.

In den diesjährigen Mitteilungen der mathematischen Gesellschaft in Hamburg habe ich eine neue Methode der Behandlung des Kegelschnitts erörtert, die auf folgenden Erwägungen beruht:

Drei Paare entsprechender Punkte in zwei perspectivischen ebenen Systemen liegen auf einem Kegelschnitt K. Solche sich selbst in beiden Systemen entsprechenden Kegelschnitte K giebt es also ∞^8.

Durch zwei Paare sich entsprechender Punkte gehen an einen dieser K zwei andere, K', die ihn doppelt berühren. Hält man nun einen K und irgend ein Punktpaar $A_1 — A_2$ fest, so besteht zwischen den K doppelt berührenden Kegelschnitten K' durch $A_1 — A_2$ und den Punktpaaren auf K einerseits und den Tangenten und Punkten von K anderseits eine vollkommene Analogie, wenn wir den Punkten die Punktpaare, den Tangenten die doppelt berührenden Kegelschnitte entsprechen lassen; der Verbindungslinie zweier Punkte entspricht sodann ein sich selbst entsprechender K' durch $A_1 — A_2$, der zwei Punktpaare verbindet und dem Schnittpunkt zweier Tangenten dasjenige Punktpaar, das zwei doppelt berührende K' ausser $A_1 — A_2$ gemeinsam haben.

Ich habe in der erwähnten Note an der Hand von Beispielen ausgeführt, wie sich sämtliche Sätze zwischen den Punkten und

Digitized by Google

Tangenten von K auf die Punktpaare und doppelt berührenden Kegelschnitte übertragen lassen. Ich will diese neuen Coordinaten kurz „Kegelschnittcoordinaten" nennen und die Kegelschnitte K' durch $A_1 - A_2$, deren Function in unserer Punktpaarebene analog der Function der Geraden in der Punktebene ist, „Kegelschnittstrahl."

Im folgenden will ich eine eigenartige C^4 und die allgemeine C^3 mittelst dieser neuen Coordinaten behandeln.

1.

Beziehen wir zwei Büschel sich selbst entsprechender K projectivisch aufeinander, so erzeugen sie im allgemeinen eine C^4. Fasse ich einen der beiden Büschel als Kegelschnittstrahlenbüschel auf, betrachte also die C^4 als erzeugt durch einen Kegelschnittbüschel und einen Kegelschnittstrahlenbüschel, so kann ich dieselbe damit in Analogie mit der allgemeinen C^3 bringen, die ja erzeugt wird von einem Kegelschnittbüschel und einem projectivischen Strahlenbüschel. Ich werde also auch alle Sätze zwischen Punkten und Tangenten der C^3 auf die Punktpaare und doppelt berührenden Kegelschnitte der C^4 übertragen dürfen. — Dabei ist noch zu bemerken, dass ein beliebiges Punktpaar der C^4 als dasjenige ausgezeichnete Punktpaar $A_1 - A_2$ gewählt werden kann, durch das wir das Kegelschnittnetz legen, welches mit dem Geradennetz der Punktebene in Analogie stehen soll. Es mögen zur Erläuterung einige Uebertragungen von Sätzen der C^3 angeführt werden — wir greifen als das ausgezeichnete Punktpaar irgend ein Punktpaar $A_1 - A_2$ der C^4 heraus.

a) Durch irgend ein Punktpaar $M_1 - M_2$ der Ebene gehen sechs Kegelschnittstrahlen, die die C^4 in einem Punktpaar berühren.

b) Irgend ein Kegelschnittstrahl K_1 schneidet auf der C^4 noch Punktpaare $B_1 - B_2$, $C_1 - C_2$, $D_1 - D_2$ aus; die drei Kegelschnittstrahlen, die resp. in $B_1 - B_2$, $C_1 - C_2$, $D_1 - D_2$ die C^4 berühren, schneiden je ein weiteres Punktpaar, resp $B_1' - B_2'$, $C_1' - C_2'$, $D_1' - D_2'$ auf der C^4 aus; $B_1' - B_2'$, $C_1' - C_2'$, $D_1' - D_2'$ liegen auf einem und demselben Kegelschnitt K_2. K_2 ist die Begleiterin von K_1 (cf. Salmon-Fiedler 5. Kap. Art. 50).

c) Es giebt neun Kegelschnittstrahlen, die die C^4 in je einem Punktpaar osculiren. Verbinden wir zwei dieser Inflexionspunktpaare durch einen Kegelschnittstrahl, so geht derselbe durch ein drittes Inflexionspunktpaar.

So lässt sich die ganze Theorie der C^3 auf diese C^4 übertragen.

Anmerkung. Man könnte fragen, ob die sprachliche C^4 die allgemeine C^4 vom Geschlechte 3 ist, ob also umgekehrt jede C^4 sich selbst entsprechende Curve in zwei projectivischen und involutorisch liegenden ebenen Systemen sein kann. Dass das nicht der Fall ist, folgt z. B. aus der Lage unserer C zum Collineationscentrum P: von P gehen vier einfache Tangenten an die C^4, deren Berührungspunkte auf p liegen, und 4 Doppeltangenten, die in je einem Punktpaar tangiren. Bei der allgemeinen C^4 werden vier Doppeltangenten im allgemeinen nicht einen Schnittpunkt haben.

2.

Zwei Büschel sich selbst entsprechender K mögen zu Basispunkten resp. die Punktpaare $A_1 - A_2$, $B_1 - B_2$ und $A_1' - A_2'$, $B_1' - B_2'$ haben. Liegen $A_1 - A_2$ und $A_1' - A_2'$ auf einem und demselben Strahle durch P — die andern beiden Punktpaare aber nicht —, und beziehen wir die beiden Büschel in der Weise projectivisch aufeinander, dass die beiden zerfallenen Curven, von denen der Strahl $(A_1 - A_2,\ A_1' - A_2')$ ein Teil ist, sich selbst entsprechen, dann ist dieser Strahl ein Teil der C^4; der Rest ist eine C^3. Fassen wir nun den einen Kegelschnittbüschel, etwa den der $K(A_1 - A_2,\ B_1 - B_2)$ als Büschel von Kegelschnittstrahlen auf, so werden wir die Punktpaare dieser C^3 und die sie doppelt berührenden Kegelschnittstrahlen in Analogie setzen dürfen mit ihren Punkten und Tangenten.

Die sprachliche C^3 ist eine in beiden Systemen sich selbst entsprechende Curve. Es ist von Interesse zu untersuchen, ob diese C_3 besondere Eigenschaften hat, oder ob nicht umgekehrt jede allgemeine C^3 eine sich selbst entsprechende Curve zweier perspectivischen und involutorischen Systeme sein kann.

Diese Frage erledigt sich durch folgende Erwägungen:

Irgend zwei einander entsprechende Curven der beiden Büschel mögen sich in den Punktpaaren $C_1 - C_2$, $C_1' - C_2'$ schneiden.

Dann ist offenbar das Collineationscentrum P der beigeordnete Rest zu $C_1 - C_2$, $C_1' - C_2'$: denn irgend ein Kegelschnitt durch diese zwei Punktpaare trifft die C^3, die ebenso wie der Kegelschnitt eine sich selbst entsprechende Curve ist, in einem weiteren Punktpaar. Die Verbindungslinien aller Paare entsprechender Punkte gehen aber durch das Collineationscentrum. Nun schneiden sich aber die Ver-

bindungslinien $C_1 C_2$ und $C_1' C_2'$ der vier Punkte, von denen P beigeordneter Rest ist, selbst in P. Das ist nur möglich, wenn P Inflexionspunkt der C^3 ist Das steht mit folgender Eigenschaft aller sich selbst entsprechender Curven im Einklang.

Von dem Collineationscentrum P aus können wir zwei Arten von Tangenten an dieselben legen: einfache Tangenten, deren Berührungspunkte auf der Centralachse liegen, und deren Zahl also gleich der Ordnung der Curve ist, und $2n$ fache Tangenten, die allemal in Punktpaaren berühren.

Da für unsere C^3 $2n$ fache Tangenten nicht in Betracht kommen, gehen also von P ausser der Tangente, die in P berührt, drei Tangenten an die C^3, deren Berührungspunkte auf der Collineationsachse p liegen. Nun wissen wir aber umgekehrt aus der Theorie C^3 (Salmon-Fiedler, Theorie der Curven Art. 171—172), dass ein so vereigenschaftetes Paar von Elementen, wie das Collineationscentrum P und die Achse p ein Inflexionspunkt und die ihm zugehörige harmonische Polare sind: von einem Inflexionspunkt gehen an die C^3 drei Tangenten (ausser der Inflexionstangente), deren Berührungspunkte auf der harmonischen Polare liegen, irgend ein Strahl durch den Inflexionspunkt schneidet in einem weiteren Paar von Punkten, die durch die harmonische Polare harmonisch von dem Inflexionspunkt getrennt werden u. s. w.

Wir kommen also zu folgendem Resultate:

„Jede C^3 ist sich selbst entsprechende Curve in neun Paaren perspectivisch und involutorisch liegender ebener Systeme, nämlich in den Systemen, die einen Inflexionspunkt und die zugehörige harmonische Polare zu Collineationscentrum und Collineationsachse haben."

Damit hat unsere neue Methode der Behandlung der C^3 eine erhöhte Bedeutung gewonnen.

Wir wollen zur Veranschaulichung dieselben Sätze, die wir von der C^3 auf die C^4 übertragen haben, nun auch für die C^3 anführen. Das ausgezeichnete Punktpaar $A_1 - A_2$ kann beliebig in der Ebene innerhalb oder ausserhalb der C^3 angenommen werden (weil ich ja von dem Büschel der Kegelschnittstrahlen $K(A_1 - A_2,\ B_1 - B_2)$ das Punktpaar $A_1 - A_2$ ausserhalb der C^3 oder das Punktpaar $B_1 - B_2$ auf der C^3 als das ausgezeichnete Punktpaar wählen kann:

a) Durch irgend ein Punktpaar $M_1 - M_2$ der Ebene gehen sechs Kegelschnittstrahlen, die die C^3 in einem Punktpaare berühren.

Digitized by Google

b) Irgend ein Kegelschnittstrahl K_1 schneidet auf der C^3 drei Punktpaare $B_1 - B_2$, $C_1 - C_2$, $D_1 - D_2$ aus. Die drei Kegelschnittstrahlen, die die C^3 resp. in $B_1 - B_2$, $C_1 - C_2$, $D_1 - D_2$ berühren, schneiden je ein weiteres Punktpaar, resp. $B_1' - B_2'$, $C_1' - C_2'$, $D_1' - D_2'$ auf der C_3 aus; $B_1' - B_2'$, $C_1' - C_2'$, $D_1' - D_2'$ liegen auf einem und demselben Kegelschnitt K_2, K_2 ist die Begleiterin von K_1.

c) Es giebt 9 Kegelschnittstrahlen, die die C^3 in je einem Punktpaare osculiren. Verbinden wir zwei dieser Inflexionspunktpaare durch einen Kegelschnittstrahl, so geht dieselbe durch ein drittes Inflexionspunktpaar.

Hamburg, Januar 1894.

Digitized by Google

X.

Miscellen.

1.

Projective Lösung einer Aufgabe über die Schraubenlinie.

Die geodätische Linie auf dem Cylinder ist durch zwei Punkte A und B bestimmt, wenn zugleich die Anzahl n der vollen Umgänge gegeben ist, die der eine Punkt machen muss, um in den anderen zu gelangen. Müsste der Punkt A um die Cylinderachse um den Winkel w gedreht und hierauf um a gehoben werden, um nach B zu gelangen, so ergibt sich die Ganghöhe h der Schraubenlinie aus

$$h = \frac{360a}{360n + w}$$

wobei w in Graden eingesetzt werden müsste.

Constructiv, ohne jede Rechnung, lässt sich die Aufgabe wie folgt lösen:

Es sei Fig. 1. $AMNO$ die abgewickelte Mantelfläche des Cylinders, B der Punkt, in welchen man von A aus nach n Umläufen gelangen soll. Ist AC der erste Umgang der Schraubenlinie in der Abwickelung, also

$$MC = h$$

die Ganghöhe, so erhält man den durch B gehenden Schraubengang, wenn man

$$AD = nh$$

macht, und D mit B verbindet. Bei willkürlicher Wahl des AC wird aber BD nicht parallel zu AC sein, und nur, wenn dies stattfindet, die Aufgabe gelöst sein.

Digitized by Google

Bezeichnet man den Schnittpunkt von DC mit der verlängerten AM mit P, so ist P bei der Variirung des h ein fester Punkt, denn bezeichnet man den Umfang AM des Cylinders mit u, so ist

$$MP = \frac{u}{n-1}$$

In Folge dessen ist bei Variirung des h die Punktreihe D perspectiv zu jener C. Zieht man durch B immer eine Parallele zu AC, welche AO in D' schneidet, so ist Strahlenbüschel $A(C \ldots)$ congruent jenem $B(D' \ldots)$, daher Punktreihe D' projectiv mit jener C, und demnach nach früherem auch mit jener D. Fällt D mit D' zusammen, so ist $BD' \parallel AC$, und demnach die Aufgabe gelöst. Man hat daher nur den im Endlichen befindlichen Doppelpunkt der beiden ähnlichen Punktreihen D und D' zu suchen. Dazu benötigt man noch ein Paar homologe Punkte. Diese sind aber A und A', wenn $BA' \parallel AM$ gezogen wird. Schneidet die verlängerte $A'B \ldots MN$ in A'', ist $D'D'' \parallel AM$, so ist der Schnittpunkt S der Verbindungslinien AA'', DD'' das Centrum der Perspectivität der Punktreihen $AD \ldots$ und $A''D'' \ldots$, daher Δ der verlangte Doppelpunkt, wenn $S\Delta \parallel AM$. Die durch A zu ΔB gezogene Parallele schneidet hierauf auf MN, von M ausgerechnet, die verlangte Ganghöhe ab.

Wien, im März 1893.

Wilhelm Ruff.

2.

Ueber eine Erzeugungsweise der Hyperbel als Enveloppe.

Ein Kreis und zwei parallele gerade Linien, in derselben Ebene liegend, sind gegeben. In dem Kreise wird eine Sehne von gegebener Länge gezeichnet, und durch deren Endpunkte zu einer bestimmten Richtung Parallele gezogen, wodurch ein Parallelogramm entsteht, dessen Diagonalen eine Hyperbel einhüllen, wenn die Sehne von constanter Länge variirt.

Beweis. Es seien Fig 1. G und L die parallelen geraden Linien, K der Kreis, R die gegebene Richtung, Man zeichne zunächst jene Sehnen AB und DC von gegebener Länge, die auf der Richtung R senkrecht stehen. Hierauf ist $AD \parallel CB \parallel R$ und es entsteht das Parallelogramm $EFHJ$, von dessen Diagonalen EH und

Digitized by Google

JF später gezeigt werden soll, dass sie die Asymptoten obiger Hyperbel sind. Ist ferner MN irgend eine der Sehnen von constanter Länge, welche bekanntlich einen Kreis K' berühren, so schneidet diese die Sehnen AB und CD, beziehungsweise deren Verlängerungen in den Punkten O und P. Zieht man durch die letzteren Parallele zu R, so erhält man auf den Diagonalen JF und EH, beziehungsweise auf ihrer Verlängerung die Schnittpunkte O' und P', von deren Verbindungslinie sogleich gezeigt werden soll, dass sie eine Tangente jener Hyperbel ist, deren Asymptoten die Diagonalen JF und EH sind.

Da MN eine variirende Tangente des Kreises K' ist, so schneidet sie die festen Tangenten AB und DC desselben Kreises in den projectiven Punktreihen O und P. Durch die Parallelen zu R werden diese projectiven Punktreihen auf die Diagonalen JF und EH übertragen daher ist auch die Punktreihe O' proj. P'. Die Verbindungslinien der homologen Punkte O' und P' derselben hüllen demnach einen Kegelschnitt ein, der auch die Träger JF und EH berührt. Fällt O' in den Schnittpunkt T der Träger, so deckt sich die Sehne MN mit jener AB, daher fällt P' und mithin auch P' in's Unendliche. Es liegt daher der Berührungspunkt der Kegelschnittstangente EH im Unendlichen, sie ist eine Asymptote und der Kegelschnitt selbst eine Hyperbel. Aus ähnlichen Gründen ist JF die zweite Asymptote. Es erübrigt nur noch zu zeigen, dass $O'P'$ auch eine Diagonale des Parallelogramms ist, welches man erhält, wenn man durch M und N Parallele zu R zieht und diese mit G und L combinirt.

Zu dem Ende hat man zu zeigen, dass die in Figur 1. der grösseren Deutlichkeit wegen nicht gezogenen Verbindungslinien MQ und NS parallel sind zu R. Vermöge der Parallelen G und L findet die Proportion statt:

$$QO' : O'S = O'F : JO' \qquad 1)$$

Weil $AJ \parallel OO' \parallel BF$ jene:

$$O'F : JO' = OB : OA$$

daher mittelst 1)

$$QO' : O'S = OB : OA \qquad 2)$$

Des Kreises K wegen findet aber die Proportion statt:

$$OB : OA = MO : ON$$

daher mittelst 2)

$$QO' : O'S = MO : ON$$

woraus folgt, dass $MQ \parallel OO' \parallel NS \parallel R$ w. z. b. w.

Diese Erzeugungsweise der Hyperbel lässt sofort erkennen, dass die Contur der orthogonalen Projection der durch Drehung einer Geraden um eine zu ihr windschiefe Achse entstehenden Umdrehungsfläche auf eine zu letzterer parallele Ebene eine Hyperbel ist. In diesem Falle steht aber R senkrecht auf G und L.

Wien, im März 1893.

Wilhelm Rulf.

3.

Neuer Satz über die Cykloide.

Wenn zwei Kreise einen dritten Kreis, den Grundkreis, in demselben Punkte berühren, und sie rollen auf dem Grundkreise so, dass ihre Mittelpunkte auf verschiedene Seiten der ursprünglich gemeinschaftlichen Centrallinie zuliegen kommen, so soll gesagt werden, dass die Kreise nach verschiedenen Seiten oder entgegengesetzt rollen.

Der Halbmesser des Grundkreises soll im folgenden immer mit + bezeichnet werden. Der Radius des Rollkreises wird mit + oder − bezeichnet, je nachdem sein Mittelpunkt mit dem Mittelpunkt des Grundkreises auf derselben Seite des gemeinschaftlichen Berührungspunktes liegt oder nicht.

Wenn die algebraische Summe der Halbmesser der Rollkreise gleich ist dem Halbmesser des Grundkreises, so sollen die Rollkreise Ergänzungskreise heissen und es ergibt sich der Satz:

„Rollen die Ergänzungskreise entgegengesetzt, so beschreibt der gemeinschaftliche Berührungspunkt stets eine und dieselbe Cykloide."

Zu Zwecken des Beweises soll der Halbmesser des Grundkreises mit r und jene der Rollkreise mit r_1 und r_2 bezeichnet werden, und er wird in zwei Teile zerfallen, in jenen für die arithmetische und in den für die algebraische Summe, und soll synthetisch geliefert werden.

a) Für die arithmetische Summe. In diesem Falle sind die Rollkreise Fig. 1, k_1 und k_2 kleiner als der Grundkreis k, und ihre

Mittelpunkte m_1 und m_2 liegen zu derselben Seite des Berührungspunktes a mit dem Mittelpunkte m des Grundkreises.

Es rolle nun k_1 so, dass der Punkt b seines Umfanges nach c in den Grundkreis fällt, was dann der Fall ist, wenn

$$\text{arc}\,ac = \text{arc}\,ab$$

Der Mittelpunkt von k_1 kommt dabei nach m_1', also rollt k_1 nach rechts. Beschreibt man von m aus mit mb einen Kreisbogen, so schneidet dieser bekanntlich die neue Lage k_1' des Rollkreises in dem Punkte p der Cykloide, die der Berührungspunkt a mit k_1 beschreibt.

Nun soll gezeigt werden, dass a auch durch entgegengesetztes Rollen von k_2 nach p gelangt. Zu dem Ende ziehe man $md \parallel m_1'p$ und $pm_2' \parallel mc$. Nach m_2' müsste der Mittelpunkt m_2 des Rollkreises k_2 gelangen, wenn letzterer entgegengesetzt zu k_1 gerollt würde, denn es ist

$$dm_2' = dm - m_2'm = dm - pm_1' = r - r_1 = r_2$$

Auch erkennt man, dass wenn man von m_2' aus mit $m_2'd$ den Kreis k_2' beschreibt, dieser durch p gehen muss, da, vermöge des Parallelogramms

$$m_2'p = mm_1' = r - r_1 = r_2$$

ist, und man wird gezeigt haben, dass p auch ein Punkt der Cykloide des Kreises k_2 ist, wenn man zeigt, dass

$$\text{arc}\,dp = \text{arc}\,da$$

Bezeichnet man den Winkel $dm_2'p$ mit w, so ist

$$\text{arc}\,dp = r_2 w \qquad 1)$$

Es ist aber auch Wkl. $dmc = w$, daher

$$\text{arc}\,dc = rw$$

oder

$$\text{arc}\,da + \text{arc}\,ac = r_1 w + r_2 w \qquad 2)$$

Endlich ist aber auch Wkl. $pm_1'c = w$, daher

$$\text{arc}\,pc = \text{arc}\,ac = r_1 w$$

weshalb sich 2) auf

$$\text{arc}\,da = r_2 w$$

reducirt, woraus mittelst 1) folgt

$$\text{arc}\,dp = \text{arc}\,da \quad \text{w. z. b. w.}$$

Digitized by Google

Anmerkung. Da der Punkt p nur eine Normale haben kann, ob man ihn zur Cykloide des Kreises k_1 oder k_2 rechnet, so folgt daraus, dass die drei Punkte dpc in einer Geraden liegen müssen, was auch aus dem Parallelogramm $m_2' m m_1' p$ geschlossen werden kann.

b) Für die algebraische Summe. In diesem Falle ist der Rollkreis k_1 grösser als der Grundkreis k, und ihre Mittelpunkte m und m_1 liegen auf derselben Seite vom Berührungspunkte a. Der Mittelpunkt m_2 des Rollkreises k_2 liegt dann auf der anderen Seite von a. Wir lassen nun k_1 so lange rollen, bis der Punkt b seines Umfanges nach c auf den Grundkreis fällt, was eintritt, wenn

$$\text{arc}\, ac = \text{arc}\, ab$$

m_1 kommt dabei nach m_1' und k_1 in die Lage k_1'. Beschreibt man von m aus mit mb einen Kreisbogen, bis dieser k_1' in p schneidet, so ist p ein Punkt der Cykloide, die a beim Rollen von k_1 beschreibt. Zieht man durch m eine Parallele zu $m_1' p$, so schneidet diese k in d und die durch p zu mc gezogene Parallele in m_2'. Nach m_2' muss nun der Mittelpunkt von k_2 kommen, wenn k_2 entgegengesetzt k_1 rollt, denn

$$m_2' d = m_2' m - md = m_1' p - md = r_1 - r = r_2$$

Da aber

$$m_2' p = m m_1' = r_1 - r = r_2$$

so muss der von m_2' aus mit $m_2 d$ beschriebene Kreis auch durch p gehen, und man hat bewiesen, dass p auch ein Punkt der Cykloide des Punktes a mit dem Rollkreise k_2 ist, wenn man zeigt, dass

$$\text{arc}\, dp = \text{arc}\, ad$$

Bezeichnet man den Winkel $p m_1' c$ mit w, so ist

$$\text{arc}\, pc = \text{arc}\, ab = \text{arc}\, ac = r_1 w \qquad 1)$$

$$\text{arc}\, ac = \text{arc}\, ad + \text{arc}\, dc$$

und da Winkel dmc auch gleich w ist, mittelst 1)

$$\text{arc}\, ad + r w = r_1 w$$

daraus

$$\text{arc}\, ad = (r_1 - r) w = r_2 w \qquad 2)$$

Endlich ist aber auch Winkel $p m_2' d = w$, daher

$$\text{arc}\, pd = r_2 w$$

und mittelst 2)

$$\text{arc}\, pd = \text{arc}\, ad \quad \text{w. z. b. w.}$$

Digitized by Google

Anmerkung. Auch hier müssen p, d und c in einer Geraden liegen, da p nur eine Normale haben kann.

Aus dem oben bewiesenen Satze folgt, dass man eine jede Cykloide vom gegebenen Rollkreise durch einen zweiten, von dem ersten im allgemeinen verschiedenen Rollkreis erzeugen kann, wenn die algebraische Summe der Halbmesser beider gleich ist dem Halbmesser des Grundkreises. Für das technische Zeichnen ist dieser Umstand von Wichtigkeit, weil man einen grossen Kreis durch einen kleineren ersetzen kann. Auch ist die sogenannte Pericykloide hiermit von selbst erledigt.

Wilhelm Rulf.

4.

Ueber Transformation und numerische Lösung der kubischen Gleichung.

§ 1. Die Gleichung

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \qquad (1)$$

behält ihre Form bei Substitution

$$x = \frac{\alpha y + \beta}{y + \gamma}$$

und erlangt hinsichtlich der 3 unabhängigen Parameter α, β, γ dieselbe Allgemeinheit wie nach beliebig oft wiederholter Substitution. Wir können daher zur Vereinfachung der Betrachtung aller weitern Untersuchung die specielle Substitution

$$x = \alpha y + \beta$$

vorausgehen lassen. Dadurch geht Gl. (1) über in

$$y^3 + Ay^2 + By + C = 0$$

wo

$$A = \frac{3\beta + a}{\alpha}; \quad B = \frac{3\beta^2 + 2a\beta + b}{\alpha^2}; \quad C = \frac{\beta^3 + a\beta^2 + b\beta + c}{\alpha^3}$$

Durch reelle α, β lassen sich die Bedingungen erfüllen:

$$A = 0; \quad B = \pm 1; \quad C = -u$$

nämlich durch die Werte:

$$\beta = -\tfrac{1}{3}a; \quad \alpha^2 = \pm(b - \tfrac{1}{3}a^2): \quad u = (-\tfrac{2}{27}a + \tfrac{1}{3}ab - c) : \alpha^3$$

Digitized by Google

Hiermit ist x, welches als Lösung der gegebenen kubischen Gl. (1) Function dreier Grössen a, b, c war, linear in einer Function einer Variabeln

$$y = \varphi(u)$$

dargestellt, und man hat:

$$x = \sqrt{\pm(b - \tfrac{1}{3}a^2)}\,\varphi(u) - \tfrac{1}{2}a$$

Diese Function hat folgende Eigenschaften.

1) Es ist $\varphi(-u) = -\varphi(u)$. Demzufolge beschränkt sich das Bereich der zu berechnenden Werte auf positive Argumente.

2) Für das obere Zeichen wächst $\varphi(u)$ mit u beständig von 0 bis ∞, folglich hat es nur einen reellen Wert.

3) Ist $\varphi(u) = y_0$ überhaupt einer der 3 Werte, so sind die beiden andern unabhängig von den Coefficienten der Gleichung eine Function von y_0; denn man hat:

$$y^2 + y_0 y + y_0^2 \pm 1 = 0$$

Dies gibt, wofern y_0 reell, für oberes Zeichen immer, für unteres, solange

$$y_0^2 > \tfrac{1}{3} \qquad (2)$$

ist, imaginäre y.

Die transformirte Gleichung lautet nun:

$$y^3 \pm y = u \qquad (3)$$

§ 2. Der Fall des untern Zeichens lässt sich durch die Substitution

$$y = \frac{\gamma}{z} - \frac{1}{\sqrt{3}}$$

wofern

$$\gamma = \sqrt{\frac{u}{\sqrt{3}} - \frac{2}{9}}$$

reell ist, auf den des obern reduciren. Die Gleichung

$$y^3 - y = 0$$

geht dann über in

$$z^3 + z = v = \frac{\gamma}{\sqrt{3}}$$

Bedingung der Realität ist

$$u \geqq \frac{2}{3\sqrt{3}}$$

wie auch der Cardanische Wurzelausdruck zeigt, und diese Grenze stimmt mit der obigen (2) überein; denn man findet:

Digitized by Google

$$u = y_0{}^3 - y_0 = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3 - \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3\sqrt{3}}$$

§ 3. Wir gehen nun von der Gl. (3) aus und führen sie durch die allgemeinste Substitution

$$y = \frac{\alpha z + \beta}{z + \gamma}$$

auf die gleiche Form

$$z^3 + \varepsilon z = v \quad (\varepsilon = \pm 1)$$

zurück. Es ergeben sich die Bedingungen:

$$(3\alpha^2 \pm 1)\beta = (3u \mp 2\alpha)\gamma \tag{4}$$

$$2\alpha\beta^2 \pm 2\beta\gamma - (3u \mp \alpha)\gamma^4 = \varepsilon(\alpha^3 \pm \alpha - u) \tag{5}$$

$$\beta^3 \pm \beta\gamma^3 - \gamma^3 u = (\alpha^3 \pm \alpha - u)v \tag{6}$$

Gl. (4) sei zerlegt in

$$\beta = \frac{3u \mp 2\alpha}{\varrho} \qquad \gamma = \frac{3\alpha^2 \pm 1}{\varrho} \tag{7}$$

Setzt man zur Abkürzung

$$\Gamma = 3\alpha^2 \pm 1; \quad \Delta = \alpha(\alpha^2 \pm 1) - u$$

so ist Δ Factor beider Seiten der Gl. (5) und (6). nachdem darin die Werte (7) eingesetzt sind, und man findet:

$$\varrho^2 = 3\varepsilon(9\alpha\Delta - \Gamma^2)$$

$$v = \frac{27(\alpha\Gamma - \Delta)\Delta - 2\Gamma^3}{\varrho^3}$$

§ 4. Um von dieser Transformation Anwendung auf die numerische Lösung der kubischen Gleichung zu machen, wollen wir annehmen, es sei die Function $\varphi(u)$ für oberes Zeichen durch eine Tafel von $u = 0$ bis $u = 1$ bekannt, und deren Gebrauch auf das weitest mögliche Intervall der u ausdehnen. Nun ist

$$\varrho^2 = 3(3\alpha^2 - 1 - 9\alpha u) \tag{8}$$

Um nicht durch die Unterscheidung positiver und negativer Werte dieses Ausdrucks gehindert zu sein, schreiben wir $-u$ für u Dann handelt es sich um Untersuchung der Function

$$v = \psi(u) = \frac{-2(9\alpha^2 + 1) + 27\alpha(\alpha^2 - 1)u - 27u^2}{[3(3\alpha^2 - 1) + 27\alpha u]^{\frac{3}{2}}} \tag{9}$$

Die Gleichung, welche deren Maxima und Minima bestimmt, lautet:

Digitized by Google

$$9\alpha u^2 + (9\alpha^4 + 3\alpha^2 - 4)u - 2\alpha(\alpha^2+1)(3\alpha^2+2) = 0$$

woraus als positive Wurzel:

$$u = \frac{2}{9}\,\frac{3\alpha^2+2}{\alpha} \tag{10}$$

Die negative Wurzel dieser Gleichung fällt ausser Betracht. Die positive ergibt ein positives Maximum, bis zu welchem v wächst, bevor es beständig und ins unendliche abnimmt. Für α wählen wir den grössten einziffrigen Wert, für welchen dieses Maximum < 1 ist; dieser ist $\alpha = 7$. Dann ist von $u = 1$ an über jenen Wert

$$u = \frac{298}{63}$$

der dem grössten v entspricht, hinaus, v positiv < 1 und, bis $u = 9927$, > -1.

Will man also $-y = \varphi(u)$, welches für $u < 1$ durch die Tafel bekannt ist, für

$$1 < u < 9927$$

finden, so berechnet man

$$v = \frac{-884 + 9072u - 27u^2}{\{3(146+63u)\}^{\frac{1}{2}}} \tag{11}$$

und sucht zu v, dessen absoluter Wert stets < 1 ist, in derselben Tafel den Functionswert

$$z = \varphi(v)$$

dann ist

$$\varphi(u) = \frac{\alpha\varphi(v) + \beta}{\varphi(v) + \gamma} \tag{12}$$

Sei z. B. nach erster Transformation die kubische Gleichung

$$y^2 + y = -100$$

Dann erhält man nach Gl. (S) für $\alpha = 7$:

$$\varrho^3 - 3(146 + 63 \,.\, 100) = 19338$$

und, wenn man für ϱ die negative Wurzel wählt, nach Gl. (7)

$$\beta = \frac{314}{\sqrt{19338}} = 2{,}2580; \quad \gamma = -\frac{148}{\sqrt{19338}} = -1{,}0643$$

ferner nach Gl. (10)

$$v = 0{,}23663\ldots$$

und aus der Tafel

$$\varphi(v) = 0{,}25221$$

Dies in Gl. (12) eingesetzt gibt:

$$\varphi(100) = -4{,}5698$$

was vom wahren Werte nahezu um 0,000,05 abweicht.

Durch Vergrösserung von α kann man das Intervall der u über die obere Grenze 9927 hinaus ins unbegrenzte erweitern, während es nach unten zu freilich aufhört bis 1 zu reichen. Setzt man nämlich $u = \alpha^3$, so wird nach Gl. (9)

$$v = -\frac{27\alpha^4 + 18\alpha^2 + 2}{(27\alpha^4 + 9\alpha^2 - 3)^{\frac{3}{2}}}$$

für $\alpha = \infty$ unendlich klein. Soll sich also das Intervall der u, wo $-1 < v < 1$ ist, nach oben und unten zu über irgend einen Wert $u = u_1$ hinaus erstrecken, so braucht man nur α nahe bei $u_1^{\frac{1}{3}}$ zu wählen.

§ 5. Vom Gebrauch der Tafel für $y^3 + y = u$ ist nun allein der Fall ausgeschlossen, wo die Gl. (1) 3 reelle Wurzeln hat. Diese reducirt sich nach § 1. auf

$$y^3 - y = 0$$

und zwar ist alsdann

$$-\frac{2}{3\sqrt{3}} < u < \frac{2}{3\sqrt{3}}$$

Sofern wir nur positive u berücksichtigen, lässt sich die Auflösung durch eine Tafel der Function

$$y = \varphi_1(u)$$

im Umfang von $u = 0$ bis $u = \frac{2}{3\sqrt{3}}$, entsprechend den Werten $y = 1$ bis $y = \frac{2}{\sqrt{3}}$, darstellen. Einer Erweiterung wie in § 4. bedarf es hier nicht.

Die angegebene Wurzel ist die einzig positive; die zwei negativen liegen zwischen -1 und 0, getrennt durch den Wert $y = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, welcher dem Maximum u entspricht. Ihre Werte sind, wenn $y = y_0$ in der Tafel steht:

$$-\tfrac{1}{2}y_0 \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{4 - 3y_0^2}$$

R. Hoppe.

Digitized by Google

5.

Bedingung, unter der 4 von einem Punkte aus gesehene Punkte in einem Raume liegen.

Sieht man von einem Punkte O aus 2 Punkte P_1 und P_2, so ist der Winkel P_1OP_2 messbar und seine Grösse unabhängig von allen andern Punkten. Durch OP_1P_2 wird eine Ebene bestimmt.

Sieht man zugleich einen dritten Punkt P_3, so liegt dieser dann und nur dann in derselben Ebene, wenn einer der 3 Winkel P_1OP_2, P_1OP_3, P_2OP_3 gleich der Summe der beiden andern ist. Andernfalls bestimmen die 4 Punkte $OP_1P_2P_3$ einen Raum (von 3 Dimensionen). Wir nennen eine solche dreifache Mannigfaltigkeit eine Dreidehnung.

Sieht man nun zugleich einen vierten Punkt P_4, so sind 6 Winkel

$$P_1OP_2, \quad P_2OP_3, \quad P_3OP_1, \quad P_3OP_4, \quad P_1OP_4 \quad P_2OP_4$$

deren Cosinus wir bzhw. mit

$$\alpha, \quad \beta, \quad \gamma, \quad \delta, \quad \varepsilon, \quad \zeta \tag{1}$$

bezeichnen, und deren Sinus mit

$$\alpha', \quad \beta', \quad \gamma', \quad \delta', \quad \varepsilon', \quad \zeta'$$

sämtlich unabhängig von einander gegeben. Liegt nun P_4 in demselben Raume $OP_1P_2P_3$, so ist nach der hier geltenden sphärischen Trigonometrie das System der 4 Strahlen OP_1, OP_2, OP_3, OP_4, welches wir die Ecke $P_1P_2P_3P_4$ nennen, bestimmt durch je 5 der 6 Grössen (1), und die sechste durch eine Relation mit ihnen verbunden. Indem wir die von den 6 Winkelebenen gebildeten Winkel in nicht miszuverstehender Weise mit je 3 der 4 Punkte bezeichnen, ergibt sich jene Relation in der Form

$$P_1P_4P_3 = \pm P_1P_4P_3 \pm P_2P_4P_3$$

und nach sphärisch trigonometrischem Ausdruck der Flächenwinkel durch die Seitenwinkel der dreikantigen Ecken, d. i. in den Grössen (1):

$$\Delta = 0$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist:

$$\Delta = 1 - \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2 - \delta^2 - \varepsilon^2 - \zeta^2 + \alpha^2\delta^2 + \beta^2\varepsilon^2 + \gamma^2\zeta^2$$
$$+ 2(\alpha\beta\gamma + \beta\delta\zeta + \alpha\varepsilon\zeta + \gamma\delta\varepsilon) - 2(\beta\varepsilon\gamma\zeta + \gamma\zeta\alpha\delta + \alpha\delta\beta\varepsilon)$$

Demnach ist $\Delta = 0$ die notwendige und hinreichende Bedingung, damit 4 von einem Punkte aus gesehene Punkte mit dem Auge in einer linearen Dreidehnung liegen.

Digitized by Google

Allgemein, d. h. nicht bedingt durch $\Delta = 0$, bestimmen die die Grössen (1) ein System von 4 Strahlen in der linearen Vierdehnung. Seien

$$a_k, \quad b_k, \quad c_k, \quad d_k \quad (k = 1, 2, 3, 4)$$

die Richtungscosinus der 4 Strahlen gegen 4 orthogonale Axen; dann hat man:

$$\left.\begin{aligned} a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 + d_1d_2 &= \alpha \\ a_1a_3 + b_1b_3 + c_1c_3 + d_1d_3 &= \gamma \\ a_1a_4 + b_1b_4 + c_1c_4 + d_1d_4 &= \varepsilon \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

$$\left.\begin{aligned} a_2a_3 + b_2b_3 + c_2c_3 + d_2d_3 &= \beta \\ a_2a_4 + b_2b_4 + c_2c_4 + d_2d_4 &= \zeta \\ a_3a_4 + b_3b_4 + c_3c_4 + d_3d_4 &= \delta \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Um die 6 Grössen, welche mit der willkürlichen Axenlage willkürlich bleiben, auf einfachste Art zu bestimmen, sei OP_1 die a Axe, OP_1P_2 die ab Ebene und $OP_1P_2P_3$ der abc Raum; dann ist

$$a_1 = 1; \quad b_1 = c_1 = d_1 = c_2 = d_2 = d_3 = 0$$

die Gl. (2) werden:

$$a_2 = \alpha; \quad a_3 = \gamma; \quad a_4 = \varepsilon$$

und die Gl. (3):

$$\alpha\gamma + b_2b_3 = \beta; \quad \alpha\varepsilon + b_2b_4 = \zeta; \quad \gamma\varepsilon + b_3b_4 + c_3c_4 = \delta$$

woraus:

$$b_2 = \alpha'; \quad b_3 = \frac{\beta - \alpha\gamma}{\alpha'}; \quad b_4 = \frac{\zeta - \alpha\varepsilon}{\alpha'}$$

$$c_3 = \frac{\sqrt{\Gamma}}{\alpha'^2}; \quad c_4 = \frac{\Theta}{\alpha'\sqrt{\Gamma}}; \quad d_4 = \sqrt{\frac{\Delta}{\Gamma}}$$

$$\Gamma = 1 - \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2 + 2\alpha\beta\gamma$$

$$\Theta = \delta\alpha'^2 - \beta\zeta - \gamma\varepsilon + \alpha(\beta\varepsilon + \gamma\zeta)$$

und zwar drückt d_4 den Normalabstand des Endpunkts der Strecke 1 auf dem Strahle OP_4 von dem Raume $OP_1P_2P_3$ aus. Dies bestätigt das bereits gewonnene Resultat, wonach $\Delta = 0$ die Bedingung dafür ist, dass die 4 Strahlen in einem Raume liegen.

R. Hoppe.

6.

Entwickelung von $\sin E_n(\varepsilon, \varphi)$ in eine nach Potenzen von $\sin \varphi_n$ fortschreitende Reihe.

Setzt man in der Bürmaunn'schen Reihe

$$f(x) - f(a) = [\varphi(x) - \varphi(a)] A_1 + \frac{1}{1 \cdot 2} [\varphi(x) - \varphi(a)]^2 A_2 + \ldots$$

wo

$$A_1 = \left\{\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}\right\} x = a, \quad A_2 = \left\{\frac{A_1'}{\varphi'(\varphi'}\right\} x = a \quad \text{u. s. w.}$$

$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{m} E(\varepsilon, \varphi)\right)$$

wo

$$E(\varepsilon, \varphi) = \int_0^{\varphi} \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2\varphi}\, d\varphi$$

ferner

$$\varphi(x) = \sin \frac{\varphi}{m}$$

so erhält man, da $f(a) = \varphi(a) = 0$ für $a = 0$ ist:

$$\sin\left(\frac{1}{m} E(\varepsilon, \varphi)\right) = \sin\frac{\varphi}{m} - \frac{m^2\varepsilon^2 \left(\sin\frac{\varphi}{m}\right)^3}{3!} + \frac{m^4(4\varepsilon^2 - 3\varepsilon^4)\left(\sin\frac{\varphi}{m}\right)^5}{5!} - \ldots$$

Für $m = 1$ geht diese Reihe über in

$$\text{I)} \quad \sin E(\varepsilon, \varphi) = \sin\varphi - \frac{\varepsilon^2 \sin^3\varphi}{3!} + \frac{(4\varepsilon^2 - 3\varepsilon^4)\sin^5\varphi}{5!} - \ldots$$

dieselbe lässt sich also leicht aus der Reihe

$$E(\varepsilon, \varphi) = \varphi - \frac{\varepsilon^2 \varphi^3}{3!} + \frac{(4\varepsilon^2 - 3\varepsilon^4)\varphi^5}{5!} - \ldots$$

ableiten. (T. VIII, Seite 378.)

Die Recursionsformel für die letztere ist

$$\begin{aligned} F_{(\varphi=0)}{}^{m+2} = z^{m+2} = {} & (2m_2 - m_1)\varepsilon^2 z^m - (2m_4 - m_3)\, 2^2 \varepsilon^2 z^{m-2} \\ & + (2m_6 - m_5)\, 2^4 \varepsilon^2 z^{m-4} - (2m_8 - m_7)\, 2^6 \varepsilon^2 z^{m-6} \\ & + (2m_{10} - m_9)\, 2^8 \varepsilon^2 z^{m-8} - \ldots \end{aligned}$$

wie aus dem binomischen Satze für die Differentialquotienten eines Products folgt, da

Digitized by Google

$$\varepsilon^2 \sin\varphi \cos\varphi \, F(\varphi)' = -(1 - \varepsilon^2 \sin^2\varphi) \, F(\varphi)''$$

Statt $\sin\varphi$ kann man in Reihe I auch $\frac{\varepsilon + \cos v}{1 + \varepsilon \cos v}$ setzen, wo v die wahre Anomalie bezeichnet, wenn $\cos v$ zwischen den Grenzen $-\varepsilon$ und 1 genommen wird.

Da

$$\frac{dE(\varepsilon, \varphi)}{d\varphi} = (1 - \varepsilon^2 \sin^2\varphi)^{1/2}$$

also, wenn man $E(\varepsilon, \varphi)$ kurz mit E bezeichnet

$$\frac{d\varphi}{dE} = \frac{1}{(1 - \varepsilon^2 \sin^2\varphi)^{1/2}}$$

$$\frac{d^2\varphi}{dE^2} = \frac{\varepsilon^2 \sin\varphi \cos\varphi}{(1 - \varepsilon^2 \sin^2\varphi)^{3/2}} \cdot \frac{d\varphi}{dE} = \frac{\varepsilon^2 \sin\varphi \cos\varphi}{(1 - \varepsilon^2 \sin^2\varphi)^2} \text{ u. s. w.}$$

so ergiebt sich nach der Taylor'schen oder auch nach der Bürmann-schen Reihe

II) $$\varphi = E + \frac{\varepsilon^2 E^3}{3!} + \frac{1}{5!}(13\varepsilon^4 - 4\varepsilon^2) E^5 + \ldots$$

Für $\varepsilon = 0$ wird diese Reihe

$$\varphi = E$$

für $\varepsilon = 1$ wird sie

$$\varphi = \arcsin E = E + \frac{E^3}{3!} + \frac{3^2 E^5}{5!} + \ldots$$

$$= E + \frac{1E^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3 \, E^5}{2 \quad 4 \cdot 5} + \ldots$$

Da E in letzterem Falle $\leqq 1$, so muss Reihe II convergiren.

Nach der Bürmann'schen Reihe erhält man ferner

$$\sin\varphi = \sin E + \frac{\varepsilon^2 \sin^3 E}{3!} + \frac{(13\varepsilon^4 - 4\varepsilon^2) \sin^5 E}{5!} + \ldots$$

eine Reihe welche sich leicht aus II) ableiten lässt.

Setzt man $\sin(\sin E) = \sin E_1$, $\sin(\sin\varphi) = \sin\varphi_1$ u. s. w., so geht I) über in

$$\sin E_n = \sin\varphi_n - \frac{\varepsilon^2 \sin^3\varphi_n}{3!} + \ldots$$

Da

$$\frac{\varphi\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\varphi}}{m} = \frac{\varphi}{m} - \frac{\varepsilon^2\varphi^3}{2!\,m} + \frac{(4\varepsilon^2-3\varepsilon^4)\varphi^5}{4!\,m} - \ldots$$

so erhält man für $n = 3$ und $m = 9$

III) $$\sin E_3 = \frac{8+\sin\varphi_3\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\varphi_4}}{9}\sin\varphi_3 - \frac{6\varepsilon^2\sin^3\varphi_3}{3!\,9}$$
$$+\frac{4(4\varepsilon^2-3\varepsilon^4)\sin^5\varphi_3}{5!\,9} - \frac{2(16\varepsilon^2-60\varepsilon^4+45\varepsilon^6)}{7!\,9}\sin^7\varphi_3 + 0$$
$$+\frac{2(256\varepsilon^2-16320\varepsilon^4+105840\varepsilon^6-189000\varepsilon^8+99225\varepsilon^{10})}{11!\,9}\sin^{11}\varphi_3$$
$$-\ldots$$

Für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ist $\varphi_3 < \frac{\pi}{4}$, und Reihe I giebt durch Summirung der ersten 4 Glieder für den Sinus des Ellipsenquadranten eine Genauigkeit geringsten Falls bis 4, Reihe III unter denselben Bedingungen für $\sin E_3$ eine solche von 7 Decimalstellen, wenn die halbe grosse Achse $a = 1$ gesetzt wird.

Wenn E sehr nahe an $\frac{\pi}{2}$ liegt, so kann man

$$\cos E = \sqrt{1-\sin^2 E} = \sqrt{1-(1-x)^2}$$

oder annähernd $= \sqrt{2x}$ berechnen, um für E eine grössere Genauigkeit zu erhalten.

Luckenwalde. C. Benz.

7.

Recursionsformel zur Rectification der Ellipse. T. VII. S. 378.

Aus dem binomischen Satze für die Differentialquotienten eines Products folgt, da

$$\varepsilon^2\sin\varphi\cos\varphi\,F^{I}(\varphi) = -(1-\varepsilon^2\sin^2\varphi)\,F^{II}(\varphi)$$

ist:

$$F^{(m+2)}(\varphi=0) = (2m_2-m_1)\,\varepsilon^2 v^m - (2m_4-m_3)\,2^2\varepsilon^2 v^{m-2}$$
$$+(2m_8-m_5)\,2^4\varepsilon^2 v^{m-4} - (2m_6-m_7)\,2^6\varepsilon^2 v^{m-6}$$
$$+(2m_{10}-m_9)\,2^8\varepsilon^2 v^{m-8} - \ldots$$

C. Benz.

8.

Reihe zur numerischen Berechnung eines Ellipsenbogens.

Es ist für jeden Wert von m_1, wenn

$$E = \int_0^{\varphi} \sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\varphi}\, d\varphi$$

$$m_1 E = m_1\varphi - \frac{\varepsilon^2 m_1\varphi^3}{3!} + \frac{(4\varepsilon^2-3\varepsilon^4)}{5!} m_1\varphi^5 - \ldots$$

(Vergl. „Anwendung des Taylor'schen Satzes zur Rectification der Ellipse") oder:

1) $$m_1 E = m_1\varphi - \frac{\varepsilon^2(m_1\varphi)^3}{3!\ m_1^2} + \frac{(4\varepsilon^2-3\varepsilon^4)}{5!\ m_1^4}(m_1\varphi)^5 - \ldots$$

und vermittelst der Bürmann'schen Reihe für $m_1\varphi \leqq \frac{\pi}{2}$

2) $$\sin(m_1 E) = \sin(m_1\varphi) - \frac{\varepsilon^2(\sin(m_1\varphi))^3}{3!\ m_1^2} + \frac{(4\varepsilon^2-3\varepsilon^4)\ (\sin(m_1\varphi))^5}{5!\ m_1^4} - \ldots$$

(Vergl. „Entwickelung von sin E_n in eine nach Potenzen von sin φ_n fortschreitende Reihe", wo $\frac{1}{m}$ statt m_1 gesetzt und auch die Recursionsformel angegeben ist.)

Es ist nämlich, wenn

$$\frac{dE}{d\varphi} = E^{\mathrm{I}} = \sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\varphi}$$

u. s. w., für $\varphi = 0$

$$E^{\mathrm{I}} = 1,\quad E^{\mathrm{II}} = 0,\quad E^{\mathrm{III}} = -\varepsilon^2,\quad E^{\mathrm{IV}} = 0,\quad E^{\mathrm{V}} = 4\varepsilon^2-3\varepsilon^4$$

und in der Bürmann'schen Reihe, ebenfalls für $\varphi = 0$,

$$A_1 = 1,\quad A_2 = 0,\quad A_3 = E^{\mathrm{III}} = -\varepsilon^2,\quad A_4 = 0$$

$$A_5 = 9-9+\frac{9E^{\mathrm{III}}}{m_1^2} - \frac{9E^{\mathrm{III}}}{m_1^2} + \frac{E^{\mathrm{V}}}{m_1^4} = \frac{E^{\mathrm{V}}}{m_1^4} = \frac{4\varepsilon^2-3\varepsilon^4}{m_1^4}$$

Man kann also Reihe 2) aus Reihe 1) dadurch ableiten, dass man $\sin(m_1\varphi)$ für $m_1\varphi$ setzt. Wiederholt man das Verfahren unter der Bedingung, dass auch $m_2, m_3 \ldots m_\nu$ je $\leqq \frac{\pi}{2}$, indem man

$\sin(m_1 E)$ durch E_{m_1}, $\sin(m_1 \varphi)$ durch φ_{m_1}, ferner $\sin(m_2 \sin(m_1 E))$ durch $E_{m_1 m_2}$, $\sin[m_2 \sin(m_1 \varphi)]$ durch $\varphi_{m_1 m_2}$ u. s. w. bezeichnet, so erhält man

$$3)\quad E_{m_1 m_2 \ldots m_\nu} = \varphi_{m_1 m_2 \ldots m_\nu} - \frac{\varepsilon^2 (m_1 m_2 \ldots m_\nu)^3}{3!\, m_1^2 \cdot m_2^2 \cdot \ldots \cdot m_\nu^2} + \ldots$$

und für

$$m_1 \varphi = m_2 = m_3 = \ldots = m_\nu = \frac{\pi}{2}$$

$$4)\quad E_{m_1 \left(\frac{\pi}{2}\right)_2 \ldots \left(\frac{\pi}{2}\right)_\nu} = 1 - \frac{\varepsilon^2 \cdot \varphi^2}{3! \left[\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\right]^\nu} + \frac{(4\varepsilon^2 - 3\varepsilon^4) \cdot \varphi^4}{5! \left[\left(\frac{\pi}{2}\right)^4\right]^\nu} - \frac{(16\varepsilon^2 - 60\varepsilon^4 + 45\varepsilon^6)}{7! \left[\left(\frac{\pi}{2}\right)^6\right]^\nu} \varphi^6 + \ldots$$

Der Convergenzquotient dieser Reihe ist $< \frac{\varphi^2}{\left[\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\right]^\nu}$, dieselbe also in Bezug auf diesen Ausdruck in gewissem Sinne in beliebigem Grade convergent. Bei der Berechnung muss aber stets das 2. Glied berücksichtigt werden, da E eine Function von φ und ε ist. Die Berechnung gilt zunächst für die halbe grosse Achse $a = 1$. Für andere Werte hat man schliesslich den Wert von E mit a zu multipliciren.

Luckenwalde, den 16. März 1894.

C. Benz.

9.

Bemerkungen zur Summenformel für die Potenzreihe der natürlichen Zahlen

1.

Bezeichnen wir die Potenzreihe der natürlichen Zahlen $1^x + 2^x + 3^x + \ldots + n^x$ mit $f(x)$, so ist bekanntlich

$$(2r+1) f(2r) = n^{2r+1} + \tfrac{1}{2}\binom{2r+1}{1} n^{2r} + \binom{2r+1}{2} B_2 n^{2r-1} - \binom{2r+1}{4} B_4 n^{2r-3} \pm \ldots + (-1)^{r-1} \binom{2r+1}{2r} B_{2r} n \qquad (1)$$

und

Digitized by Google

$$(2r+2)f(2r+1) = n^{2r+2} + \tfrac{1}{2}\binom{2r+2}{1}n^{2r+1} + \binom{2r+2}{2}B_2 n^{2r} - \binom{2r+2}{4}B_4 n^{2r-2} \pm \ldots + (-1)^{r-1}\binom{2r+2}{2r}B_{2r}n^2 \quad (2)$$

worin B_2, B_4 . . . die Bernoulli'schen Zahlen bedeuten. Diese Ausdrücke lassen sich in einfacher Weise mit Hülfe der Gleichung

$$(n+1)^{x+1} = \binom{x+1}{1}f(x) + \binom{x+1}{2}f(x-1) + \ldots + \binom{x+1}{x}f(1) + n + 1 \quad (3)$$

ableiten, welche es ermöglicht $f(x)$ durch $f(x-1)$, $f(x-2)$, . . . $f(1)$ zu bestimmen. Dabei ergeben sich für die Bernoulli'schen Zahlen die recurrenten Beziehungen

$$\binom{2r+1}{1}B_{2r} - \binom{2r+1}{3}B_{2r-2} + \binom{2r+1}{5}B_{2r-4} \mp \ldots + (-1)^{r-1}\binom{2r+1}{2r-1}B_2 = (-1)^{r-1}\frac{2r-1}{2} \quad (4)$$

und

$$\binom{2r+2}{2}B_{2r} - \binom{2r+2}{4}B_{2r-2} + \binom{2r+2}{6}B_{2r-4} \mp \ldots + (-1)^{r-1}\binom{2r+2}{2r}B_2 = (-1)^{r-1}\cdot r \quad (5)$$

Wie die Darstellungen von $f(2r)$ und $f(2r+1)$ erkennen lassen, ist für alle Werte von r mit Ausnahme von null

$$\frac{df(2r+1)}{dn} = (2r+1)f(2r) \quad (6)$$

und es würde sich durch Betrachtung von $f(2r)$ und $f(2r-1)$ ebenso leicht erweisen lassen, dass

$$\frac{df(2r)}{dn} = 2rf(2r-1) + (-1)^{r-1}B_{2r} \text{ sein muss.} \quad (7)$$

Hiernach ist es möglich, mit $f(1)$ beginnend, die Ausdrücke für $f(2)$, $f(3)$ u. s. f. nach den Regeln der Integration zu finden. Aus jeder Reihe mit geradem Argument bekommt man nach diesem Verfahren bis auf einen constanten Factor sämtliche Glieder der folgenden Reihe, aus jeder Reihe mit ungeradem Argument alle Glieder mit Ausschluss des letzten in n. Der Coefficient dieses Gliedes ist gleich der abwechselnd mit dem positiven und negativen Vorzeichen versehenen folgenden Bernoulli'schen Zahl. So findet sich

$$
\begin{aligned}
f(1) &= \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n \\
f(2) &= \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n \\
f(3) &= \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2 \\
f(4) &= \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n \\
f(5) &= \frac{1}{6}n^6 + \frac{1}{2}n^5 + \frac{5}{12}n^4 - \frac{1}{12}n^2 \\
f(6) &= \frac{1}{7}n^7 + \frac{1}{2}n^6 + \frac{1}{2}n^5 - \frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{42}n \\
f(7) &= \frac{1}{8}n^8 + \frac{1}{2}n^7 + \frac{7}{12}n^6 - \frac{7}{24}n^4 + \frac{1}{12}n^2 \\
f(8) &= \frac{1}{9}n^9 + \frac{1}{2}n^8 + \frac{2}{3}n^7 - \frac{7}{15}n^5 + \frac{2}{9}n^3 - \frac{1}{30}n \\
f(9) &= \frac{1}{10}n^{10} + \frac{1}{2}n^9 + \frac{3}{4}n^8 - \frac{7}{10}n^6 + \frac{1}{2}n^4 - \frac{3}{20}n^2 \\
f(10) &= \frac{1!}{11}n^{11} + \frac{1}{2}n^{10} + \frac{5}{6}n^9 - n^7 + n^5 - \frac{1}{2}n^3 + \frac{5}{66}n \\
f(11) &= \frac{1}{12}n^{12} + \frac{1}{2}n^{11} + \frac{11}{12}n^{10} - \frac{11}{8}n^8 + \frac{11}{6}n^6 - \frac{11}{8}n^4 \\
&\qquad + \frac{5}{12}n^2
\end{aligned}
\tag{8}
$$

2.

Bei geraden Exponenten schliessen die Reihen mit n, bei ungeraden mit n^2, es enthalten also sämtliche Reihen den Factor n. Die Gleichung (3) zeigt, dass ausserdem noch in sämtlichen f der Factor $n+1$ enthalten sein muss.

Wir wollen nun nachweisen, dass $f(2r)$ ferner noch durch $2n+1$ und $f(2r+1)$ durch $n(n+1)$ teilbar sein muss, und dass sowol $\frac{f(2r)}{n(n+1)(2n+1)}$ als auch $\frac{f(2r+1)}{n^2(n+1)^2}$ nach Potenzen von $n(n+1)$ fortschreitende Reihen bilden. Es wird sich alsdann $f(2r)$ darstellen lassen als $f(2)$ multiplicirt mit einer Function von $f(1)$ und $f(2r+1)$ als eine Function von $f(1)$ allein. In der Tat können die Gleichungen (8) umgeformt werden in

Digitized by Google

$$
\begin{aligned}
f(1) &= \frac{n(n+1)}{2}\\
f(2) &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\\
f(3) &= \frac{n^2(n+1)^2}{4}\\
f(4) &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{30}[3n(n+1)-1]\\
f(5) &= \frac{n^2(n+1)^2}{12}[2n(n+1)-1]\\
f(6) &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{42}[3n^2(n+1)^2-3n(n+1)+1]\\
f(7) &= \frac{n^2(n+1)^2}{24}[3n^2(n+1)^2-4n(n+1)+2]\\
f(8) &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{90}[5n^3(n+1)^3-10n^2(n+1)^2\\
&\qquad +9n(n+1)-3]\\
f(9) &= \frac{n^2(n+1)^2}{20}[2n^3(n+1)^3-5n^2(n+1)^2+6n(n+1)-3]\\
f(10) &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{66}[3n^4(n+1)^4-10n^3(n+1)^3\\
&\qquad +17n^2(n+1)^2-15n(n+1)+5]\\
f(11) &= \frac{n^2(n+1)^2}{24}[2n^4(n+1)^4-8n^3(n+1)^3\\
&\qquad +17n^2(n+1)^2-20n(n+1)+10]
\end{aligned}
\qquad (9)
$$

3.

Unsere Behauptung ist in aller Vollständigkeit bewiesen, wenn sich zeigen lässt, dass $f(2r+1)$ dargestellt werden kann als Function von $n(n+1)$. Nach (6) ist $f(2r)$ bis auf den Factor $\frac{1}{2r+1}$ gleich dem Differentialquotienten von $f_1(2r+1)$ nach n. Wenn nun $f(2r+1)$ eine Function von $n(n+1)$ ist, muss $f(2r)$ gleich einer ebensolchen Function sein, multiplicirt mit $\frac{dn(n+1)}{dn}$ oder $2n+1$, wie behauptet worden. Da ferner nach (2) die Function $f(2r+1)$ teilbar ist durch n^2, muss sie ausserdem noch den Factor $(n+1)^2$ enthalten. Diese letztere Eigenschaft kann auch aus dem Umstande gefolgert werden, dass der Differentialquotient von $f(2r+1)$ d. h. $(2r+1)f(2r)$, wie wir wissen, durch $n+1$ teilbar ist. Dass $f(2r)$

den Factor $2n+1$ enthält, lässt sich auch direct aus der Formel nachweisen, indem man zeigt, dass $f(2r)$ für $n = -\frac{1}{2}$ verschwindet. Dieser Nachweis führt auf die bekannte Beziehung

$$\binom{2r+1}{1} 2^{2r} B_{2r} - \binom{2r+1}{3} 2^{2r-2} B_{2r-2} \pm \ldots + (-1)^r \binom{2r+1}{2r+1} 2^0 \cdot B_0 = (-1)^{r-1}(2r+1) \qquad (10)$$

Es handelt sich also um den Nachweis, dass $f(2r+1)$ eine reine Function von $n(n+1)$ ist. Derselbe ist erbracht, wenn sich beweisen lässt, dass $f(2r+1)$ für $n = a$ und $n = -(a+1)$ stets denselben Wert annimmt, was auch a sein mag. Es ist nicht schwer zu zeigen, dass, wenn eine ganze rationale Function von n diese Eigenschaft hat, sie sich muss darstellen lassen als Function von $n(n+1)$.

Wir wollen beim Beweise, insofern wir n als Veränderliche ansehen, die Function mit $f(n)$ notiren und erstens voraussetzen, dass dieselbe für $n = a$ und für $n = -(a+1)$ denselben Wert k annimmt. Dann muss

$$f(n) = (n-a) f_1(n) + k \quad \text{und} \quad f(n) = (n+a+1) f_2(n) + k$$

sein, woraus folgt, dass

$$(n-a) f_1(n) = (n+a+1) f_2(n)$$

also $f_1(n)$ durch $n+a+1$ und $f_2(n)$ durch $n-a$ teilbar ist. Darum stellt sich $f(n)$ auch dar als

$$f(n) = (n-a)(n+a+1) f_3(n) + k = [n(n+1) - a^2 - a] f_3(n) + k$$

Wir nehmen jetzt zweitens an, dass $f(n)$ auch für $n = b$ und $n = -(b+1)$ denselben Wert erhält. Da $n(n+1)$ für beide Werte von n sich nicht ändert, muss $f_3(n)$ dieselbe Eigenschaft haben und sich darum darstellen als

$$f_3(n) = [n(n+1) - b^2 - b] f_4(n) + l$$

woraus

$$f(n) = [n(n+1) - a^2 - a][n(n+1) - b^2 - b] f_4(n) + [n(n+1) - a^2 - a] l + k$$

Soll $f(n)$ auch für $n = c$ und $n = -(c+1)$ denselben Wert besitzen, so muss dasselbe für $f_4(n)$ der Fall sein, und

$$f_4(n) = [n(n+1) - c^2 - c] - f_5(n) + m \text{ sein.}$$

Digitized by Google

Fahren wir in dieser Weise fort, so erhalten wir, da der Grad der Functionen $f_1(n)$, $f_2(n)$, . . . beständig abnimmt, schliesslich für $f(n)$ eine Darstellung als Function von $n(n+1)$.

4.

Wir setzen nunmehr in $f(2r+1)$ für n erst den Wert a, dann $-(a+1)$ ein. Im ersten Falle ergiebt sich bis auf den Factor $2r+2$ die Reihe

$$a^{2r+2}+\tfrac{1}{2}\binom{2r+2}{1}a^{2r+1}+\binom{2r+2}{2}B_2a^{2r}-\binom{2r+2}{4}B_4a^{2r-2}\pm\ldots$$
$$+(-1)^{r-1}\binom{2r+2}{2r}B_{2r}a^2$$

im anderu Falle die Reihe

$$(a+1)^{2r+2}-\tfrac{1}{2}\binom{2r+2}{1}(a+1)^{2r+1}+\binom{2r+2}{2}B_2(a+1)^{2r}$$
$$-\binom{2r+2}{4}B_4(a+1)^{2r-2}\pm\ldots+(-1)^{r-1}\binom{2r+2}{2r}B_{2r}(a+1)^2$$

Wir entwickeln die zweite Reihe nach Potenzen von a und zeigen, dass die Coefficienten der Reihe noch mit denjenigen der ersten Reihe übereinstimmen. Die Identität der Coefficienten von a^{2r+2} ist klar, ebenso von a^{2r+1}. Für a^{2r-2s} ergiebt sich bei der ersten Reihe $(-1)^s\binom{2r+2}{2r+2}B_{2s+2}$, bei der zweiten dagegen

$$\binom{2r+2}{2s+2}-\tfrac{1}{2}\binom{2r+2}{1}\binom{2r+1}{2s+1}+\binom{2r+2}{2}\binom{2r}{2s}B_2$$
$$-\binom{2r+2}{4}\binom{2r-2}{2s-2}B_4\pm\ldots+(-1)^s\binom{2r+2}{2s+2}\binom{2r-2s}{0}B_{2s+2}$$

Diese beiden Coefficienten sind gleich, wenn

$$0=\binom{2r+2}{2s+2}-\tfrac{1}{2}\binom{2r+2}{1}\binom{2r+1}{2s+1}+\binom{2r+2}{2s+2}\left[\binom{2s+2}{2s}B_2\right.$$
$$\left.-\binom{2s+2}{2s-2}B_4\pm\ldots+(-1)^{s-1}\binom{2s+2}{2}B_{2s}\right]$$

ist. Die Klammer ist aber nach (5) gleich s, wonach sich die Identität nach kurzer Berechnung ergiebt.

Für die Coefficienten der ungeraden Potenzen von a ergiebt die erste Reihe bis auf denjenigen von a^{2r+1} den Wert null. Bei der zweiten kommt für $a^{2r-2s+1}$ die Reihe

Digitized by Google

$$\binom{2r+2}{2s+1}-\tfrac{1}{2}\binom{2r+2}{1}\binom{2r+1}{2s}+\binom{2r+2}{2}\binom{2r}{2s-1}B_2$$
$$-\binom{2r+2}{4}\binom{2r-2}{2s-3}B_4 \pm \ldots +(-1)^{s-1}\binom{2r+2}{2s}\binom{2r-2s+2}{1}B_{2s}$$

oder

$$\binom{2r+2}{2s+1}-\tfrac{1}{2}\binom{2r+2}{1}\binom{2r+1}{2s}+\binom{2r+2}{2s+1}\Big[\binom{2s+1}{2s-1}B_2$$
$$-\binom{2s+1}{2s-3}B_4 \pm \ldots +(-1)^{s-1}\binom{2s+1}{1}B_{2s}\Big]$$

Die Klammer ergiebt aber nach (4) den Wert $\frac{2s-1}{2}$. Setzen wir diesen Wert ein, so kommt nach geringer Umformung der Wert null.

Damit ist bewiesen, dass $f(2r+1)$ für $n = a$ und $n = -(a+1)$ denselben Wert annimmt und sich darstellt als Function von $n(n+1)$.

Was die Reihe $f(2r)$ anlangt, so würde sich auf gleiche Art zeigen lassen, dass sie für a und $-(a+1)$ gerade entgegengesetzte Werte annimmt. Dieses geht aber auch aus der Tatsache hervor, dass $f(2r)$ gleich $2n+1$ mal einer Function von $n(n+1)$ ist. Während diese letztere Function für a und $-(a+1)$ denselben Wert behält, kehrt sich $2n+1$ in sein Gegenteil.

Stephan Glaser.

Berlin, den 10. Februar 1894.

Digitized by Google

I.

Anwendung eines Abbildungsprincips zur Untersuchung von Curven zweiten Grades.

Von

Stephan Glaser.

Einleitung.

Es soll im Folgenden eine bekannte lineare Substitution, welche bei speciellen Aufgaben der Ellipse wiederholt verwendet worden ist, der Abbildung der ganzen Ebene zu Grunde gelegt und zur Untersuchung sämtlicher Curven zweiten Grades benutzt werden. Es handelt sich um die Substitution

$$x = a\xi, \quad y = b\eta$$

vermöge welcher die Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

sich in den Kreis vom Radius 1, die Hyperbel

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

sich in die gleichseitige Hyperbel abbildet. Jedem Punkte der einen Ebene entspricht ein Punkt der andern und umgekehrt, und es ist die Abbildung so geartet, dass parallele Linien sich wieder in parallele Linien abbilden und das Verhältniss jeder Strecke zu ihrem Bilde nur abhängig ist von der Richtung, also für parallele Geraden

Digitized by Google

constant bleibt. In Folge dieser Eigenschaften ist es möglich, alle auf die Ellipse bezüglichen Sätze aus den entsprechenden beim Kreise abzuleiten. Ganz in derselben Weise lassen sich auch die Eigenschaften der beliebigen Hyperbel aus denjenigen der gleichseitigen entwickeln. Während aber der Kreis ein einfaches geometrisches Gebilde ist, dessen Eigenschaften mit elementaren Mitteln erkannt werden können, bedarf die gleichseitige Hyperbel zur Untersuchung ihrer Eigenschaften selbst schon analytischer Methoden. Darum bietet die Anwendung des Princips dann, wenn sie bei der Ellipse von besonderem Vorteil ist, nämlich bei der Untersuchung der Fundamentaleigenschaften der Curve, bei der Hyperbel nur geringen Nutzen. Augenfälliger wird derselbe jedoch, wenn es sich um solche Aufgaben handelt, die auch beim Kreise schon eine analytische Behandlung erfordern. Für solche Fälle gestattet es die Abbildung, die Aufgabe bis zu einem gewissen Grade für beide Arten von Curven gemeinsam zu behandeln, indem man der Untersuchung die Gleichung

$$\xi^2 + \varepsilon\eta^2 = 1$$

zu Grunde legt und erst zum Schluss die Unterscheidung der beiden Fälle

$$\varepsilon = +1 \quad \text{und} \quad \varepsilon = -1$$

eintreten lässt.

Nachdem in den ersten Capiteln eine Erklärung des Princips und seiner wesentlichsten Eigenschaften gegeben und als erste Anwendung die Fundamentaleigenschaften des Kreises auf die Ellipse übertragen sind, wird an einer besonders hierzu geeigneten Aufgabe der angeführte Vorteil auseinander gesetzt. Dieselbe ist dem Gebiete der relativen Maxima und Minima entnommen und lautet: Es soll das Dreieck vom grössten oder kleinsten Inhalt gefunden werden, dessen eine Ecke fest liegt, während die beiden andern auf einem Kegelschnitt sich bewegen.

Im zweiten Teile folgt eine Anwendung anderer Art. Wie sich schon bei den Grundeigenschaften der Ellipse herausstellt, lassen sich dieselben sämtlich mit entsprechenden Modificationen auf die Hyperbel übertragen. In weiterer Verfolgung dieses Gedankens kann jeder in Bezug auf die Ellipse gefundene Satz zum Ausgangspunkt einer Untersuchung über die Hyperbel gemacht werden, und so wird denn, da die Eigenschaften der Ellipse unmittelbar dem Kreise entnommen werden, indirect dieser doch wieder der Ausgangspunkt einer Reihe von Sätzen, die sich auf beliebige Kegelschnitte beziehen. Dieses wird im zweiten Teile bei einer bestimmten Gruppe von Beispielen näher ausgeführt. Zunächst werden die Sätze von den merk-

Digitized by Google

würdigen Punkten des Dreiecks, vom umbeschriebenen und den berührenden Kreisen, vom Kreise der 9 Punkte (Feuerbach'scher Kreis) und damit verwandte Sätze auf die Ellipse übertragen. Dabei zeigt sich schon, dass ein Teil derselben ganz unabhängig von der Annahme eines umbeschriebenen Kreises ausgesprochen werden kann. Es wird nun die Allgemeingültigkeit an der Gleichung

$$\xi^2 + \varepsilon\eta^2 = 1$$

geprüft und nachgewiesen, dass die Sätze für alle Kegelschnitte Geltung haben.

Im dritten Abschnitt wird zuerst eine Reihe von Anwendungen besprochen, die sich im letzten Grunde auf den vom Kreise auf die Ellipse übertragenen Satz stützen, dass die Producte der Abschnitte zweier Secanten eines Kegelschnitts gleich sind, wenn dieselben gleiche Neigung zur Axe haben. Dieser Satz wird dazu benutzt, um die Beziehungen eines Kreises zu beliebigen Kegelschnitten eingehend zu erörtern. Es schliesst sich hieran als Anwendung eine Reihe von Constructionsaufgaben, in welchen es sich darum handelt, für Kegelschnitte, die durch einzelne Punkte oder berührende Geraden und Kreise näher bestimmt sind, zur Richtung der Axen den Mittelpunkt oder umgekehrt zum Mittelpunkt die Richtung der Axen zu finden. Alle diese Aufgaben lassen sich mit alleiniger Benutzung von Zirkel und Lineal lösen.

Sodann werden die Beziehungen von Ellipse und beliebigem Kegelschnitt mit Hülfe des Abbildungsprincips auf die gewonnenen Resultate zurückgeführt und gemeinsame Eigenschaften aller Curven entwickelt, die sich durch 4 auf einer Ellipse liegende Punkte zeichnen lassen. Naturgemäss führen die Untersuchungen dann zu der Frage nach den Kegelschnitten, die sich durch 4 beliebige Punkte überhaupt zeichnen lassen, und nach dem geometrischen Ort ihrer Mittelpunkte. Was den letzteren angeht, so ergiebt sich das Resultat, dass derselbe identisch ist mit der Curve der 9 Punkte für jedes aus 3 Punkten gebildete Dreieck, sofern man den vierten als Schnittpunkt der Transversalen ansieht. Da eine solche Zusammenfassung auf 4 verschiedene Arten möglich ist, muss darum auch jede Curve der 9 Punkte zu 4 verschiedenen Dreiecken gehören und eventuell also auch sämtliche 16 berührende ähnliche Curven dieser Dreiecke berühren.

I.

§ 1.

Erklärung des Princips.

Gegeben sei eine Ellipse mit den Halbaxen a und b, um den Coordinatenanfangspunkt O als Mittelpunkt beschrieben. Bezeichnen wir die Coordinaten eines beliebigen Punktes mit (x, y) und die seines Bildes mit (ξ, η), so geschieht die Abbildung nach der Substitution

$$x = a\xi, \quad y = b\eta$$

Der Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

selbst entspricht dann der Kreis

$$\xi^2 + \eta^2 = 1$$

jedem Punkte innerhalb der Ellipse entspricht ein Punkt innerhalb des Kreises, jedem Punkte ausserhalb der Ellipse ein Punkt ausserhalb des Kreises. Die Construction des zu einem Punkte des Kreises gehörigen Punktes der Ellipse kann in der folgenden Weise geschehen: Man zeichne um O noch zwei weitere Kreise mit den Radien a und b, verbinde O mit dem gegebenen Punkte und verlängere diese Verbindungslinie bis zum Schnitt mit den beiden Kreisen in A und B. Hat der gegebene Punkt die Coordinaten $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$, so sind die Coordinaten von A gleich $a\cos\varphi$ und $a\sin\varphi$, die von B gleich $b\cos\varphi$ und $b\sin\varphi$. Dann liefert die erste Coordinate von A combinirt mit der zweiten von B den zugehörigen Punkt der Ellipse. Man hat also nur durch A eine Parallele zur y axe, durch B eine solche zur x axe zu ziehen; der Schnittpunkt derselben ist der gesuchte Punkt der Ellipse. Natürlich kann man ebenso leicht zu jedem Punkte der Ellipse den zugehörigen des Kreises finden.

Es mag noch erwähnt werden, dass man durch Combination der zweiten Coordinate von A mit der ersten von B einen zweiten Punkt erhält, der eine wichtige Bedeutung für die Ellipse hat. Die Verbindungslinie von O mit diesem Punkte giebt nämlich die Richtung der Normalen an. Man erhält also zu jedem Punkte des Kreises gleichzeitig den zugehörigen Punkt der Ellipse und die Richtung der Normalen in diesem Punkte und umgekehrt zu jedem Punkte der Ellipse die Richtung der Normalen und den entsprechenden Punkt des Kreises.

Nur wenig complicirter wird die Construction, wenn es sich darum handelt, zu einem beliebigen Punkte (ξ, η) den zugehörigen Punkt (x, y) zu finden. Hat der gegebene Punkt die Polarcoordinaten $s\cos\varphi$ und $s\sin\varphi$, so construire man zu dem mit ihm auf demselben Radiusvector gelegenen Kreispunkt $(\cos\varphi, \sin\varphi)$ den zugehörigen Punkt der Ellipse, verbinde beide mit einander und ziehe zu der Verbindungslinie durch den gegebenen Punkt eine Parallele, welche den Radiusvector nach dem Punkte der Ellipse oder die Verlängerung desselben in dem gesuchten Punkte (x, y) schneidet.

Will man umgekehrt zu einem gegebenen Punkte (x, y) den zugehörigen Punkt (ξ, η) finden, so suche man zu dem mit ihm auf demselben Radiusvector liegenden Ellipsenpunkte den zugehörigen Kreispunkt, verbinde beide mit einander und ziehe zu der Verbindungslinie durch den gegebenen Punkt eine Parallele, welche den Radiusvector nach dem Kreispunkt oder die Verlängerung desselben in dem gesuchten Punkte (ξ, η) schneidet.

§ 2.

Eigenschaften der Abbildung.

Schon aus den bisherigen Angaben geht hervor, dass sämtlichen Punkten einer durch O gehenden Geraden wieder Punkte einer durch O gehenden Geraden entsprechen, und dass die Abbildung eine ähnliche ist, insofern sich an dem Verhältniss der Entfernung mehrerer Punkte derselben Geraden bei der Abbildung nichts ändert. Wir wollen jetzt die Abbildung beliebiger Geraden näher untersuchen.

Heisst die Gleichung der geraden Linie

$$lx + my + n = 0$$

so gilt für das Bild derselben

$$al\xi + bm\eta + n = 0$$

Wir erhalten also wieder eine Gerade, die im allgemeinen gegen die erste um einen gewissen Winkel gedreht erscheint und einen andern Abstand von O hat. Nur wenn die gegebene Linie parallel ist einer der beiden Axen, ist das Bild derselben parallel. Stellt

$$l'x + m'y + n' = 0$$

eine zweite zur ersten parallele Gerade dar, so muss sich l zu l' wie m zu m' verhalten. Das Abbild der zweiten Geraden ist aber

$$al'\xi + bm'\eta + n' = 0$$

und es verhält sich auch al zu al' wie bm zu bm', d. h. die beiden Bilder laufen auch parallel.

Wir gewinnen damit den Satz:

„Die Abbilder paralleler Geraden sind wieder parallel."

Dieser Satz kann sogleich zur Ableitung einer weiteren Eigenschaft benutzt werden. Denken wir uns auf der ersten Geraden eine Reihe von Punkten P_1, P_2, P_3 u. s f. bestimmt, ziehen durch O eine Parallele und fixiren auf derselben eine zweite der ersten entsprechende Reihe von Punkten Q_1, Q_2, Q_3 u. s. f., so dass

$$P_1P_2 = Q_1Q_2, \quad P_2P_3 = Q_2Q_3$$

u. s. f. wird. Verbinden wir dann P_1 mit Q_1, P_2 mit Q_2 u. s. f., so laufen diese Verbindungslinien sämtlich parallel. Dasselbe muss nach dem obigen Satze aber auch für das Abbild dieses ganzen Systems von Linien gelten, woraus folgt, dass auch dort die Abschnitte der ersten Geraden gleich den entsprechenden der zweiten sein müssen, oder dass die Abschnitte der ersten Geraden sich unter einander ebenso verhalten wie die der zweiten. Nun wissen wir aber schon, dass bei einer durch O gehenden Geraden die Abschnitte des Bildes sich genau so verhalten wie die Abschnitte der Geraden selbst. Daher der Satz:

„Für Abschnitte paralleler Geraden ist das Verhältniss zum Bilde constant."

Dieses constante Verhältniss lässt sich leicht bestimmen; dasselbe hängt allein von der Richtung der Parallelen ab. Zur Bestimmung desselben wählen wir natürlich die durch O gehende Parallele, welche mit der positiven x axe den Winkel α bilden möge, und nehmen auf derselben zwei Punkte $(r_1\cos\alpha,\ r_1\sin\alpha)$ und $(r_2\cos\alpha,\ r_2\sin\alpha)$ an, deren Entfernung also gleich $\pm(r_1 - r_2)$ ist. Für die Abbilder der beiden Punkte ergeben sich die Coordinaten $\left(\frac{r_1}{a}\cos\alpha,\ \frac{r_1}{b}\sin\alpha\right)$ und $\left(\frac{r_2}{a}\cos\alpha,\ \frac{r_2}{b}\sin\alpha\right)$. Die Entfernung wird dann

$$\pm(r_1 - r_2)\sqrt{\frac{\cos^2\alpha}{a^2} + \frac{\sin^2\alpha}{b^2}}$$

Es verhält sich demnach jede Strecke zu ihrem Bilde wie 1 zu

$$\sqrt{\frac{\cos^2\alpha}{a^2} + \frac{\sin^2\alpha}{b^2}}$$

Wir können noch einen zweiten Ausdruck ableiten, indem wir vom Bilde ausgehen. Dasselbe sei um den Winkel φ gegen die positive x axe geneigt, die beiden Punkte seien $(s_1 \cos\varphi,\ s_1 \sin\varphi)$ und $(s_2 \cos\varphi,\ s_2 \sin\varphi)$, ihre Entfernung $\pm(s_1 - s_2)$. Dann ergeben sich als Coordinaten der Punkte selbst: $(a s_1 \cos\varphi,\ b s_1 \sin\varphi)$ und $(a s_2 \cos\varphi,\ b s_2 \sin\varphi)$, und die Entfernung derselben wird:

$$\pm(s_1 - s_2)\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}$$

Es verhält sich demnach jede Strecke zu ihrem Bilde auch wie

$$\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi} \text{ zu } 1.$$

Beide Wurzelausdrücke spielen bei vielen, die Ellipse betreffenden Aufgaben eine Rolle und haben eine geometrische Bedeutung. Nehmen wir als einen der beiden Punkte den Mittelpunkt 0 selbst, als den andern einen Punkt der Ellipse, so ergiebt sich, dass der reciproke Wert des ersten Ausdrucks die Länge des zugehörigen Radiusvectors darstellt, ausgedrückt durch die Functionen des Winkels α, den derselbe mit der positiven x axe bildet, während der zweite Ausdruck selbst denselben Radiusvector darstellt, ausgedrückt durch die Functionen des Winkels φ, welchen der correspondirende Radius des Kreises mit der x axe bildet. Da beide Ausdrücke nur die Quadrate der Winkelfunctionen enthalten, nehmen sie für Supplementwinkel denselben Wert an, woraus der Satz folgt:

„Für zwei sich schneidende Geraden ist das Verhältniss ihrer Abschnitte zum Bilde nur dann dasselbe, wenn sie gleiche Neigung zur Axe haben."

Wir betrachten jetzt 2 senkrechte Geraden, gehörig zu den Winkeln φ und $90^0 + \varphi$. Die entsprechenden Verhältnisszahlen sind dann $\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}$ und $\sqrt{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi}$, und die Summe der Quadrate ist gleich $a^2 + b^2$. Wir wollen nun allgemein 2 Geraden in Bezug auf die Ellipse conjugirt nennen, wenn ihre Bilder senkrecht zu einander stehen. Dann lässt sich der Satz formuliren:

„Für 2 conjugirte Geraden ist die Summe der Quadrate der entsprechenden Verhältnisszahlen constant gleich $a^2 + b^2$."

Nehmen wir speciell 2 conjugirte Halbmesser, so stellen die Verhältnisszahlen die Längen der Halbmesser selbst dar, und der Satz spricht die bekannte Tatsache aus, dass die Summe der Quadrate zweier conjugirten Halbmesser constant gleich $a^2 + b^2$ ist.

Von Curven mögen an dieser Stelle in Bezug auf ihre Abbildung

Digitized by Google

nur diejenigen Ellipsen betrachtet werden, welche der gegebenen ähnlich sind und dieselbe Richtung der Hauptaxen haben. Die Gleichung einer solchen ist

$$\frac{(x-x')^2}{a^2}+\frac{(y-y')^2}{b^2}=s^2$$

aus welcher sich für das Abbild ergiebt

$$(\xi-\xi')^2+(\eta-\eta')^2=s^2$$

Wir finden damit:

„Alle Ellipsen, welche der gegebenen ähnlich sind und dieselbe Richtung der Axen haben, liefern bei der Abbildung Kreise, und umgekehrt muss auch jede Curve, deren Abbildung einen Kreis liefert, eine der gegebenen ähnliche Ellipse mit gleicher Richtung der Axen sein."

Jede andere Ellipse und ebenso der Kreis liefert wieder eine Ellipse, deren Hauptaxen später bestimmt werden sollen.

Ein weiteres, für die Verwendbarkeit des Princips wichtiges Gesetz finden wir, wenn wir den Ausdruck für den Inhalt eines durch 3 beliebige Punkte bestimmten Dreiecks aufstellen. Haben die Punkte die Coordinaten (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), so wird der Inhalt dargestellt durch:

$$J=\pm\tfrac{1}{2}\begin{vmatrix}1 & x_1 & y_1\\ 1 & x_2 & y_2\\ 1 & x_3 & y_3\end{vmatrix}$$

wo das Zeichen so zu wählen ist, dass der Ausdruck positiv wird. Bilden wir nun das Dreieck nach unserm Princip ab und nennen die entsprechenden Punkte der Abbildung (ξ_1, η_1), (ξ_2, η_2), (ξ_3, η_3), so wird

$$J=\pm\tfrac{1}{2}\begin{vmatrix}1 & a\xi_1 & b\eta_1\\ 1 & a\xi_2 & b\eta_2\\ 1 & a\xi_3 & b\eta_3\end{vmatrix}=\pm\tfrac{1}{2}ab\begin{vmatrix}1 & \xi_1 & \eta_1\\ 1 & \xi_2 & \eta_2\\ 1 & \xi_3 & \eta_3\end{vmatrix}=ab\,.\,J'$$

wenn wir mit J' den Inhalt des Bildes bezeichnen. Da sich jedes beliebige Flächenstück in eine Summe von Dreiecken zerlegen lässt, ist damit der Satz gefunden:

„Der Inhalt einer jeden Figur ist gleich ab mal dem Inhalt des Bildes."

§ 3.

Anwendung zur Ableitung der Eigenschaften der Ellipse.

Wir wollen jetzt mit Hülfe unseres Princips die Eigenschaften der Ellipse aus den bekannten Eigenschaften des Kreises ableiten. Die gegebene Ellipse selbst wird dabei als Abbildungscurve genommen, so dass ihr der Kreis entspricht; senkrechten Linien beim Kreise entsprechen conjugirte Linien bei der Ellipse.

Fundamentaleigenschaften der Ellipse.

Was zunächst die Gestalt der Curve angeht, so ergeben sich sofort die folgenden Eigenschaften:

Wie beim Kreise wird auch bei der Ellipse jeder Durchmesser durch den Anfangspunkt halbirt. Zwei Durchmesser sind aber nur dann gleich, wenn sie denselben Winkel mit der Axe bilden, da nur in diesem Falle die entsprechenden Verhältnisszahlen gleich sind. Alle der einen Axe parallele Sehnen der Ellipse werden durch die andere senkrechte Axe halbirt, da auch ihre Bilder parallel der einen Axe laufen und durch die andere senkrechte halbirt werden. Aus dem Gesagten geht hervor, dass die Ellipse eine zu den Axen symmetrische Curve sein muss.

Beim Kreise werden aber nicht nur die Sehnen, welche parallel einer der Hauptaxen sind, durch die andere halbirt, sondern es liegen stets die Mittelpunkte paralleler Sehnen, welches auch ihre Richtung sein mag, auf dem senkrechten Durchmesser. Daher müssen die Mittelpunkte paralleler Sehnen der Ellipse auf dem conjugirten Durchmesser liegen.

Da ferner beim Kreise die Tangente senkrecht zum Radius nach dem Berührungspunkt steht, so müssen bei der Ellipse die Tangente und der Radiusvector zum Berührungspunkt conjugirt sein, d. h. die Tangente muss dem conjugirten Durchmesser parallel laufen.

Wie die Kreisfläche durch je zwei senkrechte Durchmesser, so wird auch die Fläche der Ellipse durch je 2 conjugirte Durchmesser in vier gleiche Teile geteilt.

Wie schon erwähnt, sind die zu den Winkeln φ und $90^0+\varphi$ gehörigen Halbmesser der Ellipse gleich

$$\sqrt{a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi} \quad \text{und} \quad \sqrt{a^2\sin^2\varphi+b^2\cos^2\varphi}$$

Diese selben Wurzelausdrücke sind es aber auch, mit welchen man die Abschnitte der zu den gewählten Kreisradien parallelen Geraden multipliciren muss, um die entsprechenden Abschnitte der zu den Halbmessern der Ellipse parallelen Geraden zu erhalten. Da nun die Gleichung des Kreises unabhängig von der Lage der rechtwinkligen Axen ist, so muss dasselbe auch für die entsprechende in schiefwinkligen Coordinaten ausgedrückte Gleichung der Ellipse gelten.

Zieht man von einem Punkte ausserhalb des Kreises die beiden Tangenten und verbindet die Berührungspunkte, so steht die Verbindungslinie senkrecht zur Centrale. Bei der Ellipse muss die entsprechende Linie der Centrale conjugirt sein, also parallel der Tangente laufen, welche sich im Schnittpunkt der Centrale und der Curve ziehen lässt. Da sich bei der Abbildung an dem Verhältniss der Abschnitte derselben Geraden nichts ändert, so wird bei der Ellipse wie beim Kreise die Centrale durch die Peripherie und den Schnittpunkt mit der Verbindungslinie der Berührungspunkte harmonisch geteilt. Ferner müssen die Berührungspunkte, das Centrum und der Punkt, von dem aus die Tangenten gezogen sind, auf einer Ellipse liegen, welche der gegebenen ähnlich ist und die gleiche Richtung der Axen besitzt. Das von den beiden Tangenten und der Ellipse begrenzte Flächenstück hat denselben Inhalt für alle Punkte, welche auf einer concentrischen, der gegebenen ähnlichen Ellipse gleicher Axenrichtung liegen. Dasselbe wird von der Centrale halbirt.

Alle Sehnen, welche eine innere concentrische und ähnliche Ellipse berühren, werden durch den Berührungspunkt halbirt, und die abgeschnittenen Segmente sind sämtlich gleich gross.

Die Mittelpunkte aller von einem gegebenen Punkte der Peripherie aus gezogenen Sehnen liegen auf einer ähnlichen Ellipse, welche durch den Mittelpunkt geht und die gegebene Ellipse in dem Punkte berührt. Die zu den verschiedenen Punkten der Peripherie gehörigen Ellipsen sind congruent, ihre Halbaxen sind gleich der Hälfte der Halbaxen der gegebenen Ellipse. Alle diese Eigenschaften lassen sich unmittelbar aus den entsprechenden des Kreises ablesen.

Für alle durch denselben Punkt gezogenen Secanten des Kreises ist das Product der bis zur Peripherie gemessenen Abschnitte constant. Bei der Ellipse kann dieser Satz nur gelten für solche Secanten, welche mit der Axe gleiche Winkel bilden. Ebenso ist das Quadrat der Tangente nur dann gleich dem Product aus den Abschnitten der Secante, wenn beide gleiche Neigung zur Axe haben.

Auch der Satz von der Gleichheit der Peripheriewinkel über demselben Bogen lässt auf weitere Eigenschaften der Ellipse schliessen. In dem speciellen Falle, dass der Bogen gleich dem Halbkreis ist, muss der Peripheriewinkel ein Rechter sein, woraus für die Ellipse der Satz folgt:

Verbindet man irgend einen Punkt des Umfangs mit den Endpunkten eines Durchmessers, so sind die Verbindungslinien conjugirt. Im Falle eines beliebigen Bogens muss man dem Satze erst eine andere Fassung geben, um die correspondirende Eigenschaft der Ellipse zu erkennen.

Man ziehe die zu den Schenkeln des jedesmaligen Peripheriewinkels parallelen Tangenten und bestimme den Schnittpunkt derselben. Für alle Peripheriewinkel über demselben Bogen liegen dann diese Schnittpunkte auf einem zum gegebenen concentrischen Kreise. In dieser Form kann der Satz sogleich auf die Ellipse übertragen werden und besagt dann, dass die Schnittpunkte der zu den Schenkeln des Peripheriewinkels parallelen Tangenten für alle Peripheriewinkel über demselben Bogen auf einer concentrischen und ähnlichen Ellipse liegen. Ueberhaupt spricht die Gleichheit zweier Winkel beim Kreise für die Ellipse die Tatsache aus, dass die Schnittpunkte der zu den Schenkeln jedes Winkels parallelen Tangenten auf einer concentrischen und ähnlichen Ellipse liegen.

Ein- und umbeschriebene Parallelogramme.

Alle dem Kreise einbeschriebenen Parallelogramme sind Rechtecke. Daher müssen die Seiten jedes der Ellipse einbeschriebenen Parallelogramms conjugirt sein. Sind die Diagonalen auch conjugirt, so enspricht demselben beim Kreise das einbeschriebene Quadrat, dessen Inhalt constant gleich 2 ist. Der Inhalt eines jeden einbeschriebenen Parallelogramms mit conjugirten Durchmessern als Diagonalen muss daher constant gleich $2ab$ sein. Der Inhalt des dem Kreise einbeschriebenen Quadrats ist aber grösser als der Inhalt eines jeden andern einbeschriebenen Parallelogramms. Es muss darum auch bei der Ellipse das einbeschriebene Parallelogramm mit conjugirten Durchmessern als Diagonalen ein Maximum sein. Mit derselben Leichtigkeit lässt sich erkennen, dass der Inhalt eines beliebigen einbeschriebenen Parallelogramms gleich dem Inhalt desjenigen einbeschriebenen Parallelogramms ist, dessen Diagonalen conjugirte Durchmesser zu den Diagonalen des gegebenen sind.

Soviel über die einbeschriebenen Parallelogramme.

Was die umbeschriebenen Parallelogramme angeht, so sind dieselben beim Kreise sämtlich Rhomben, ihre Diagonalen stehen senkrecht auf einander und laufen parallel den Seiten des Rechtecks der Berührungspunkte. Daher müssen die Diagonalen des der Ellipse umbeschriebenen Parallelogramms conjugirt sein und parallel laufen den Seiten des Parallelogramms der Berührungspunkte. Sind die Seiten selbst auch conjugirt, so erhalten wir das Parallelogramm, welches dem umbeschriebenen Quadrat des Kreises entspricht. Letzteres hat aber stets denselben Inhalt 4 und ist kleiner als jedes andere umbeschriebene Parallelogramm.

Deshalb haben alle der Ellipse umbeschriebenen Parallelogramme, deren Seiten conjugirt sind, den gleichen Inhalt $4ab$, und zwar ist derselbe kleiner als der jedes andern umbeschriebenen Parallelogramms.

Dieser Satz kann auch in der folgenden Weise abgeleitet werden.

Wir betrachten einen dem Kreise umbeschriebenen Rhombus und das einbeschriebene Rechteck der Berührungspunkte. Der Winkel, welchen die eine Diagonale des Rhombus mit der Seite bildet, sei ϑ. Dann ist der Inhalt des Rhombus gleich $\frac{2}{\sin\vartheta\cos\vartheta}$, der Inhalt des Rechtecks gleich $4\sin\vartheta\cos\vartheta$, das Product der beiden Inhalte constant gleich 8. Deswegen ist bei der Ellipse das Product aus dem Inhalt eines umbeschriebenen Parallelogramms und dem Inhalt des Parallelogramms der Berührungspunkte gleich $8a^2b^2$. Nun ist aber der Inhalt des einbeschriebenen Parallelogramms ein Maximum und zwar gleich $2ab$, wenn die Diagonalen desselben conjugirt sind. Dann sind aber auch die Seiten des umbeschriebenen conjugirt, und da das Product der Inhalte constant ist, muss in diesem Falle der Inhalt des umbeschriebenen Parallelogramms $4ab$ ein Minimum sein.

Es mag hier noch ein Satz für das beliebige einbeschriebene Viereck hinzugefügt werden, welcher für die spätere Entwicklung von Wichtigkeit ist. Es handelt sich um den Satz: Verlängert man die Gegenseiten eines Kreisvierecks bis zum Schnitt, so stehen die Halbirungslinien der entstandenen Winkel auf einander senkrecht. Für die Ellipse lautet der entsprechende Satz: Zieht man zu den Gegenseiten eines einbeschriebenen Vierecks die parallelen Tangenten, verlängert dieselben bis zum Schnitt und verbindet die Schnittpunkte mit dem Mittelpunkt, so sind diese Verbindungslinien conjugirt. Ist das eine Paar Gegenseiten parallel, so läuft auch die entsprechende Verbindungslinie derselben parallel und der conjugirte Durchmesser halbirt die parallelen Gegenseiten. Die zu den nicht

parallelen Seiten eines einbeschriebenen Trapezes parallel gezogenen Tangenten schneiden sich demnach in einem Punkte, welcher auf der Verlängerung der Verbindungslinie der Mitten der beiden Grundlinien liegt.

Ist auch das andere Paar von Gegenseiten parallel, so laufen beide Verbindungslinien den Seiten parallel, woraus in Uebereinstimmung mit dem Früheren folgt, dass die Seiten eines einbeschriebenen Parallelogramms conjugirt sein müssen.

Quadratur der Ellipse.

Aus der Formel für den Inhalt des Kreises folgt für die Ellipse

$$J = \pi \, . \, ab$$

Jeder Ellipsensector ist ferner gleich $\frac{ab}{2}\varphi$, worin φ den von den zugehörigen Bildstrahlen eingeschlossenen Winkel bedeutet (ausgedrückt durch den Bogen des Kreises vom Radius 1).

Der Inhalt des von den Radienvectoren und der Sehne begrenzten Dreiecks ist gleich $\frac{ab}{2}\sin\varphi$, das Segment also gleich $\frac{ab}{2}(\varphi - \sin\varphi)$.

Hierin muss nun noch φ und $\sin\varphi$ durch die Dimensionen der Ellipse und die Lage der Secante näher bestimmt werden. Ist die Gleichung der Secanten

$$lx + my + n = 0$$

so hat ihr Abbild die Gleichung

$$al\xi + bm\eta + n = 0$$

und der Winkel φ ist bestimmt durch die Entfernung dieser Geraden vom Kreismittelpunkt. Dieselbe ist bekanntlich

$$s = \frac{\pm n}{\sqrt{a^2 l^2 + b^2 m^2}}$$

Dann wird

$$\frac{\varphi}{2} = \arccos s$$

und

$$\tfrac{1}{2}\sin\varphi = \sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2} = s\sqrt{1 - s^2}$$

Also wird das Segment gleich $ab \, . \, [\arccos s - s\sqrt{1 - s^2}]$.

Digitized by Google

Dasselbe ist constant für alle Secanten, welche die mit der gegebenen concentrische und ähnliche Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = s^2$$

berühren.

§ 4.

Abbildung der Hyperbel und Aufgabe der relativen Maxima und Minima.

Bisher wurde nur von der Abbildung der Ellipse gesprochen. In derselben Weise lässt sich nun auch die Hyperbel

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

abbilden und liefert dabei die gleichseitige Hyperbel

$$\xi^2 - \eta^2 = 1$$

Genau so wie wir mit Hülfe unseres Abbildungsprincips die Eigenschaften des Kreises auf die Ellipse übertrugen, können wir auch die Eigenschaften der gleichseitigen Hyperbel auf die beliebige Hyperbel übertragen. Der Unterschied liegt nur darin, dass der Kreis ein einfaches geometrisches Gebilde ist, dessen Fundamentaleigenschaften mit den elementarsten Hülfsmitteln erkannt werden können, während die gleichseitige Hyperbel ebenso gut wie die ungleichseitige zur Erforschung ihrer Eigenschaften der Anwendung analytischer Methoden bedarf. Immerhin bietet aber doch die Behandlung der gleichseitigen Hyperbel geringere Schwierigkeiten wie die der ungleichseitigen. Dazu kommt noch, dass viele Eigenschaften der Ellipse, welche ihrerseits direct vom Kreise übertragen wurden, sich wieder auf die Hyperbel übertragen lassen. Die Ellipse und ursprünglich der Kreis wird so der Ausgangspunkt für manche Lehrsätze in Bezug auf die Hyperbel, deren Richtigkeit dann nachträglich an der gleichseitigen Hyperbel analytisch festgestellt werden kann.

Handelt es sich aber um Aufgaben, welche auch beim Kreise auf analytischem Wege gelöst werden müssen, so ist für beide Arten von Curven der Grad der Schwierigkeit derselbe, und zwar können solche Aufgaben bis zu einem gewissen Punkte gemeinsam behandelt werden, indem man der Betrachtung die Gleichung

$$\xi^2 + \varepsilon\eta^2 = 1$$

zu Grunde legt und erst wenn die allgemeine Lösung gefunden ist, die Unterscheidung der beiden Fälle

$$\varepsilon = +1 \quad \text{und} \quad \varepsilon = -1$$

vornimmt. Eine solche Methode bietet auch den Vorteil, dass sie das Gemeinsame beider Arten von Curven wie das Unterscheidende und den eigentlichen Grund dafür klar erkennen lässt.

Es soll im Folgenden eine besonders geeignete Aufgabe dieser Art in aller Vollständigkeit behandelt werden. Es handelt sich um die Untersuchung der Dreiecke, deren eine Ecke fest gegeben ist, während die beiden andern auf einer Curve zweiten Grades wandern. Man soll unter diesen Dreiecken dasjenige vom grössten Inhalt bestimmen. Der feste Punkt kann dabei jede beliebige Lage haben, darf also auch auf der Curve selbst angenommen werden.

Wir behandeln die Aufgabe in der Weise, dass wir dieselbe zunächst allgemein für die Curve

$$\xi^2 + \varepsilon\eta^2 = 1$$

lösen, dann für ε nach einander die Werte $+1$ und -1 substituiren und die gewonnenen Resultate mit Hülfe des Abbildungsprincips auf die beliebige Curve übertragen. Der Fall der Parabel erledigt sich dann von selbst, da diese als Grenze einer Ellipse angesehen werden kann, deren Mittelpunkt ins Unendliche gerückt ist.

Der feste Punkt sei

$$Q_1 = (\xi_1, \eta_1)$$

die beiden veränderlichen seien

$$Q_2 = (\xi_2, \eta_2) \quad \text{und} \quad Q_3 = (\xi_3, \eta_3)$$

und zwar sei die Bezeichnung so gewählt, dass wenn man sich in Q_1 aufstellt und in den von $Q_1 Q_2$ und $Q_1 Q_3$ gebildeten Winkel hineinsieht, die Seite $Q_1 Q_2$ rechts, die Seite $Q_1 Q_3$ links liegt, beide also dieselbe Lage zu einander haben wie die positive x- und $y$axe. Dann wird der Inhalt des Dreiecks $Q_1 Q_2 Q_3$ dargestellt durch

$$J = \tfrac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & \xi_1 & \eta_1 \\ 1 & \xi_2 & \eta_2 \\ 1 & \xi_3 & \eta_3 \end{vmatrix} = \tfrac{1}{2}\Delta \qquad (1)$$

Da es bei der Untersuchung auf einen constanten Factor nicht ankommt, betrachten wir weiterhin nur die Determinante Δ. Die-

selbe soll ein Maximum werden, während gleichzeitig die Bedingungen erfüllt sind:

$$\xi_2^2+\varepsilon\eta_2^2=1 \quad \text{und} \quad \xi_3^2+\varepsilon\eta_3^2=1$$

Bezeichnen wir mit λ_2 und λ_3 zwei unbestimmte Multiplicatoren, so lauten die Bedingungen des Maximums:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\Delta}{\partial\xi_2}+\lambda_2\xi_2=0, \quad \frac{\partial\Delta}{\partial\eta_2}+\varepsilon\lambda_2\eta_2=0, \quad \xi_2^2+\varepsilon\eta_2^2=1 \\ &\frac{\partial\Delta}{\partial\xi_3}+\lambda_3\xi_3=0, \quad \frac{\partial\Delta}{\partial\eta_3}+\varepsilon\lambda_3\eta_3=0, \quad \xi_3^2+\varepsilon\eta_3^2=1 \end{aligned} \tag{2}$$

Combiniren wir die Glieder sämtlicher Horizontalreihen der Determinante mit den adjungirten Elementen der beiden letzten Horizontalreihen, so erhalten wir nach den Sätzen aus der Theorie der Determinanten das folgende System von Gleichungen:

$$\begin{aligned} 0&=(31)+\xi_1\frac{\partial\Delta}{\partial\xi_2}+\eta_1\frac{\partial\Delta}{\partial\eta_2}, & 0&=(12)+\xi_1\frac{\partial\Delta}{\partial\xi_3}+\eta_1\frac{\partial\Delta}{\partial\eta_3} \\ \Delta&=(31)+\xi_2\frac{\partial\Delta}{\partial\xi_2}+\eta_2\frac{\partial\Delta}{\partial\eta_2}, & 0&=(12)+\xi_2\frac{\partial\Delta}{\partial\xi_3}+\eta_2\frac{\partial\Delta}{\partial\eta_3} \\ 0&=(31)+\xi_3\frac{\partial\Delta}{\partial\xi_2}+\eta_3\frac{\partial\Delta}{\partial\eta_2}, & \Delta&=(12)+\xi_3\frac{\partial\Delta}{\partial\xi_3}+\eta_3\frac{\partial\Delta}{\partial\eta_3} \end{aligned} \tag{3}$$

sofern $\begin{vmatrix}\xi_3 & \eta_3\\ \xi_1 & \eta_1\end{vmatrix}$ mit (31) und $\begin{vmatrix}\xi_1 & \eta_1\\ \xi_2 & \eta_2\end{vmatrix}$ mit (12) bezeichnet wird.

Setzen wir hierin die Ausdrücke für die Differentialquotienten, welche sich aus den Bedingungen des Maximums ergaben, ein, so kommt

$$\begin{aligned} \Delta&=(31)-\lambda_2, & 0&=(31)-\lambda_2(\xi_1\xi_2+\varepsilon\eta_1\eta_2) \\ & & 0&=(31)-\lambda_2(\xi_2\xi_3+\varepsilon\eta_2\eta_3) \\ \Delta&=(12)-\lambda_3, & 0&=(12)-\lambda_3(\xi_3\xi_1+\varepsilon\eta_3\eta_1) \\ & & 0&=(12)-\lambda_3(\xi_2\xi_3+\varepsilon\eta_2\eta_3) \end{aligned} \tag{4}$$

Daraus folgt zunächst, dass die Klammerausdrücke constant sind. Wir setzen

$$\xi_1\xi_2+\varepsilon\eta_1\eta_2=\xi_2\xi_3+\varepsilon\eta_2\eta_3=\xi_3\xi_1+\varepsilon\eta_3\eta_1=-\frac{1}{\varrho} \tag{5}$$

Ferner kommt

$$(31)\lambda_3=(12)\lambda_2$$

Setzen wir hierin die sich aus (4) ergebenden Werte

$$\lambda_2 = (31) - \Delta \quad \text{und} \quad \lambda_3 = (12) - \Delta$$

ein, so erhalten wir nach Division mit Δ die Gleichung

$$(31) = (12) \tag{6}$$

und deshalb ist

$$\lambda_2 = \lambda_3 = -(12) - (23) = -(23) - (31) \text{ und } \frac{1}{\varrho} = \frac{(31)}{(23)+(31)} \tag{7}$$

Diese analytischen Resultate lassen folgende Schlüsse zu:

$Q_2 Q_3$ ist parallel der Polaren zu Q_1, $Q_1 Q_2$ parallel der Tangente in Q_3 und $Q_1 Q_3$ parallel der Tangente in Q_2, oder die Geraden $0 Q_1$ und $Q_2 Q_3$, $0 Q_2$ und $Q_1 Q_3$, $0 Q_3$ und $Q_1 Q_2$ sind conjugirt. Verbinden wir Q_1 mit 0 und verlängern bis zum Schnitt mit $Q_2 Q_3$ in R_1, verbinden wir ferner Q_2 mit 0 und verlängern bis R_2, Q_3 mit 0 und verlängern bis R_3, suchen wir endlich den Schnittpunkt S der Polaren zu Q_1 mit $0 Q_1$, so muss R_1 die Sehne $Q_2 Q_3$, R_2 die zu $Q_1 Q_3$ gehörige und R_3 die zu $Q_1 Q_2$ gehörige Sehne der Curve halbiren; ferner muss

$$0S : 0R_1 = 0Q_2 : 0R_2 = 0Q_3 : 0R_3 = \pm\varrho$$

sein, je nachdem $\varrho \gtrless 0$ ist, d. h. je nachdem der Mittelpunkt 0 auf den Strecken SR_1, $Q_2 R_2$, $Q_3 R_3$ oder auf der Verlängerung derselben liegt.

Die Gleichung (6) bedeutet geometrisch, dass die Teildreiecke $0 Q_1 Q_2$ und $0 Q_1 Q_3$ denselben Inhalt haben. Dies versteht sich nach dem Vorhergesagten von selbst, da beide Dreiecke dieselbe Grundlinie $0 Q_1$ haben und gleich hoch sind.

Wir fahren nun in der analytischen Behandlung der Aufgabe fort und gehen über zur Berechnung von ϱ und Δ. Wie sich herausstellt, hangen diese nur von dem Werte des Ausdrucks $\xi_1^2 + \varepsilon\eta_1^2$ ab, den wir im Folgenden mit σ bezeichnen wollen. Ferner wollen wir für $\lambda_2 = \lambda_3$ die gemeinsame Bezeichnung λ gebrauchen.

Zunächst leiten wir eine Beziehung zwischen λ und ϱ ab:

Aus (7) findet sich

$$2\lambda = -\Delta - (23)$$

ferner ist nach (4)

$$-\frac{\lambda}{\varrho} = (12)$$

woraus

$$-\frac{2\lambda}{\varrho} = \Delta - (23)$$

Digitized by Google

Addition ergiebt

$$\lambda\left(1-\frac{1}{\varrho}\right) = -(23) \quad \text{oder} \quad \frac{\lambda}{\varrho} = -(23)\frac{1}{\varrho-1}$$

Dann finden wir direct aus der Determinante, indem wir die Glieder der zweiten und dritten Verticalreihe mit den adjungirten Elementen der ersten verbinden:

$$0 = \xi_1(23) + (\xi_2+\xi_3)(12) \quad \text{und} \quad 0 = \eta_1(23) + (\eta_2+\eta_3)(12)$$

oder

$$\xi_1(23) = \frac{\lambda}{\varrho}(\xi_2+\xi_3) \quad \text{und} \quad \eta_1(23) = \frac{\lambda}{\varrho}(\eta_2+\eta_3)$$

oder endlich

$$\xi_1 = -\frac{1}{\varrho-1}(\xi_2+\xi_3) \quad \text{und} \quad \eta_1 = -\frac{1}{\varrho-1}(\eta_2+\eta_3)$$

Diese Ausdrücke substituiren wir in den Ausdruck

$$\xi_1^2 + \varepsilon\eta_1^2 = \sigma$$

und erhalten

$$\varrho^2 - \varrho = \frac{2}{\sigma} \tag{8}$$

welche Gleichung es ermöglicht, zu jedem σ das zugehörige ϱ zu finden.

Mit dem Werte von ϱ ist aber die Construction des maximalen Dreiecks gegeben. Man verbinde Q_1 mit O und zeichne die Polare zu Q_1, welche OQ_1 oder die Verlängerung in S schneidet. Ist nun ϱ positiv, so liegt R_1 auf der Verlängerung von OS über O hinaus, im andern Falle auf OS selbst oder auf der Verlängerung über S hinaus; ferner ist

$$OS : OR_1 = \pm\varrho$$

Die Punkte Q_2 und Q_3 erhält man endlich, indem man durch R_1 zur Polare die Parallele zieht, welche die Curve in den gesuchten Punkten trifft.

Es war

$$2\lambda = -\Delta - (23)$$

ferner

$$\frac{\lambda}{\varrho} = -(23)\frac{1}{\varrho-1}$$

Setzen wir den Wert von λ, der sich aus der zweiten Gleichung ergiebt, in die erste ein, so wird

Digitized by Google

$$2(23)\frac{\varrho}{\varrho-1} = \Delta + (23) \quad \text{oder} \quad \Delta = (23)\frac{\varrho+1}{\varrho-1}$$

worin (23) noch unbestimmt ist. Dann ist aber

$$2(31) - 2(12) - \Delta - (23) = \frac{2\Delta}{\varrho+1}$$

also

$$(31) - (12) = \frac{\Delta}{\varrho+1}$$

Was die Berechnung von (23) angeht, so wird

$$\varepsilon(23)^2 = \begin{vmatrix} \xi_2 & \eta_2 \\ \xi_3 & \eta_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \xi_2 & \varepsilon\eta_2 \\ \xi_3 & \varepsilon\eta_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \xi_2^2 + \varepsilon\eta_2^2, & \xi_2\xi_3 + \varepsilon\eta_2\eta_3 \\ \xi_2\xi_3 + \varepsilon\eta_2\eta_3, & \xi_3^2 + \varepsilon\eta_3^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1, & -\frac{1}{\varrho} \\ -\frac{1}{\varrho}, & 1 \end{vmatrix} = 1 - \frac{1}{\varrho^2}$$

also

$$(23) = \frac{\sqrt{\varepsilon(\varrho^2-1)}}{\varrho} \tag{9}$$

Setzen wir diesen Wert ein, so kommt die Determinante

$$\Delta = \frac{\varrho+1}{\varrho-1}\frac{\sqrt{\varepsilon(\varrho^2-1)}}{\varrho} \tag{10}$$

welche zerfällt in die drei Unterdeterminanten

$$(23) = \frac{\sqrt{\varepsilon(\varrho^2-1)}}{\varrho}, \quad (31) = (12) = \frac{1}{\varrho-1}\frac{\sqrt{\varepsilon(\varrho^2-1)}}{\varrho}$$

Der Inhalt des maximalen Dreiecks wird

$$I = \tfrac{1}{2}\frac{\varrho+1}{\varrho-1}\frac{\sqrt{\varepsilon(\varrho^2-1)}}{\varrho} \tag{11}$$

Da der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen positiv sein muss, so kann die Aufgabe für $\varepsilon = +1$ nur dann eine Lösung haben, wenn $\varrho^2 > 1$ ist, für $\varepsilon = -1$ dagegen nur, wenn $\varrho^2 < 1$ ist.

Damit ist die allgemeine Behandlung der Aufgabe beendet. Wir gehen nunmehr zu dem Falle der Ellipse $\varepsilon = +1$ über.

Digitized by Google

§ 5.

Weitere Behandlung im Falle der Ellipse.

Im Falle der Ellipse $\varepsilon = +1$ stellt

$$\sigma = \xi_1^2 + \eta_1^2$$

das Quadrat der Entfernung des Punktes Q_1 von 0 dar, welches wir mit s^2 bezeichnen wollen. Die Gleichung (8), an die wir unsere nächste Betrachtung anzuknüpfen haben, konnte auch direct aus der Figur abgeleitet werden. Ist nämlich ϱ positiv, so verhält sich

$$0Q_1Q_2 : Q_1Q_2Q_3 = 0R_3 : R_3Q_3 = 1 : \varrho + 1$$

woraus

$$0Q_1Q_2 = \frac{I}{\varrho+1} \quad \text{oder} \quad (12) = \frac{\Delta}{\varrho+1}$$

$$0Q_1Q_3 : Q_1Q_2Q_3 = 0R_2 : R_2Q_2 = 1 : \varrho + 1$$

woraus

$$0Q_1Q_3 = \frac{I}{\varrho+1} \quad \text{oder} \quad (31) = \frac{\Delta}{\varrho+1}$$

Dann wird

$$(23) = \Delta - \frac{2\Delta}{\varrho+1} = \Delta\,\frac{\varrho-1}{\varrho+1}$$

oder geometrisch

$$0Q_2Q_3 = Q_1Q_2Q_3\,\frac{\varrho-1}{\varrho+1}$$

Andrerseits aber haben wir

$$0Q_2Q_3 : Q_1Q_2Q_3 = 0R_1 : Q_1R_1 = 1 : s^2\varrho + 1$$

denn es ist

$$0Q_1 = s^2 \,.\, 0S \quad \text{und} \quad 0S : 0R_1 = \varrho$$

Folglich wird

$$0Q_2Q_3 = Q_1Q_2Q_3 \cdot \frac{1}{s^2\varrho+1}$$

Vergleichen wir diesen Wert mit dem obigen, so folgt

$$\frac{\varrho-1}{\varrho+1} = \frac{1}{s^2\varrho+1} \quad \text{oder} \quad s^2 - \varrho = \frac{2}{s^2}$$

Aehnlich im Falle $\varrho < 0$.

Wir erhalten also in der Tat wieder dieselbe Gleichung zur Bestimmung von ϱ wie im vorigen Paragraphen. Dieselbe liefert die beiden Werte

$$\varrho = \frac{s \pm \sqrt{s^2+8}}{2s} \qquad (12)$$

welche die Lage des Punktes R_1 bestimmen. Es kommt nun darauf an, die verschiedenen Lagen des Punktes R_1 für die verschiedenen Werte von s zu verfolgen. Der Quotient $\pm\frac{1}{\varrho}$ giebt das Verhältniss von OR_1 zu OS an, also das Verhältniss von OR_1 zu einer Strecke, die sich selbst mit s ändert. Wir wollen statt dessen das Verhältniss zu einer Strecke betrachten, die für die verschiedenen Werte von s gleich bleibt und wählen als solche den Kreisradius $OT = 1$ selbst. Da

$$OT = s \,.\, OS$$

ist, so wird

$$OR_1 = \pm\frac{1}{\varrho s}$$

Das obere Zeichen gilt, wenn ϱ positiv ist, das untere, wenn ϱ negativ ist. Im ersten Falle liegt R_1 auf der Verlängerung von Q_1O über O hinaus, im zweiten Falle auf Q_1O selbst oder auf der Verlängerung über Q_1 hinaus. Wenn wir der Strecke OR_1 selbst das positive oder negative Zeichen beilegen, je nachdem R_1 auf der einen oder andern Seite von O liegt, so können wir die letzte Gleichung auch einfacher schreiben:

$$OR_1 = \frac{1}{\varrho s} = \frac{2}{s \pm \sqrt{s^2+8}}$$

Es fragt sich zunächst, ob und in welchem Falle beiden Werten von OR_1 eine Lösung der Aufgabe entspricht. Der eine Wert ist stets positiv und bedeutet, dass R_1 auf der Verlängerung über O hinaus liegt; der andere negative bestimmt einen Punkt R_1 auf der Seite von Q_1 selbst. Beiden Werten entspricht aber eine Lösung der Aufgabe nur dann, wenn R_1 innerhalb des Kreises liegt, wenn also $\frac{2}{s \pm \sqrt{s^2+8}}$ dem absoluten Werte nach unter 1 liegt. Wie man sich überzeugt, ist der grösste Wert, den der Ausdruck für das obere Zeichen annehmen kann, der Wert $\frac{1}{\sqrt{2}}$, und zwar wird dieser erreicht für $s = 0$; für $s = 1$ wird der Ausdruck gleich $\frac{1}{3}$ und für $s = \infty$ gleich 0. Dem ersten Werte $\frac{2}{s+\sqrt{s^2+8}}$ entspricht also stets eine Lösung der Aufgabe. Der andere Ausdruck $\frac{2}{s-\sqrt{s^2+8}}$ wird für $s = 0$ gleich $-\frac{1}{\sqrt{2}}$, für $s = 1$ gleich -1 und ist für jeden Wert von s, der über 1 liegt, absolut grösser als die Einheit. Dem zweiten Werte von OR_1 entspricht daher nur in dem Falle

Digitized by Google

eine Lösung, dass Q_1 innerhalb des Kreises liegt. Es existiren demnach 2 Dreiecke maximalen Inhalts, wenn Q_1 innerhalb des Kreises, die Aufgabe hat aber nur eine Lösung, wenn Q_1 ausserhalb liegt.

Dieses Resultat stimmt auch mit der am Schlusse des vorigen Paragraphen gemachten Bemerkung überein, dass für $s = +1$ die Aufgabe nur dann lösbar ist, wenn $\varrho^2 > 1$ ist; denn wie sich aus (12) ergiebt, ist für das obere Zeichen ϱ stets positiv und grösser als 1, was auch der Wert von s sein mag, für das untere Zeichen dagegen ist ϱ stets negativ und dem absoluten Werte nach nur dann grösser als 1, wenn $\sqrt{s^2+8} - s > 2s$ oder $\sqrt{s^2+8} > 3s$ oder $1 > s^2$ ist, d. h. wenn Q_1 innerhalb des Kreises liegt.

Bezeichnen wir mit $\frac{w}{2}$ den Winkel, welchen die Richtung von Q_1 nach 0 mit $0Q_2$ oder $0Q_3$ bildet, so wird

$$\cos\frac{w}{2} = \frac{2}{s \pm \sqrt{s^2+8}}$$

und die Teildreiecke werden

$$0\,Q_1Q_2 = 0\,Q_1Q_3 = \frac{s}{2}\sin\frac{w}{2}, \quad 0\,Q_2Q_3 = \pm\tfrac{1}{2}\sin w$$

während der Inhalt des maximalen Dreiecks

$$I = \pm s\sin\frac{w}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sin w = \pm\sin\frac{w}{2}\left(s + \cos\frac{w}{2}\right)$$

wird. Dabei gilt das obere Zeichen, wenn $w < 180^0$ ist, das untere, wenn $w > 180^0$ ist.

Gehen wir nun die verschiedenen Lagen von Q_1 der Reihe nach durch.

Liegt Q_1 ausserhalb des Kreises, so giebt es nur eine Lösung. Man construire sich entweder den Punkt R_1 nach der Gleichung

$$0R_1 = \frac{2}{s + \sqrt{s^2+8}}$$

und ziehe durch R_1 eine Senkrechte zu Q_1R_1, welche die Curve in Q_2 und Q_3 trifft, oder man berechne den Winkel $\frac{w}{2}$ aus der Gleichung

$$\cos\frac{w}{2} = \frac{2}{s + \sqrt{s^2+8}}$$

und trage denselben in 0 an die Verlängerung von $Q_1 0$ nach beiden Seiten ab. Q_2 und Q_3 sind dann die Schnittpunkte der Schenkel mit der Curve.

Rückt Q_1 in die Peripherie, so wird

$$0R_1 = \tfrac{1}{2} \quad \text{und} \quad \cos\frac{w}{2} = \tfrac{1}{2}$$

also

$$\frac{w}{2} = 60^0 \quad \text{und} \quad I = \tfrac{1}{4}\sqrt{3}$$

Das Dreieck $Q_1 Q_2 Q_3$ ist dann gleichseitig. Das grösste Dreieck, dessen Ecken sämtlich auf der Peripherie liegen, ist demnach das gleichseitige.

Liegt Q_1 innerhalb, so existiren 2 Maxima. Für das grössere liegt der Punkt R_1 auf der Verlängerung von $Q_1 0$ über 0 hinaus, für das kleinere auf der Seite von Q_1 selbst. Rückt Q_1 an 0 heran, so nähern sich die beiden Maxima und erreichen denselben Wert, wenn Q_1 auf 0 fällt. In diesem Falle wird der eine Wert von $\frac{w}{2}$ gleich 45^0, der andere gleich 135^0, und die entsprechenden Werte von $0R_1$ sind $\frac{1}{\sqrt{2}}$ und $-\frac{1}{\sqrt{2}}$. Wir erhalten also 2 rechtwinklige Dreiecke, die gegenüber liegen und für welche 0 der Scheitel des rechten Winkels wird. Eigentlich kann nun aber, sofern 0 und Q_1 zusammenfallen, nicht mehr von der Richtung der Geraden $0Q_1$ gesprochen oder vielmehr es kann jede beliebige Richtung als solche angenommen werden. Damit stimmt das geometrische Resultat überein, dass es in diesem Falle unendlich viele Maxima giebt. Jedes von 2 senkrechten Radien des Kreises und der zugehörigen Sehne gebildete Dreieck entspricht den Bedingungen des Maximums.

Es ist klar, dass der Wert des Maximums gleich ist für alle Punkte Q_1, welche auf einem concentrischen Kreise liegen, und dass derselbe mit wachsender Entfernung zunimmt, wenn es sich um das in jedem Falle existirende, zum oberen Zeichen der Wurzel gehörige Maximum handelt, dagegen abnimmt, wenn es sich um das zweite, nur für innere Punkte vorhandene handelt.

Damit ist auch die Lösung der folgenden Aufgabe gegeben: Es sollen die Dreiecke untersucht werden, von welchen eine Ecke sich auf einer Geraden bewegt, während die beiden andern auf der Peripherie des Kreises wandern. Zu jedem Punkte der Geraden gehört ein maximales Dreieck, und dieses relative, auf den einzelnen Punkt

bezügliche Maximum erreicht seinen kleinsten Wert für den Punkt, in welchem das Lot von 0 aus die Gerade trifft.

Durchschneidet die Gerade den Kreis, so existirt ausserdem für jeden Punkt, welcher innerhalb des Kreises liegt, noch ein zweites Maximum, und dieses zweite relative Maximum hat seinen grössten Wert in dem Fusspunkte des Lotes.

Nunmehr wollen wir die gewonnenen Resultate auf die Ellipse übertragen. Der feste Punkt heisse P_1, die beiden andern P_2 und P_3. Wir gelangen dann zu folgenden Sätzen:

Beim maximalen Dreieck sind die Geraden P_2P_3 und $0P_1$, P_1P_2 und $0P_3$, P_1P_3 und $0P_2$ conjugirt. Die Dreiecke $0P_1P_2$ und $0P_1P_3$ haben denselben Inhalt. Legen wir durch P_1 eine concentrische und ähnliche Ellipse und bezeichnen wir das Verhältniss der Halbaxen dieser Ellipse zu denjenigen der gegebenen Ellipse mit s, so dass

$$s^2 = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2}$$

wird, bezeichnen wir ferner den Punkt, in welchem $P_1 0$ oder die Verlängerung die Seite P_2P_3 trifft, mit V_1 und den Punkt, in welchem dieselbe die Ellipse trifft, mit W, so ist das Verhältniss

$$\frac{0V_1}{0W} = \frac{2}{s \pm \sqrt{s^2+8}}$$

und damit der Punkt V_1 bestimmt.

Liegt P_1 ausserhalb der Ellipse, so gilt nur das obere Zeichen, man erhält nur einen Punkt V_1 auf der Verlängerung von $P_1 0$. Zieht man durch denselben die zu $0P_1$ conjugirte Gerade, so trifft diese die Ellipse in den gesuchten Punkten P_2 und P_3. Der Inhalt ist gleich $ab \sin\frac{w}{2}\left(s + \cos\frac{w}{2}\right)$, sofern

$$\cos\frac{w}{2} = \frac{2}{s + \sqrt{s^2+8}}$$

gesetzt wird.

Liegt P_1 innerhalb, so giebt es 2 maximale Dreiecke; der dem oberen Zeichen entsprechende Punkt V_1 liegt wiederum auf der Verlängerung von $P_1 0$, der andere auf der Seite von P_1 selbst. Die beiden Inhalte sind $\pm ab \sin\frac{w}{2}\left(s + \cos\frac{w}{2}\right)$, worin

$$\cos\frac{w}{2} = \frac{2}{s \pm \sqrt{s^2+8}}$$

ist. Der erste Wert ist stets grösser als der zweite bis auf den singulären Fall, in welchem P_1 auf 0 fällt.

Liegt P_1 auf der Peripherie, so ist

$$\frac{0V_1}{0W} = \frac{1}{2}, \quad \frac{w}{2} = 60^0, \quad I = \frac{3}{4}ab\sqrt{3}$$

Rückt P_1 in 0, so ist

$$\frac{0V_1}{0W} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

die beiden Maxima haben denselben Wert $\frac{1}{2}ab$.

In Wirklichkeit aber giebt es in diesem Falle unendlich viele Lösungen.

Bewegt sich P_1 auf einer Geraden, so gehört zu jedem Punkte der Geraden ein maximales Dreieck; dieses relative Maximum erreicht seinen kleinsten Wert für denjenigen Punkt der Geraden, in welchem eine concentrische und ähnliche Ellipse dieselbe berührt oder im Fusspunkte der durch 0 zu derselben conjugirt gezogenen Geraden. Ist die Gleichung der Geraden

$$lx + my + n = 0$$

so ist der zugehörige Wert von s nach § 3 gleich $\frac{\pm n}{\sqrt{a^2l^2+b^2m^2}}$.

Schneidet die Gerade die Ellipse, so existirt für jeden Punkt innerhalb der Ellipse noch ein zweites Maximum, und dieses erreicht seinen grössten Wert für denselben Punkt der Geraden.

§ 6.

Weitere Discussion im Falle der Hyperbel.

Wir gehen jetzt zu dem Falle der Hyperbel $\varepsilon = -1$ über. In diesem Falle kann der Ausdruck für σ, der für $\varepsilon = +1$ stets positiv war und das Quadrat der Entfernung des Punktes Q_1 vom Mittelpunkte darstellte, jeden beliebigen positiven und negativen Wert annehmen. Es ist $\sigma > 1$ für alle Punkte Q_1, welche in den von der Curve begrenzten Raumstücken liegen, durch welche die y axe nicht hindurchgeht, $\sigma = 1$ für Punkte auf der Hyperbel selbst, $1 > \sigma > 0$ für Punkte zwischen der Hyperbel und den Asymptoten,

$\sigma = 0$ für Punkte auf den Asymptoten und $\sigma < 0$ für Punkte im ganzen übrigen Raume. Ist $\sigma > 0$, so durchschneidet $0Q_1$ oder die Verlängerung die Curve in einem Punkte T, und der Schnittpunkt S der Polaren liegt auf der Seite von Q_1 wie bei der Ellipse. Ist $\sigma < 0$, so trifft $0Q_1$ oder die Verlängerung die Curve nicht, und der Punkt S liegt auf der Verlängerung von $Q_1 0$.

Wir betrachten zunächst $\sigma > 0$ und setzen wie beim Kreise $\sigma = s^2$, wobei aber ausdrücklich zu bemerken ist, dass s nicht mehr die Entfernung $0Q_1$ bedeutet (was übrigens auch schon bei der Ellipse selbst nicht mehr der Fall ist). Es wird dann wie früher das Verhältniss

$$0R_1 : 0T = \frac{1}{\varrho s} = \frac{2}{s \pm \sqrt{s^2+8}}$$

Ein positiver Wert bedeutet dabei, dass R_1 auf der Verlängerung von TO oder $Q_1 0$ über 0 hinaus liegt, ein negativer, dass R_1 auf der Seite von T oder Q_1 selbst liegt.

Während nun im vorigen Falle dem Punkte R_1 nur dann eine Lösung entsprach, wenn $0R_1 : 0T$ absolut kleiner als 1 war, ist es jetzt gerade umgekehrt; die durch R_1 zur Polare resp. Tangente in T parallele Gerade schneidet die Hyperbel nur dann, wenn R_1 innerhalb des zuerst beschriebenen Raumes liegt, durch welchen die y axe nicht hindurchgeht, wenn also $0R_1 : 0T$ absolut grösser als 1 ist. Der dem oberen Zeichen entsprechende stets positive Wert des Quotienten ist aber für jeden Wert von s kleiner als 1, ihm entspricht also niemals eine Lösung der Aufgabe. Der zweite stets negative Wert ist nur dann absolut grösser als 1, wenn $2 > \sqrt{s^2+8} - s$ oder $s > 1$ ist, d. h. gerade für den Raum, welchen die y axe nicht durchschneidet. Die Aufgabe hat also nur eine Lösung und zwar liegt R_1 auf der Seite von Q_1 selbst. Die Construction erfolgt genau so wie im vorigen Paragraphen.

Liegt Q_1 auf der Hyperbel selbst oder in dem Raume zwischen der Hyperbel und den Asymptoten, so hat die Aufgabe keine Lösung.

Auch hier konnte das Intervall von s, für welches eine Lösung möglich ist, durch die Bemerkung am Schlusse von § 4. bestimmt werden, dass $\varrho^2 < 1$ sein muss.

Was nun zweitens $\sigma < 0$ angeht, so ergiebt in diesem Falle die Gleichung (8) für ϱ die Werte $\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{8}{\sigma_1}}$ und es ist ersichtlich, dass ϱ nur dann eine reelle Bedeutung hat, wenn $-\sigma > 8$, wenn

also $\eta_1^2 - \xi_1^2 > 8$ ist. Ist diese Bedingung aber erfüllt, so sind beide Werte von ϱ positiv und kleiner als 1, es entspricht also beiden eine Lösung der Aufgabe. Um die Lage der Punkte Q_1 zu bestimmen, construire man sich die gleichseitige Hyperbel $\eta^2 - \xi^2 = 8$, welche in demjenigen von den Asymptoten begrenzten Teile der Ebene liegt, durch welchen die x axe nicht hindurchgeht. Unsere Aufgabe ist dann nicht zu lösen für Punkte Q_1, welche in dem Raume zwischen dieser Hyperbel und den Asymptoten liegen, ebenfalls nicht für Punkte auf den Asymptoten oder auf der Hyperbel selbst; sie hat aber 2 Lösungen für alle Punkte, welche in dem Raume liegen, welcher von der Hyperbel begrenzt wird und durch den die x axe nicht hindurchgeht.

Der Punkt S liegt diesmal auf der Verlängerung von $Q_1 0$; da aber ϱ positiv ist, liegt R_1 auf der Verlängerung von $S0$, also auf der Seite von Q_1 selbst. Die Lage von R_1 bestimmt sich durch das Verhältniss

$$0S : 0R_1 = \varrho$$

Je kleiner ϱ ist, um so grösser ist $0R_1$, um so weiter ist R_1 von 0 entfernt; dem oberen Wurzelzeichen entspricht demnach der Punkt R_1, welcher 0 am nächsten liegt, dem untern Zeichen der Punkt, welcher am weitesten von 0 entfernt ist. Beide Punkte müssen jedoch zwischen 0 und Q_1 sich befinden. Ferner lehrt die Anschauung, dass dem 0 zunächst gelegenen Punkte R_1 ein Minimum, dem andern ein Maximum entsprechen muss. Denn bewegt man eine zur Polare von Q_1 parallele Gerade von der $0Q_1$ entgegengesetzten Seite aus unendlicher Ferne über 0 hinweg bis nach Q_1 und dann weiter in die Unendlichkeit und verbindet die Schnittpunkte dieser Geraden mit der Hyperbel und den Punkt Q_1 zu einem Dreieck, so nimmt der Inhalt desselben beständig zu, sobald die bewegliche Gerade den Punkt Q_1 passirt hat. Wenn also ein Maximum oder Minimum vorhanden ist, muss dasselbe auf dem Wege vor Q_1 zu suchen sein. Da aber der Inhalt für den Anfang der Bewegung unendlich gross ist und mit der Annäherung an 0 abnimmt, da ferner der Inhalt verschwindet, sofern die Parallele durch Q_1 selbst geht, so muss man bei der Bewegung der Geraden zunächst zum Minimum und dann erst zum Maximum gelangen. Jetzt ist auch zu erkennen, warum immer gleichzeitig ein Maximum und ein Minimum oder keines von beiden vorhanden ist.

Nähert sich Q_1 der Hyperbel

$$\eta_1^2 - \xi_1^2 = 8$$

Digitized by Google

so nähern sich auch die beiden Werte von ρ, die beiden Punkte R_1 rücken auf einander zu und fallen schliesslich zusammen.

Entfernt sich Q_1 auf einer durch O gehenden Geraden immer weiter von O, so wird σ numerisch beständig grösser, der eine Wert von ρ nähert sich der Einheit, der andere der Null. Da unter derselben Voraussetzung OS abnimmt, so muss der eine Punkt R_1 sich dem Punkte O nähern. Doch kann nicht ohne Weiteres behauptet werden, dass der andere Punkt sich immer von O entfernt.

Um hierüber ins Klare zu kommen, ist es nötig den Wert von OR_1 durch den Winkel, den die Gerade OR_1 mit einer der Axen bildet, und durch ξ_1 oder η_1 selbst auszudrücken, und für wachsendes ξ_1 oder η_1 zu verfolgen. Die Untersuchung ergiebt, dass in der Tat der zweite Punkt R_1 sich beständig von O entfernt.

Zu bemerken ist noch, dass bei dieser Bewegung des Punktes Q_1 sowol der Wert des Maximums wie der des Minimums zunimmt.

Fassen wir die gewonnenen Resultats zusammen, so lautet die Lösung im Falle der Hyperbel: Für jeden Punkt Q_1, welcher innerhalb des von der Hyperbel

$$\xi^2 - \eta^2 = 1$$

begrenzten Raumes liegt, in welchem $\xi_1^2 - \eta_1^2 > 1$ ist, existirt ein Maximum, für jeden Punkt Q_1, welcher innerhalb des von der Hyperbel

$$\eta^2 - \xi^2 = 8$$

begrenzten Raumes liegt, in welchem $\eta_1^2 - \xi_1^2 > 8$ ist, existirt sowol ein Maximum als auch ein Minimum, dagegen hat die Aufgabe keine Lösung für alle übrigen Punkte des Raumes.

Es ist selbstverständlich, dass der Wert des Maximums oder Minimums derselbe bleibt für alle Punkte, für welche σ constant ist d. h. für alle Punkte, welche auf einer mit

$$\xi^2 - \eta^2 = 1 \quad \text{oder mit} \quad \eta^2 - \xi^2 = 8$$

ähnlichen und concentrischen Hyperbel liegen.

Auch hier wollen wir die weitere Aufgabe anknüpfen, die Dreiecke zu untersuchen, von welchen eine Ecke auf einer beliebigen Geraden sich bewegt, während die beiden andern auf der gleichseitigen Hyperbel

$$\xi^2 - \eta^2 = 1$$

wandern.

Durchschneidet die Gerade einen Zweig der gegebenen Hyperbel zweimal, so giebt es für jeden Punkt der Sehne ein Maximum, und dieses relative Maximum erreicht seinen grössten Wert in dem Punkte, in welchem eine concentrische und ähnliche Hyperbel die Sehne berührt d. h. in ihrem Mittelpunkte.

In diesem Falle trifft aber die Gerade jeden Zweig der Hyperbel

$$\eta^2 - \xi^2 = 8$$

nur einmal, und es gehört zu jedem Punkte der Geraden, für welchen $\eta_1^2 - \xi_1^2 > 8$ ist, ein Maximum und ein Minimum, deren Werte beide um so mehr zunehmen, je weiter Q_1 auf der Geraden fortrückt. Für die Schnittpunkte der Geraden mit der Hyperbel dagegen fallen beide zusammen.

Durchschneidet die Gerade einen Zweig der Hyperbel

$$\eta^2 - \xi^2 = 8$$

zweimal, so existirt für jeden Punkt der Sehne ein Maximum und ein Minimum, und es erreichen beide den grössten Wert in dem Punkte, in welchem eine ähnliche und concentrische Hyperbel die Sehne berührt d. h. in ihrem Mittelpunkte. Die Gerade durchschneidet dann jeden Zweig der gegebenen Hyperbel nur einmal, und es existirt für jeden Punkt $\xi_1^2 - \eta_1^2 > 1$ ein Maximum, dessen Wert beständig zunimmt, wenn Q_1 auf der Geraden weiter rückt.

Sollte die Gerade eine der beiden Hyperbeln überhaupt nicht treffen, so gilt nur das in Bezug auf die andere Gesagte.

Damit ist die Aufgabe für den Fall der gleichseitigen Hyperbel

$$\zeta^2 - \eta^2 = 1$$

gelöst, und wir müssten nun dazu übergehen, die gewonnenen Resultate der Reihe nach mit Hülfe unseres Abbildungsprincips auf die beliebige Hyperbel

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

zu übertragen. Wir wollen uns aber diesmal, um lästige Wiederholungen zu vermeiden, ganz kurz fassen und uns auf die Bemerkung beschränken, dass sämtliche Sätze auch als für die beliebige Hyperbel geltend ausgesprochen werden können, sofern nur überall für σ der Wert $\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2}$ substituirt wird.

§ 7.

Behandlung der Parabel.

Wir kommen jetzt zum letzten Falle der Parabel. Wie schon gesagt, kann jede Parabel angesehen werden als Grenze einer Schar von Ellipsen oder Hyperbeln, deren einer Scheitelpunkt festgehalten wird, während die Dimensionen derselben sich so ändern, dass der andere Scheitelpunkt und mit ihm der Mittelpunkt ins Unendliche rückt. Beide Halbaxen nehmen dabei zu, doch muss das Wachstum durch die Bestimmung geregelt sein, dass sich der Quotient $\frac{b^2}{a}$ einer festen Grenze nähert. Die Lösung unserer Aufgabe muss sich demnach für den Fall der Parabel aus den bisherigen Ergebnissen ableiten lassen. Wir wollen dabei von der Ellipse ausgehen.

Es ist klar, dass das für jeden äusseren Punkt der Ellipse vorhandene einzige Maximum mit den Dimensionen der Ellipse selbst grösser wird und schliesslich über jedes Mass hinauswächst. Bei inneren Punkten gilt dasselbe von demjenigen maximalen Dreieck, welches sich auf das obere Wurzelzeichen bezieht. Anders aber liegt die Sache bei dem zweiten, dem negativen Vorzeichen entsprechenden Maximum; dasselbe wird sich einer ganz bestimmten Grenze nähern, und für diese müssen dieselben Sätze gelten wie für die Ellipse.

Bei der Parabel

$$y^2 = 2px$$

existirt demnach nur dann ein Maximum, wenn P_1 innerhalb des von der Curve begrenzten Raumes liegt, durch den die x axe hindurchgeht. Ferner muss beim maximalen Dreieck P_2P_3 parallel der Polaren zu P_1 oder parallel der Tangente in dem Punkte W sein, in welchem P_1O d. h. die durch P_1 zur x axe parallele Gerade die Curve trifft. P_1P_2 ist parallel der Tangente in P_3, P_1P_3 parallel der Tangente in P_2.

Da der Wert

$$s^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

sich bei dem angegebenen Wachstum von a und b der Einheit nähert, so wird ϱ sich den beiden Werten 2 und -1 nähern, von denen hier nur der zweite in Betracht kommt. Bezeichnen wir den Punkt, in welchem die Verlängerung von OP_1 die Seite P_2P_3 trifft, mit V_1, so ist

$$\frac{0\,V_1}{0\,W} = \frac{-1}{\varrho s}$$

und dieser Quotient nähert sich dem Werte $+1$. Daraus ist aber nicht zu entnehmen, dass die Punkte V_1 und W an der Grenze zusammenfielen; da nämlich beide Strecken immer grösser werden, so wird sich ihr Quotient auch dann der Einheit nähern, wenn dieselben verschieden sind, sofern nur ihre Differenz unter einer bestimmten endlichen Grösse gelegen bleibt.

Um darüber Aufschluss zu erhalten, welcher Grenzlage sich der Punkt V_1 nähert, müssen wir das Verhältniss von solchen Strecken betrachten, die mit wachsenden Dimensionen der Ellipse nicht selbst ins Ungemessene wachsen.

Wird der Schnittpunkt der Polaren mit $0P_1$ wieder mit S bezeichnet, so gelten die folgenden Proportionen:

$$0W : 0S = s : 1$$
$$0W : 0V_1 = -\varrho s : 1$$

woraus

$$SW : 0W = 1 - s : s$$
$$V_1W : 0W = \varrho s + 1 : \varrho s$$

also

$$\frac{S\,W}{V_1\,W} = \frac{(1-s)\,\varrho}{\varrho s + 1}$$

$$0P_1 : 0W = s : 1$$
$$0W : 0V_1 = -\varrho s : 1$$

woraus

$$P_1W : 0W = 1 - s : 1$$
$$V_1W : 0W = \varrho s + 1 : \varrho s$$

also

$$\frac{P_1\,W}{V_1\,W} = \frac{(1-s)\,\varrho s}{\varrho s + 1}$$

Daraus folgt zunächst, dass

$$P_1W : SW = s$$

ist. Im Falle der Parabel muss demnach

$$P_1W = SW$$

sein d. h. die Strecke vom Punkte P_1 bis zum Schnittpunkt der Polaren durch die Curve halbirt werden. Ferner wird das Verhältniss $P_1W : V_1W$ bis auf den Factor ϱs, der sich dem Werte -1 nähert, dargestellt durch den Quotienten

$$\frac{1-s}{\varrho s+1} = \frac{2(1-s)}{s+2-\sqrt{s^2+8}}$$

dessen Grenzwert für ein bis zur Einheit anwachsendes s aufgesucht werden muss. Durch Erweiteren mit $s+2+\sqrt{s^2+8}$ und Heben mit $1-s$ geht derselbe über in den Ausdruck $-\frac{1}{2}[s+2+\sqrt{s^2+8}]$, der für $s=1$ den Grenzwert -3 erreicht. Der Quotient $\frac{P_1W}{V_1W}$ nähert sich daher dem Werte 3, d. h. für die Parabel ist

$$V_1W = \tfrac{1}{3}P_1W$$

Es ergiebt sich demnach für die Parabel die folgende Construction: Man ziehe zurch P_1 eine Parallele zur x axe, welche die Curve in W trifft, teile P_1W in 3 gleiche Teile und construiren durch den ersten Teilpunkt von W aus gerechnet eine Parallele zur Tangente im Punkte W, welche die Parabel in den gesuchten Ecken P_2 und P_3 des maximalen Dreiecks trifft.

Der Inhalt lässt sich am bequemsten direct aus der Figur ableiten. Es wird

$$W = \left(\frac{y_1^2}{2p}, y_1\right), \quad V_1 = \left(\frac{y_1^2+px_1}{3p}, y_1\right)$$

Die Gleichung einer zur Tangente in W parallelen Geraden lautet:

$$yy_1 - px = k$$

Soll dieselbe durch V_1 gehen, so muss

$$k = \frac{2y_1^2-px_1}{3} = -\tfrac{2}{3}w + px_1$$

sein, sofern der stets negative Ausdruck

$$y_1^2 - 2px_1 = -w$$

gesetzt wird. Für die Parallele P_2P_3 kommt daher die Gleichung

$$yy_1 - px = -\tfrac{2}{3}w + px_1$$

aus welcher sich

$$2px = 2yy_1 + \tfrac{1}{3}w - 2px_1$$

ergiebt. Setzen wir diesen Wert in die Gleichung der Parabel

$$y^2 = 2px$$

ein, so erhalten wir für die Ordinate der beiden Schnittpunkte P_2 und P_3 die Bedingung:

$$y^2 - 2yy_1 = \tfrac{1}{3}w - 2px_1$$

welche durch die beiden Werte

$$y = y_1 \pm \sqrt{y_1^2 + \tfrac{1}{3}w - 2px_1} = y_1 \pm \tfrac{1}{3}\sqrt{3w}$$

befriedigt wird. Darum muss der Abstand der Punkte P_2 und P_3 von P_1V_1 gleich der Wurzelgrösse $\frac{1}{3}\sqrt{3w}$ sein. Da ferner die Entfernung P_1V_1 gleich

$$x_1 - \frac{y_1^2 + px_1}{3p} = \frac{w}{3p}$$

ist, so wird der Inhalt jedes der beiden Dreiecke $P_1P_2V_1$ und $P_1P_3V_1$ gleich $\frac{w}{18p}\sqrt{3w}$ und der Inhalt des maximalen Dreiecks $P_1P_2P_3$

$$J = \frac{w}{9p}\sqrt{3w}$$

Derselbe ist ausser von p nur noch von der Grösse w abhängig und bleibt deswegen gleich für alle Punkte P_1, welche auf der congruenten Parabel

$$y^2 = 2px - w = 2p\left(x - \frac{w}{2p}\right)$$

liegen, die gegen die gegebene um die Strecke

$$P_1W = \frac{w}{2p}$$

nach der Richtung der positiven $x$axe verschoben erscheint. Bewegt sich P_1 auf einer Geraden, welche die Parabel in 2 Punkten durchschneidet, so existirt für jeden Punkt der Sehne ein maximales Dreieck, und dieses relative Maximum erreicht seinen grössten Wert in dem Punkte, in welchem eine der gegebenen congruente Parabel mit gleicher Hauptaxe die Sehne berührt, d. h. im Mittelpunkte derselben.

II.

§ 8.

Uebertragung der Sätze von den merkwürdigen Punkten des Dreiecks.

Wie in § 4. bereits angedeutet wurde, bietet die Anwendung unseres Princips hauptsächlich zwei Vorteile. Erstens ist es mit Hülfe desselben möglich, alle Aufgaben, welche die Curven zweiten Grades betreffen, auf die Untersuchung der einen Gleichung

$$\xi^2 + \varepsilon\eta^2 = 1$$

zurückzuführen. Zweitens gestattet dasselbe es, sämtliche Eigenschaften des Kreises sofort auf die Ellipse zu übertragen, wodurch man zu einer Reihe von Sätzen gelangt, die ihrerseits wieder der Verallgemeinerung auf beliebige Kegelschnitte fähig sind.

Nachdem in § 3. die Fundamentaleigenschaften des Kreises auf die Ellipse übertragen worden, sind wir, ohne uns auf eine Verallgemeinerung der Resultate einzulassen, in den letzten Paragraphen sogleich dazu übergegangen, ein Beispiel der ersten Art ausführlich zu behandeln. Auch jetzt wollen wir von der Uebertragung der für die Ellipse gewonnenen Eigenschaften auf beliebige Curven absehen, da dieselbe nur bekannte Resultate ergiebt; nur soviel mag gesagt sein, dass fast sämtliche in § 4. angeführten Sätze eine Ausdehnung auf beliebige Kegelschnitte zulassen. Wir wollen statt dessen zu einer Reihe von Sätzen in Bezug auf die Ellipse übergehen, welche sich unmittelbar aus den Eigenschaften der merkwürdigen Punkte des Dreiecks ergeben, und welche dann als Ausgangspunkt für weitere, sämtliche Curven zweiten Grades betreffende Sätze dienen sollen.

Wir legen der Betrachtung eine Ellipse und ein derselben einbeschriebenes Dreieck zu Grunde. Die Abbildung liefert wieder ein Dreieck und den umbeschriebenen Kreis desselben.

Den Mitteltransversalen des einen Dreiecks entsprechen wieder die Mitteltransversalen des andern, nicht aber entsprechen den Höhen des einen die Höhen des andern; vielmehr entsprechen den Höhen des Abbilds bei der Ellipse die durch die Ecken zu den gegenüberliegenden Seiten conjugirt gezogenen Geraden. Die Höhen des Dreiecks schneiden sich aber in einem Punkte. Daher der Satz: Die durch die Ecken eines der Ellipse einbeschriebenen Dreiecks zu den Gegenseiten conjugirt gezogenen Geraden schneiden sich in einem Punkte.

Ferner muss der obere Abschnitt der conjugirten Ecktransversalen doppelt so gross sein als die Verbindungslinie des Mittelpunktes der umbeschriebenen Ellipse mit der Mitte der Gegenseite.

Der Schnittpunkt der conjugirten Ecktransversalen, der Schwerpunkt und der Mittelpunkt der umbeschriebenen Ellipse müssen desgleichen auf einer geraden Linie liegen, und es teilt der Schwerpunkt den Abstand der beiden andern Punkte im Verhältniss von 2 : 1.

Ferner liegen die drei Fusspunkte der conjugirten Ecktransversalen, die drei Mitten der Seiten und die drei Mitten der oberen

Abschnitte der Ecktransversalen auf einer der umbeschriebenen ähnlichen Ellipse gleicher Axenrichtung. Der Mittelpunkt dieser Ellipse halbirt die Verbindungslinie des Mittelpunktes der umbeschriebenen Ellipse und des Schnittpunktes der conjugirten Ecktransversalen. Die Halbaxen derselben sind gleich der Hälfte der Halbaxen der umbeschriebenen Ellipse.

Nun lassen sich aber unendlich viele Ellipsen zeichnen, welche durch die Ecken eines gegebenen Dreiecks gehen; es giebt unendlich viele Punkte, welche als Mittelpunkt einer solchen Ellipse angenommen werden können. Doch kann nicht jeder beliebige Punkt als solcher angenommen werden, wol aber lässt sich, wie später begründet werden wird, um jeden beliebigen Punkt als Mittelpunkt eine und nur eine Mittelpunktscurve zweiten Grades (Ellipse oder Hyperbel) beschreiben, welche durch die gegebenen 3 Punkte hindurchgeht.

Dass der erste Teil der obigen Lehrsätze auch für die Hyperbel gelten muss, kann man schon daraus ersehen, dass dieselben ganz unabhängig davon sind, ob der betreffende Punkt Mittelpunkt einer Ellipse ist oder nicht. Es lässt sich mit Hülfe des Proportionallehrsatzes und der Sätze von den Schwerpunktstransversalen sofort die Richtigkeit der folgenden Sätze erweisen:

Verbindet man einen beliebigen Punkt mit den Mitten der Seiten eines Dreiecks und zieht durch die Ecken Parallelen, so schneiden sich diese in einem Punkte, welcher mit dem ersten Punkte und dem Schwerpunkte des Dreiecks auf einer Geraden liegt, und es teilt der Schwerpunkt die Entfernung der beiden andern im Verhältniss von 2: 1. Ferner ist der obere Abschnitt jeder Parallelen doppelt so gross als die Verbindungslinie des Punktes mit der Mitte der Seite, welche der betreffenden Ecke gegenüber liegt.

Hiernach lässt sich vermuten, dass auch die weiteren Sätze allgemeine Gültigkeit besitzen und die beschriebenen 9 Punkte stets auf einer Mittelpunktscurve zweiten Grades liegen, welche derjenigen ähnlich ist, welche sich um den gegebenen Punkt als Mittelpunkt durch die Ecken des Dreiecks zeichnen lässt, dass ferner die Halbaxen der einen gleich der Hälfte der Halbaxen der anderen sind, und der Mittelpunkt der Curve die Verbindungslinie des gegebenen Punktes mit dem Schnittpunkte der conjugirten Ecktransversalen halbirt. Der Beweis wird an einer späteren Stelle erbracht werden.

Als weitere merkwürdige Punkte des Dreiecks werden der Mittelpunkt des einbeschriebenen Kreises und der Schnittpunkt der Ecktransversalen nach den Berührungspunkten der anbeschriebenen Kreise genannt.

Dem einbeschriebenen Kreise entspricht hier die einbeschriebene ähnliche Ellipse, deren Mittelpunkt in der folgenden Weise gefunden wird. Man verlängere die Verbindungslinie des Mittelpunktes der umbeschriebenen Ellipse mit den Mitten der Seiten bis zum Schnitt mit der Ellipse und ziehe durch die Schnittpunkte Parallelen zu den Seiten des Dreiecks. Dieselben schliessen ein ähnliches Dreieck ein, welchem die gegebene Ellipse einbeschrieben ist. Verbindet man die Ecken dieses Dreiecks mit dem Mittelpunkt der Ellipse und zieht durch die Ecken des gegebenen Dreiecks Parallelen dazu, so treffen sich diese in einem Punkte, und dieser Punkt ist der Mittelpunkt der dem gegebenen Dreieck einbeschriebenen ähnlichen Ellipse. Zieht man durch diesen Punkt Parallelen zu den erst genannten Verbindungslinien, so schneiden diese die Seiten des Dreiecks in den gesuchten Berührungspunkten.

Will man den Mittelpunkt der einer Seite anbeschriebenen ähnlichen Ellipse construiren, so verfahre man wie vorhin, nur verlängere man die Verbindungslinie mit der Mitte der betreffenden Seite über den Mittelpunkt der Curve hinaus bis zum Schnitt mit der Ellipse und ziehe die Parallelen, welche dieses Mal ein ähnliches Dreieck einschliessen, welchem die gegebene Ellipse anbeschrieben ist. Die weitere Construction verläuft wie oben.

Uebertragen wir jetzt die Sätze vom Kreise auf die Ellipse, so erhalten wir die folgenden Resultate:

Die Ecktransversale zum Berührungspunkte der der Gegenseite anbeschriebenen ähnlichen Ellipse ist parallel der Verbindungslinie der Mitte dieser Seite mit dem Mittelpunkte der einbeschriebenen Ellipse.

Die Ecktransversalen zu den Berührungspunkten der drei anbeschriebenen Ellipsen schneiden sich in einem Punkte, und es ist der obere Abschnitt jeder Transversale doppelt so gross als die Verbindungslinie des Mittelpunktes der einbeschriebenen Ellipse mit der Mitte der berührten Seite.

Ferner liegen der Schnittpunkt der Ecktransversalen nach den Berührungspunkten der anbeschriebenen ähnlichen Ellipsen, der Schwerpunkt und der Mittelpunkt der einbeschriebenen Ellipse auf einer Geraden, und es teilt der Schwerpunkt den Abstand der beiden andern Punkte im Verhältniss von 2 : 1.

Diese letzten Sätze verstehen sich eigentlich nach dem Früheren von selbst, sofern als bewiesen angenommen wird, dass die Ecktransversalen nach den Berührungspunkten parallel laufen den

Verbindungslinien der Mitten der Seiten mit dem Mittelpunkt der einbeschriebenen Ellipse. Denn zeichnet man um denselben Mittelpunkt die umbeschriebene Curve des Dreiecks, so sind die genannten Transversalen für dieselbe weiter nichts als die durch die Ecken zu den Seiten des Dreiecks conjugirt gezogenen Geraden. Es müssen darum auch wieder die Mitten der oberen Abschnitte dieser Geraden, die Mitten der Seiten und die Berührungspunkte der anbeschriebenen Ellipsen auf einer Curve zweiten Grades liegen, welche derjenigen ähnlich ist, welche sich um den Mittelpunkt der einbeschriebenen Curve durch die Ecken des Dreiecks zeichnen lässt. Doch gilt dieser Satz vorläufig nur, sofern die umbeschriebene Curve selbst wieder eine Ellipse ist.

Weiter ergeben sich noch die folgenden Sätze: Jede Seite des Dreiecks wird durch die Berührungspunkte der ein- und anbeschriebenen Ellipse in drei Abschnitte geteilt, von denen die beiden äusseren gleich sind.

Die Verbindungslinien der Mittelpunkte der anbeschriebenen Ellipsen gehen durch die Ecken des Dreiecks.

Die Verbindungslinie des Mittelpunktes der einbeschriebenen mit dem Mittelpunkte der einer Seite anbeschriebenen Ellipse ist zur Verbindungslinie der Mittelpunkte der beiden andern anbeschriebenen Ellipsen conjugirt und trifft dieselbe in der Ecke des Dreiecks, welche der betreffenden Seite gegenüberliegt.

Wie wir später nachweisen werden, haben auch alle diese auf die ein- und anbeschriebenen Ellipsen bezüglichen Sätze allgemeine Gültigkeit. Nun kann aber im Falle der Hyperbel von einer einbeschriebenen Curve d. h. von einer Curve, welche die 3 Seiten des Dreiecks selbst berührt, überhaupt nicht mehr gesprochen werden, obwol es auch in diesem Falle 4 verschiedene ähnliche Curven giebt, welche die Seiten resp. die Verlängerung derselben berühren. Wir wollen darum von nun ab den Unterschied zwischen ein- und anbeschriebenen Curven als unwesentlich fallen lassen und nur noch von berührenden Curven im allgemeinen reden. Unter dieser Voraussetzung lassen sich die letzten Sätze kürzer dahin formuliren, dass die Verbindungslinie der Mittelpunkte von je zwei berührenden Ellipsen der Verbindungslinie der Mittelpunkte der beiden andern conjugirt ist und sich mit derselben in einer Ecke des Dreiecks schneidet.

Ferner drängt sich die Frage auf, ob die ersten Sätze, bei welchen immer nur vom Mittelpunkt der einbeschriebenen Ellipse

Digitized by Google

gesprochen wurde, nicht auch für die Mittelpunkte der andern berührenden Curven Gültigkeit haben, und der allgemeine Lehrsatz richtig sein wird: Verbindet man den Mittelpunkt irgend einer der 4 berührenden ähnlichen Curven eines Dreiecks mit den Mitten der Seiten und zieht hierzu Parallelen durch die Ecken, so trifft jede dieser Parallelen die gegenüber liegende Seite des Dreiecks oder die Verlängerung derselben in dem Berührungspunkte derjenigen andern berührenden Curve, deren Mittelpunkt auf der Verbindungslinie der betreffenden Ecke mit dem Mittelpunkt der ersten berührenden Curve liegt. Die Berührungspunkte dieser ersten Curve selbst aber haben von den Mitten der Seiten dieselbe Entfernung wie die genannten Schnittpunkte der Parallelen, doch liegen sie nach der entgegengesetzten Richtung hin.

Dass dieser Satz für den Kreis und also auch für die Ellipse Gültigkeit hat, würde sich mit elementaren Mitteln leicht constatiren lassen, doch sehen wir hier davon ab, da wir denselben später in voller Allgemeinheit beweisen werden.

§ 9.

Um einen beliebigen Punkt als Mittelpunkt einen Kegelschnitt zu construiren, der durch 3 feste Punkte geht.

Bevor wir die Sätze des vorigen Paragraphen in Bezug auf ihre Allgemeingültigkeit prüfen, müssen wir noch eine Untersuchung darüber anstellen, ob sich um jeden beliebigen Punkt O als Mittelpunkt ein Kegelschnitt beschreiben lässt, welcher durch die Ecken eines gegebenen Dreiecks geht.

Gegeben seien die Punkte (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3). Der spitze Winkel, um welchen die Axen des gesuchten Kegelschnitts gegen die Axen des gegebenen Systems gedreht sind, sei ϑ; ferner sei der Anfangspunkt selbst der Mittelpunkt der Curve.

Heisst die Gleichung des gesuchten Kegelschnitts

$$\frac{x'^2}{A} + \frac{y'^2}{B} = 1$$

so muss

$$\frac{(x_1 \cos\vartheta + y_1 \sin\vartheta)^2}{A} + \frac{(-x_1 \sin\vartheta + y_1 \cos\vartheta)^2}{B} = 1$$

$$\frac{(x_2 \cos\vartheta + y_2 \sin\vartheta)^2}{A} + \frac{(-x_2 \sin\vartheta + y_2 \cos\vartheta)^2}{B} = 1$$

Digitized by Google

$$\frac{(x_3\cos\vartheta+y_3\sin\vartheta)^2}{A}+\frac{(-x_3\sin\vartheta+y_3\cos\vartheta)^2}{B}=1$$

sein, woraus ϑ, A und B bestimmt werden können. Nehmen wir aus den beiden letzten Gleichungen $\frac{1}{A}$ und $\frac{1}{B}$ und substituiren in die erste, so ergiebt sich nach geeigneter Zusammenfassung und Reduction

$$\operatorname{tg}(2\vartheta)=-\frac{x_1^2y_2^2-x_2^2y_1^2+x_2^2y_3^2-x_3^2y_2^2+x_3^2y_1^2-x_1^2y_3^2}{(x_1^2+y_1^2)(x_2y_2-x_3y_3)+(x_2^2+y_2^2)(x_3y_3-x_1y_1)+(x_3^2+y_3^2)(x_1y_1-x_2y_2)}$$

Damit ist der Winkel ϑ im allgemeinen eindeutig bestimmt. Die andern Gleichungen liefern dann die Werte von A und B. Die Aufgabe ist also zu lösen und zwar im allgemeinen nur auf eine Art.

Es giebt mehrere Fälle, in welchen die Axenrichtung von vorn herein bekannt ist. Dies ist z. B. der Fall, wenn 0 auf einer Mittelsenkrechten des Dreiecks liegt. In diesem Falle muss diese Senkrechte selbst die neue Axe sein. Analytisch gestaltet sich dann die Sache folgendermassen:

Ist z. B.

$$x_2^2+y_2^2=x_3^2+y_3^2$$

so wird

$$\operatorname{tg}(2\vartheta)=-\frac{(x_3^2-x_2^2)(x_1^2+y_1^2-x_2^2-y_2^2)}{(x_2y_2-x_3y_3)(x_1^2+y_1^2-x_2^2-y_2^2)}$$

oder sofern nicht auch

$$x_1^2+y_1^2=x_2^2+y_2^2 \quad \text{ist,}$$

$$\operatorname{tg}(2\vartheta)=-\frac{x_3^2-x_2^2}{x_2y_2-x_3y_3}$$

woraus

$$\operatorname{tg}\vartheta=\frac{y_2+y_3}{x_2+x_3}=-\frac{x_2-x_3}{y_2-y_3}$$

sich ergiebt, welche Ausdrücke in der Tat besagen, dass die Axe die Seite P_2P_3 des Dreiecks halbirt und zu ihr senkrecht steht.

Ist gleichzeitig auch

$$x_1^2+y_1^2=x_2^2+y_2^2$$

d. h. ist 0 der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten des Dreiecks, so nimmt der Ausdruck für $\operatorname{tg}(2\vartheta)$ die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ an. Die

umbeschriebene Curve ist in diesem Falle der Kreis, bei welchem allerdings jede beliebige Richtung als Axenrichtung angenommen werden kann.

Rückt 0 in den Mittelpunkt der Strecke P_2P_3, so wird

$$x_3 = -x_2, \quad y_3 = -y_2$$

und der Ausdruck für $\mathrm{tg}(2\vartheta)$ nimmt abermals die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ an. Es kann also wieder jede beliebige Richtung als Axenrichtung angenommen werden, doch hat jetzt unsere Aufgabe zum Unterschied von dem vorigen Falle unendlich viele Lösungen, denn es wird jeder Kegelschnitt, welcher 0 als Mittelpunkt hat und durch P_1 und P_2 geht, von selbst auch durch P_3 gehen.

Zur Lösung weiterer singulären Fälle wollen wir das ursprüngliche Axensystem so annehmen, dass die y axe durch die Mitte der Seite P_2P_3 hindurchgeht. Dann ist

$$x_3 = -x_2$$

zu setzen, und es wird

$$\mathrm{tg}(2\vartheta) = \frac{(x_1^2 - x_2^2)(y_2 + y_3)(y_2 - y_3)}{-(y_2+y_3)[x_1y_1(y_2-y_3) + x_2(x_2^2 - x_1^2 - y_1^2 + y_2y_3)]}$$

Nehmen wir ferner an, dass nicht auch

$$y_3 = -y_2$$

ist, d. h. dass nicht 0 der Mittelpunkt von P_2P_3 ist, in welchem Falle die Aufgabe nach dem Vorhergehenden unendlich viele Lösungen zulässt, so kommt

$$\mathrm{tg}(2\vartheta) = \frac{(x_1^2 - x_2^2)(y_2 - y_3)}{-x_1y_1(y_2-y_3) - x_2(x_2^2 - x_1^2 - y_1^2 + y_2y_3)}$$

Diese Darstellung lässt zunächst erkennen, dass die oben angeführten Fälle die einzigen sind, in denen der Winkel ϑ nicht eindeutig bestimmt werden kann. Der Zähler verschwindet nämlich erstens, wenn

$$y_2 = y_3$$

ist, wenn also 0 auf dem Mittellote von P_2P_3 liegt. Der Nenner reducirt sich dann auf $x_2(x_1^2 + y_1^2 - x_2^2 - y_2^2)$ und verschwindet, wenn

$$x_2 = 0$$

ist, d. h. wenn 0 der Mittelpunkt von P_2P_3 selbst ist, oder wenn

$$x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2$$

ist, d. h. wenn 0 der Schnittpunkt der 3 Mittellote des Dreiecks ist.

Zweitens verschwindet der Zähler, wenn

$$x_1^2 = x_2^2$$

wenn also P_1 auf einer durch P_2 oder P_3 zur y axe parallel gezogenen Geraden liegt oder wenn 0 auf einer der beiden Geraden liegt, welche durch die Mitten der Seiten P_2P_3 und P_2P_1 respective P_2P_3 und P_3P_1 gezogen werden können.

Nehmen wir an, um einen bestimmten Fall herauszugreifen, es sei

$$x_1 = x_2$$

so wird der Nenner $x_1(y_1 - y_2)(y_1 + y_3)$. Da nun in diesem Falle weder

$$x_1 = 0 \quad \text{noch} \quad y_1 = y_2$$

ist, so kann der Nenner nur dann verschwinden, wenn

$$y_1 = -y_3$$

ist, d. h. wenn 0 der Mittelpunkt von P_1P_3 ist. Aehnlich im Falle

$$x_1 = -x_2$$

Damit ist erwiesen, dass der Winkel ϑ stets eindeutig bestimmt ist, wenn nur der Punkt 0 nicht gerade der Schnittpunkt der 3 Mittellote oder die Mitte einer Dreiecksseite ist.

Gleichzeitig erfahren wir aber, wenn wir diese speciellen Fälle ausschliessen, dass für

$$x_1^2 = x_2^2 \quad \text{der Wert} \quad \operatorname{tg}(2\vartheta) = 0$$

ist, dass also die betreffende Halbirungslinie der Seiten die neue Axenrichtung selbst darstellt. In diesem Falle geht die Curve über in ein Paar paralleler Geraden, nämlich in die der neuen Axe parallele Seite des Dreiecks und die durch die gegenüberliegende Ecke dazu gezogene Parallele.

Wenn endlich P_1 auf P_20 oder P_30 oder auf der Verlängerung dieser Strecke, d. h. wenn der Mittelpunkt 0 auf einer Seite des Dreiecks oder der Verlängerung derselben liegt, so artet die Curve in 2 sich schneidende Geraden aus, nämlich in die betreffende Dreiecksseite selbst und die Verbindungslinie von 0 mit dem dritten Eckpunkt. Die neue Axe halbirt den Winkel dieser Geraden.

Wir schliessen hier eine andere Ableitung und Darstellung von von 2ϑ an, welche bei beliebiger Lage von 0 zur Construction dieses Winkels benutzt werden kann.

Digitized by Google

Wir verbinden zu dem Zwecke 0 mit den Mitten von P_1P_2 und P_2P_3, bezeichnen ferner die Winkel, welche diese Geraden mit der x axe bilden, mit α_3 und α_1 und die Winkel, welche die Seiten P_1P_2 und P_2P_3 selbst mit der x axe bilden, mit β_3 und β_1. Da jede der Verbindungslinien zur entsprechenden Dreiecksseite conjugirt ist, für 2 conjugirte Richtungen aber das Product der trigonometrischen Tangenten ihrer Neigungswinkel zur Axe des Kegelschnitts constant sein muss, so ergiebt sich für ϑ die Bedingung:

$$\operatorname{tg}(\alpha_3 - \vartheta) \cdot \operatorname{tg}(\beta_3 - \vartheta) = \operatorname{tg}(\alpha_1 - \vartheta) \cdot \operatorname{tg}(\beta_1 - \vartheta)$$

woraus

$$\operatorname{tg}(2\vartheta) = \frac{2(\operatorname{tg}\alpha_3 \operatorname{tg}\beta_3 - \operatorname{tg}\alpha_1 \operatorname{tg}\beta_1)}{(\operatorname{tg}\alpha_3 + \operatorname{tg}\beta_3)(1 + \operatorname{tg}\alpha_1 \operatorname{tg}\beta_1) - (\operatorname{tg}\alpha_1 + \operatorname{tg}\beta_1)(1 + \operatorname{tg}\alpha_3 \operatorname{tg}\beta_3)}$$

wird.

Legen wir jetzt die y axe wieder durch die Mitte von P_2P_3, so wird

$$\alpha_1 = 90^0$$

und der Ausdruck reducirt sich auf

$$\operatorname{tg}(2\vartheta) = \frac{2 \operatorname{tg}\beta_1}{1 + \operatorname{tg}\alpha_3 \operatorname{tg}\beta_3 - (\operatorname{tg}\alpha_3 + \operatorname{tg}\beta_3) \operatorname{tg}\beta_1}$$

welcher eine, wenn auch complicirte Construction des Winkels zulässt.

Doch wollen wir uns hier nicht weiter auf dieselbe einlassen, da wir in einem späteren Capitel, wenn erst die Beziehungen zwischen Kreis und beliebigem Kegelschnitt näher erörtert sind, eine Construction kennen lernen werden, welche dieselbe Aufgabe mit den einfachsten Hülfsmitteln löst.

Es erübrigt noch für die verschiedenen Lagen des Punktes 0 die Gestalt der Curve näher zu bestimmen.

Wir fanden, dass die Curve in ein Paar paralleler Geraden ausartet, sobald der Punkt 0 eine der 3 Geraden passirt, welche sich durch die Mitten von je 2 Seiten des Dreiecks zeichnen lassen. Diese die Seiten halbirenden Geraden sind es, an welchen bei stetigem Fortschreiten von 0 der Uebergang von einer Gattung von Curven zur andern sich vollzieht. War dieselbe vorher eine Ellipse, so nimmt mit der Annäherung an eine solche Gerade die eine Axe derselben beständig zu, um endlich über jedes Mass hinaus zu wachsen. Die Ellipse geht dabei in ein Paar paralleler Geraden über.

Entfernt sich, in derselben Richtung fortschreitend, der Punkt 0

wieder von der Geraden, so verwandeln sich die beiden Parallelen in die beiden nach entgegengesetzter Seite gekrümmten Zweige einer Hyperbel.

Eine ebenso wichtige Rolle wie diese die Seiten halbirenden Geraden spielen die Seiten des Dreiecks und die Verlängerungen derselben. Unsere Untersuchung hat ergeben, dass die Curve jedes Mal in ein Paar sich schneidende gerade Linien übergeht, wenn der Punkt O auf seinem Wege durch eine Seite des Dreiecks oder die Verlängerung derselben hindurchgeht. Zufolge der Stetigkeit muss aber sowol vor wie nach diesem Durchgang die Curve eine Hyperbel sein, deren Scheitel bei der Annäherung an die Gerade auf einander zurücken, bis sie zusammenfallen und sich dann wieder von einander entfernen. Doch entfernen sie sich nicht in der Richtung, welche derjenigen, in welcher die Annäherung geschah, entgegengesetzt ist, sondern in einer hierzu senkrechten. Damit im Zusammenhange steht, dass an diesen Stellen die beiden Axen der Hyperbel ihre Rollen wechseln, die reelle zur imaginären und die imaginäre zur reellen wird; dass ferner an diesen Stellen die Verteilung der 3 Ecken des Dreiecks auf die beiden Zweige der Hyperbel eine Aenderung erfährt.

Allen diesen Ueberlegungen lässt sich in Betreff der Art der Curven das Folgende entnehmen:

Wir erhalten eine Ellipse, wenn O sich innerhalb des Dreiecks befindet, welches von den die Seiten halbirenden Geraden umschlossen wird, ferner für alle Punkte innerhalb der Scheitelwinkel dieses Dreiecks. Die umbeschriebene Curve ist eine Hyperbel für alle andern Punkte des Raumes, und zwar liegen sämtliche Ecken des Dreiecks auf einem Zweig der Hyperbel, wenn der Mittelpunkt sich innerhalb eines der 3 Scheitelwinkel des gegebenen Dreiecks befindet, im andern Falle liegen 2 Ecken auf dem einen Zweige, die dritte auf dem andern.

§ 10.

Die ähnliche Curve der 9 Punkte für beliebige Lage des Punktes O.

Wir wollen jetzt die auf umbeschriebene Curven des Dreiecks bezüglichen Sätze, die wir für den Fall der Ellipse aus bekannten planimetrischen Sätzen abgeleitet haben, auf beliebige Kegelschnitte übertragen. Wie bereits ausgeführt worden, handelt es sich dabei hauptsächlich um den Nachweis, dass auch bei beliebiger Annahme des Punktes O die Mitten der Seiten, die Fusspunkte der conjugirten

Transversalen und die Mitten der oberen Abschnitte derselben auf einer ähnlichen Curve liegen, deren Axe gleich der Hälfte der Axen der umbeschriebenen Curve ist.

Die umbeschriebene Curve habe die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \varepsilon \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Wir bilden dann die ganze Ebene ab und erhalten als Abbild die Curve

$$\xi^2 + \varepsilon \eta^2 = 1$$

und ein derselben einbeschriebenes Dreieck, dessen Eckpunkte die Coordinaten

$$Q_1 = (\xi_1, \eta_1), \quad Q_2 = (\xi_2, \eta_2), \quad Q_3 = (\xi_3, \eta_3)$$

haben mögen. Wir bezeichnen ferner die Mitten der Seiten mit R_1, R_2, R_3, die Fusspunkte der Transversalen mit T_1, T_2, T_3, die Mitten der oberen Abschnitte mit U_1, U_2, U_3, den Schwerpunkt mit S, den Schnittpunkt der Transversalen mit V und den Mittelpunkt der Curve der 9 Punkte mit N.

Es ist dann

$$SV = 2 \,.\, OS$$

und da N die Strecke OV halbiren soll, so muss

$$OS = 2 \,.\, SN$$

und

$$N = \left(\frac{\xi_1 + \xi_2 + \xi_3}{2}, \frac{\eta_1 + \eta_2 + \eta_3}{2} \right)$$

sein. Die um N als Mittelpunkt beschriebene ähnliche Curve hat daher die Gleichung

$$\left(\xi - \frac{\xi_1 + \xi_2 + \xi_3}{2} \right)^2 + \varepsilon \left(\eta - \frac{\eta_1 + \eta_2 + \eta_3}{2} \right)^2 = \tfrac{1}{4}$$

und es ist nachzuweisen, dass diese Curve wirklich durch die angegebenen 9 Punkte hindurchgeht.

Was zunächst die Mitten der Seiten angeht, so ist

$$R_1 = \left(\frac{\xi_2 + \xi_3}{2}, \frac{\eta_2 + \eta_3}{2} \right)$$

Setzen wir in die Gleichung ein, so ergiebt sich

$$\xi_1^2 + \varepsilon \eta_1^2 = 1$$

welche Gleichung aber erfüllt ist, da (ξ_1, η_1) auf der Curve

$$\xi^2 + \varepsilon\eta^2 = 1$$

liegen soll. Ganz ebenso wird die Sache für R_2 und R_3.

Da

$$V = (\xi_1 + \xi_2 + \xi_3,\ \eta_1 + \eta_2 + \eta_3)$$

ist, so werden ferner die Coordinaten von

$$U_1 = \left(\frac{\xi_2 + \xi_3}{2} + \xi_1,\ \frac{\eta_2 + \eta_3}{2} + \eta_1\right)$$

deren Substitution wiederum auf die Gleichung

$$\xi_1^2 + \varepsilon\eta_1^2 = 1$$

führt.

Gleichzeitig erfahren wir, dass die relativen Coordinaten von R_1 und U_1 in Bezug auf N dem absoluten Werte nach gleich sind und sich nur durch das Vorzeichen unterscheiden, dass also die Punkte U_1 und V_1 Endpunkte eines Durchmessers sind, dass ihre Verbindungslinie durch N geht und von N halbirt wird. Ebenso muss N auf R_2U_2 und R_3U_3 liegen und diese Linien halbiren.

Dieses Resultat hätte übrigens auch ohne Rechnung direct aus der Figur abgeleitet werden können, wonach es sich dann von selbst verstanden hätte, dass der um N als Mittelpunkt durch R_1, R_2, R_3 gezeichnete Kegelschnitt auch durch U_1, U_2, U_3 gehen muss.

Wir kommen nun zu den Fusspunkten der Transversalen. Die Gleichung von Q_1T_1 lautet:

$$\eta = \eta_1 + (\xi - \xi_1)\frac{\eta_2 + \eta_3}{\xi_2 + \xi_3}$$

Dazu stellen wir die Gleichung der Geraden Q_2Q_3, welche lautet:

$$\eta = \eta_3 + (\xi - \xi_3)\frac{\eta_2 - \eta_3}{\xi_2 - \xi_3}$$

und bestimmen aus beiden ξ und η. Dann kommt:

$$\xi - \frac{\xi_1 + \xi_2 + \xi_3}{2} = \frac{1}{2(\xi_2\eta_3 - \xi_3\eta_2)}\left[\eta_1(\xi_3^2 - \xi_2^2) + \xi_1(\xi_2\eta_2 - \xi_3\eta_3)\right]$$

und

$$\eta - \frac{\eta_1 + \eta_2 + \eta_3}{2} = \frac{1}{2(\xi_2\eta_3 - \xi_3\eta_2)}\left[\xi_1(\eta_3^2 - \eta_2^2) + \eta_1(\xi_2\eta_2 - \xi_3\eta_3)\right]$$

und die Bedingungsgleichung wird

$$[\eta_1(\xi_3^2-\xi_2^2)+\xi_1(\xi_2\eta_2-\xi_3\eta_3)]^2+\varepsilon[\xi_1(\eta_3^2-\eta_2^2)+\eta_1(\xi_2\eta_3-\xi_3\eta_2)]^2 = (\xi_2\eta_3-\xi_3\eta_2)^2$$

deren Bestätigung sich mit Benutzung der Gleichungen für ξ und η leicht bewerkstelligen lässt. Auch dieses Resultat konnte direct aus der Figur abgeleitet werden. Verbindet man die Mitte von R_2R_3 mit N, so trifft diese Linie oder die Verlängerung derselben R_1T_1 in der Mitte und ist selbst zu R_1T_1 conjugirt. T_1 ist also weiter nichts als der Endpunkt der durch R_1 zu R_2R_3 parallelen Sehne. Ebenso muss die Verbindungslinie der Mitte von R_1R_3 mit N oder die Verlängerung die Strecke R_2T_2, und endlich die Verbindungslinie von R_1R_2 mit N oder die Verlängerung die Strecke R_3T_3 halbiren. Es stellt sich demnach heraus, dass die Punkte U und T diejenigen Punkte sind, die man vermöge der Eigenschaften der Mittelpunktscurven stets finden kann, wenn der Mittelpunkt O und 3 Punkte der Peripherie R_1, R_2, R_3 gegeben sind. Zu jedem dieser R gehört nämlich erstens der gegenüberliegende Endpunkt U des entsprechenden Durchmessers und zweitens der Endpunkt T der durch ihn zur Gegenseite parallelen Sehne.

Nachdem der Nachweis erbracht ist, dass sämtliche 9 Punkte auf dem angegebenen Kegelschnitt liegen, werfen wir nun noch einen Blick auf die gegenseitige Lage der beiden Curven. Man erkennt, dass dieselben sich in perspectivischer Lage befinden, für welche S das Aehnlichkeitscentrum ist, d. h. dass man zu jedem Punkte der umbeschriebenen Curve einen zugehörigen der andern bekommt, wenn man denselben mit S verbindet und diese Linie um die Hälfte verlängert. So erhält man auch zu O den Mittelpunkt N zu Q_1 den Punkt R, zu Q_2 den Punkt R_2, zu Q_3 den Punkt R_3. Die andern, den Punkten U und T entsprechenden Punkte der umbeschriebenen Curve sind die Endpunkte der zu Q_1, Q_2, Q_3 gehörigen Durchmesser und die Endpunkte der Sehnen, welche durch jeden der Punkte Q zur Verbindungslinie der beiden andern parallel gezogen werden können. Man findet diese Punkte auch, indem man durch die Ecken des gegebenen Dreiecks Parallelen zu den gegenüberliegenden Seiten zieht und in dem entstandenen grossen Dreieck die conjugirten Ecktransversalen zeichnet. Die Mittelpunkte der oberen Abschnitte entsprechen dann den Punkten U, die Fusspunkte derselben den Punkten T. Ueberhaupt kann jede einem Dreieck umbeschriebene Curve angesehen werden als die Curve der 9 Punkte für ein grösseres Dreieck, dessen Seiten durch die Ecken des gegebenen den gegenüberliegenden Seiten parallel laufen.

Alle Resultate gelten natürlich auch für den Fall, dass der Punkt O ins Unendliche rückt, und die umbeschriebene Curve in eine

Digitized by Google

Parabel übergeht. Es lassen sich unendlich viele Parabeln durch die Ecken eines Dreiecks zeichnen, von denen jede einzelne durch die Richtung der Hauptaxe vollständig bestimmt ist. Zeichnet man dasjenige Dreieck, dessen Seiten durch die Ecken des gegebenen gehen und den Seiten desselben parallel sind, zieht ferner durch die Ecken dieses Dreiecks Parallelen zur Axe, so treffen diese Parallelen die Seiten des grossen Dreiecks oder die Verlängerung derselben in der Parabel.

Ist einem Dreieck eine Parabel umbeschrieben, und zieht man durch die Ecken des Dreiecks Parallelen zur Axe, so liegen die Schnittpunkte dieser Parallelen mit den gegenüberliegenden Seiten oder der Verlängerung derselben und die Mitten der Seiten auf einer zweiten Parabel vom halben Parameter, deren Axenrichtung derjenigen der umbeschriebenen Parabel entgegengesetzt ist. Auch hier ist der Schwerpunkt S das Aehnlichkeitscentrum beider Curven; die Verbindungslinie der beiden Scheitel geht durch S und wird durch diesen Punkt im Verhältniss von 2 : 1 geteilt.

Wir gehen nun zur Untersuchung berührender Curven über.

§ 11.

Beweis des Satzes: Verbindet man den Mittelpunkt einer berührenden Curve des Dreiecks mit der Mitte einer Seite und zieht durch die gegenüberliegende Ecke die Parallele, so trifft diese die Seite oder die Verlängerung derselben in einem Punkte, welcher von der Mitte der Seite ebenso weit entfernt ist wie der Berührungspunkt, aber nach entgegengesetzter Richtung hin liegt.

Wir gehen beim Beweise nicht vom Dreieck, sondern von der berührenden Curve aus. Das Abbild derselben sei

$$\xi^2 + \varepsilon\eta^2 = 1$$

ferner seien die Coordinaten der Berührungspunkte

$$B_1 = (\xi_1, \eta_1), \quad B_2 = (\xi_2, \eta_2), \quad B_3 = (\xi_3, \eta_3)$$

Die Gleichungen der Tangenten resp. der Seiten des Dreiecks lauten dann

$$\xi\xi_1 + \varepsilon\eta\eta_1 = 1, \quad \xi\xi_2 + \varepsilon\eta\eta_2 = 1, \quad \xi\xi_3 + \varepsilon\eta\eta_3 = 1 \qquad (1)$$

Diese Tangenten schneiden sich in den Ecken Q_1, Q_2, Q_3 des Dreiecks, deren Coordinaten wir mit (u_1, v_1), (u_2, v_2), (u_3, v_3) bezeichnen wollen.

Es wird dann

$$u_1 = \underset{(23)}{\eta_3 - \eta_2}, \quad u_2 = \underset{(31)}{\eta_1 - \eta_3}, \quad u_3 = \underset{(12)}{\eta_2 - \eta_1},$$
$$v_1 = -\varepsilon \underset{(23)}{\xi_3 - \xi_2}, \quad v_2 = -\varepsilon \underset{(31)}{\xi_1 - \xi_3}, \quad v_3 = -\varepsilon \underset{(12)}{\xi_2 - \xi_1} \tag{2}$$

sofern wir wie in § 4. die Determinanten in ξ und η mit (23), (31) und (12) bezeichnen.

Wir denken uns nun den Mittelpunkt M mit der Mitte R_1 von $Q_2 Q_3$ verbunden und ziehen durch Q_1 die Parallele, welche $Q_2 Q_3$ oder die Verlängerung in T_1 trifft. Es handelt sich dann darum nachzuweisen, dass

$$T_1 R_1 = R_1 B_1 \quad \text{oder} \quad T_1 Q_2 = Q_3 B_1 \quad \text{ist.}$$

Die Gleichung der durch Q_1 gezogenen Parallele heisst

$$\eta = v_1 + (\xi - u_1) \frac{v_2 + v_3}{u_2 + u_3}$$

während

$$\eta = v_2 + (\xi - u_2) \frac{v_2 - v_3}{u_2 - u_3}$$

die Gleichung von $Q_2 Q_3$ darstellt. Für den Schnittpunkt T_1 wird daher die erste Coordinate

$$\xi = \frac{v_2 - v_1 + u_1 \dfrac{v_2 + v_3}{u_2 + u_3} - u_2 \dfrac{v_2 - v_3}{u_2 - u_3}}{\dfrac{v_2 + v_3}{u_2 + u_3} - \dfrac{v_2 - v_3}{u_2 - u_3}}$$

Für die relative erste Coordinate von T_1 in Bezug auf den Punkt Q_2 kommt deswegen

$$\xi - u_2 = \frac{(u_1 - u_2) \dfrac{v_2 + v_3}{u_2 + u_3} + v_2 - v_1}{\dfrac{v_2 + v_3}{u_2 + u_3} - \dfrac{v_2 - v_3}{u_2 - u_3}}$$
$$= (u_2 - u_3) \frac{u_1 v_2 - u_2 v_1 - u_2 v_3 + u_3 v_2 - u_3 v_1 + u_1 v_3}{2(u_2 v_3 - u_3 v_2)} \tag{3}$$

Es kommt nun darauf an, die in diesem Ausdruck vorkommenden Coordinaten von Q_1, Q_2, Q_3 durch die Coordinaten von B_1, B_2, B_3 zu ersetzen. Ausser der oben angeführten Gleichung für $Q_2 Q_3$ haben wir noch die weitere Gleichung

$$\xi\xi_1 + \varepsilon\eta\eta_1 = 1$$

deren Vergleichung

$$\xi_1 = \frac{v_3 - v_2}{u_2 v_3 - u_3 v_2}, \quad \eta_1 = -\varepsilon\frac{u_3 - u_2}{u_2 v_3 - u_3 v_2}$$

ergiebt. Analog findet sich

$$\xi_2 = \frac{v_1 - v_3}{u_3 v_1 - u_1 v_3}, \quad \eta_2 = -\varepsilon\frac{u_1 - u_3}{u_3 v_1 - u_1 v_3} \quad \text{und}$$

$$\xi_3 = \frac{v_2 - v_1}{u_1 v_2 - u_2 v_1}, \quad \eta_3 = -\varepsilon\frac{u_2 - u_1}{u_1 v_2 - u_2 v_1}$$

Multipliciren wir jede dieser Gleichungen mit dem Nenner der rechten Seite und addiren, so erhalten wir

$$\xi_1(u_2 v_3 - u_3 v_2) + \xi_2(u_3 v_1 - u_1 v_3) + \xi_3(u_1 v_2 - u_2 v_1) = 0$$
$$\eta_1(u_2 v_3 - u_3 v_2) + \eta_2(u_3 v_1 - u_1 v_3) + \eta_3(u_1 v_2 - u_2 v_1) = 0$$

woraus

$$\begin{aligned} u_2 v_3 - u_3 v_2 &= t\,.\,(23) \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 &= t\,.\,(31) \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 &= t\,.\,(12) \quad \text{wird.} \end{aligned} \tag{4}$$

Setzen wir diese Werte in (3) ein, so kommt

$$\xi - u_2 = (u_2 - u_3)\frac{(12) - (23) - (31)}{2(23)} = \varepsilon\eta_1\frac{t}{2}[(12) - (23) - (31)] \tag{5}$$

Directe Ausrechnung ergiebt nun

$$u_2 v_3 - u_3 v_2 = \frac{\varepsilon}{(12)(31)}[(12) + (23) + (31)]$$

$$u_1 v_3 - u_3 v_1 = \frac{\varepsilon}{(23)(12)}[(12) + (23) + (31)] \tag{6}$$

$$u_1 v_2 - u_2 v_1 = \frac{\varepsilon}{(31)(23)}[(12) + (23) + (31)]$$

also

$$u_2 v_3 - u_3 v_2 + u_3 v_1 - u_1 v_3 + u_1 v_2 - u_2 v_1$$
$$= \frac{\varepsilon}{(12)(23)(31)}[(12) + (23) + (31)]^2 \tag{7}$$

Andrerseits ergiebt sich aus (4) durch Addition

$$u_2 v_3 - u_3 v_2 + u_1 v_3 - u_3 v_1 + u_1 v_2 - u_2 v_1 = t[(12) + (23) + (31)] \tag{8}$$

Es muss also der Factor

Digitized by Google

$$t = \frac{\varepsilon}{(12)(23)(31)}[(12)+(23)+(31)] \quad \text{sein.} \tag{9}$$

Setzen wir diesen Wert in (5) ein, so finden wir

$$\xi - u_2 = \eta_1 \frac{(12)^2-(23)^2-(31)^2}{2(12)(23)(31)} - \frac{\eta_2}{(12)} \tag{10}$$

Dieser Ausdruck soll nun gleich der relativen ersten Coordinate des Punktes Q_3 in Bezug auf den Punkt B_1 sein, also gleich

$$u_3 - \xi_1 = \frac{\eta_2-\eta_1}{(12)} - \xi_1 = \frac{2\eta_1(\xi_1\xi_2+\varepsilon\eta_1\eta_2)(23)(31)}{2(12)(23)(31)} - \frac{\eta_1}{(12)} \tag{11}$$

Unsere Behauptung ist somit, wie die Gegenüberstellung beider Werte erkennen lässt, erwiesen, sofern sich zeigen lässt, dass

$$2(\xi_1\xi_2+\varepsilon\eta_1\eta_2)(23)(31) = (12)^2-(23)^2-(31)^2 \quad \text{ist.} \tag{12}$$

Nun ist aber

$$\begin{aligned}(12)^2 &= \varepsilon[1-(\xi_1\xi_2+\varepsilon\eta_1\eta_2)^2]\\ (23)^2 &= \varepsilon[1-(\xi_2\xi_3+\varepsilon\eta_2\eta_3)^2]\\ (31)^2 &= \varepsilon[1-(\xi_3\xi_1+\varepsilon\eta_3\eta_1)^2]\end{aligned} \tag{13}$$

Die rechte Seite der Gleichung (12) ist daher auch gleich

$$\varepsilon\{-1-(\xi_1\xi_2+\varepsilon\eta_1\eta_2)^2+(\xi_2\xi_3+\varepsilon\eta_2\eta_3)^2+(\xi_3\xi_1+\varepsilon\eta_3\eta_1)^2\}$$

Die linke Seite ergiebt durch directes Multipliciren von (23) mit (31) nach geeigneter Zusammenfassung der Glieder:

$$2\varepsilon(\xi_1\xi_2+\varepsilon\eta_1\eta_2)(\xi_2\xi_3+\varepsilon\eta_2\eta_3)(\xi_3\xi_1+\varepsilon\eta_3\eta_1)-2\varepsilon(\xi_1\xi_2+\varepsilon\eta_1\eta_2)^2$$

Mit Berücksichtigung dieser Werte verwandelt sich unsere Bedingungsgleichung (12) in die symmetrisch gebaute Gleichung:

$$\begin{aligned}&(\xi_1\xi_2+\varepsilon\eta_1\eta_2)^2+(\xi_2\xi_3+\varepsilon\eta_2\eta_3)^2+(\xi_3\xi_1+\varepsilon\eta_3\eta_1)^2-1\\ &\quad=2(\xi_1\xi_2+\varepsilon\eta_1\eta_2)(\xi_2\xi_3+\varepsilon\eta_2\eta_3)(\xi_3\xi_1+\varepsilon\eta_3\eta_1)\end{aligned} \tag{14}$$

Handelt es sich um den Kreis $\xi^2+\eta^2=1$, so ist

$$\xi_1\xi_2+\eta_1\eta_2=\cos\alpha_{12}, \quad \xi_2\xi_3+\eta_2\eta_3=\cos\alpha_{23}, \quad \xi_3\xi_1+\eta_3\eta_1=\cos\alpha_{31}$$

und es stellt die Gleichung

$$\cos^2\alpha_{12}+\cos^2\alpha_{23}+\cos^2\alpha_{31}-1=2\cos\alpha_{12}\cos\alpha_{23}\cos\alpha_{31}$$

eine bekannte goniometrische Formel dar.

Wir haben hier nachzuweisen, dass dieselbe auch für den Fall $\varepsilon=-1$ gültig ist.

Digitized by Google

Da die Punkte B_1, B_2, B_3 auf der Curve liegen, muss

$$\xi_1^2 + \varepsilon\eta_1^2 = \xi_2^2 + \varepsilon\eta_2^2 = \xi_3^2 + \varepsilon\eta_3^2 = 1$$

sein, welche Gleichungen sich zu den beiden Relationen

$$(1-\xi_1^2)(1-\xi_2^2)(1-\xi_3^2) = \varepsilon\eta_1^2\eta_2^2\eta_3^2 \quad \text{und}$$

$$(1-\varepsilon\eta_1^2)(1-\varepsilon\eta_2^2)(1-\varepsilon\eta_3^2) = \xi_1^2\xi_2^2\xi_3^2$$

combiniren lassen. Addition derselben ergiebt

$$\xi_1^2\xi_2^2 + \xi_2^2\xi_3^2 + \xi_3^2\xi_1^2 + \eta_1^2\eta_2^2 + \eta_2^2\eta_3^2 + \eta_3^2\eta_1^2 - 1 = 2\xi_1^2\xi_2^2\xi_3^2 + 2\varepsilon\eta_1^2\eta_2^2\eta_3^2$$

woraus

$$(\xi_1\xi_2+\varepsilon\eta_1\eta_2)^2+(\xi_2\xi_3+\varepsilon\eta_2\eta_3)^2+(\xi_3\xi_1+\varepsilon\eta_3\eta_1)^2-1=2\xi_1^2\xi_2^2\xi_3^2+2\varepsilon\eta_1^2\eta_2^2\eta_3^2$$
$$+2\varepsilon\xi_1\xi_2\eta_1\eta_2(\xi_3^2+\varepsilon\eta_3^2)+2\varepsilon\xi_2\xi_3\eta_2\eta_3(\xi_1^2+\varepsilon\eta_1^2)+2\varepsilon\xi_3\xi_1\eta_3\eta_1(\xi_2^2+\varepsilon\eta_2^2)$$
$$=2(\xi_1\xi_2+\varepsilon\eta_1\eta_2)(\xi_2\xi_3+\varepsilon\eta_2\eta_3)(\xi_3\xi_1+\varepsilon\eta_3\eta_1) \quad \text{wird.}$$

Damit ist die Richtigkeit der Gleichung (14) und die Identität der Ausdrücke für $\xi - u_2$ und $u_3 - \xi_1$ nachgewiesen. In ähnlicher Weise lässt sich der Nachweis für die zweite Coordinate führen.

Daraus folgt aber, dass die Punkte T_1 und B_1 in der Tat von Q_2 resp. Q_3 und demnach auch von R_1 gleichweit entfernt sind und nach verschiedener Seite hin liegen.

Was aber für das Abbild gilt, muss auch für die Curve selbst gelten, da es sich um die Entfernung von Punkten handelt, die auf ein und derselben Geraden liegen.

§ 12.

Der geometrische Ort für die Mittelpunkte ähnlicher Curven, welche die Schenkel eines Winkels berühren.

Der im vorigen Paragraphen bewiesene Satz macht es auf einfache Weise möglich, zum Mittelpunkt einer berührenden Curve die drei Berührungspunkte zu finden. Der am Schlusse von § 8. angekündigte Lehrsatz enthält aber mehr, die Schnittpunkte der Seiten mit den durch die Ecken des Dreiecks gezogenen Parallelen sollen selbst Berührungspunkte anderer berührender Curven sein, und zwar soll jeder zu derjenigen Curve gehören, deren Mittelpunkt mit der betreffenden Ecke und dem Mittelpunkt der gegebenen Curve auf einer Geraden liegt. Bevor wir näher auf diese Erweiterung eingehen können, ist es nötig danach zu fragen, ob überhaupt ausser

der einen gegebenen berührenden Curve noch andere existiren müssen und wo die Mittelpunkte derselben zu suchen sind. Eine Antwort hierauf giebt die Untersuchung des geometrischen Orts für die Mittelpunkte aller ähnlichen Curven, welche die Schenkel eines Winkels berühren.

Natürlich denken wir uns wieder die ganze Ebene nach unserm Princip abgebildet. Der Scheitel des Winkels sei der Anfangspunkt, und es seien die Gleichungen der beiden Schenkel

$$l_1\xi + m_1\eta = 0, \quad l_2\xi + m_2\eta = 0$$

Ferner habe die berührende Curve die Gleichung

$$(\xi - u)^2 + \varepsilon(\eta - v)^2 = \sigma$$

wo u, v die Coordinaten des Mittelpunktes bedeuten. Die Berührungspunkte seien endlich

$$B_1 = (\xi_1, \eta_1) \quad \text{und} \quad B_2 = (\xi_2, \eta_2)$$

Dann muss die Gleichung der Tangente

$$\xi\xi_1 + \varepsilon\eta\eta_1 - (\xi + \xi_1)u - \varepsilon(\eta + \eta_1)v + u^2 + v^2 = \sigma \quad \text{mit} \quad l_1\xi + m_1\eta = 0$$

ferner

$$\xi\xi_2 + \varepsilon\eta\eta_2 - (\xi + \xi_2)u - \varepsilon(\eta + \eta_2)v + u^2 + v^2 = \sigma \quad \text{mit} \quad l_2\xi + m_2\eta = 0$$

identisch sein, woraus aber erstens

$$\xi_1 u + \varepsilon\eta_1 v = u^2 + v^2 - \sigma \quad \text{und} \quad \xi_2 u + \varepsilon\eta_2 v = u^2 + v^2 - \sigma$$

also

$$(\xi_1 - \xi_2)u + \varepsilon(\eta_1 - \eta_2)v = 0 \tag{1}$$

und zweitens

$$l_1 : m_1 = \xi_1 - u : \varepsilon(\eta_1 - v) \text{ und } l_2 : m_2 = \xi_2 - u : \varepsilon(\eta_2 - v) \text{ folgt.} \tag{2}$$

Hierzu treten noch die Gleichungen

$$\begin{gathered} l_1\xi_1 + m_1\eta_1 = 0, \quad l_2\xi_2 + m_2\eta_2 = 0 \quad \text{und} \\ (\xi_1 - u)^2 + \varepsilon(\eta_1 - v)^2 = \sigma, \quad (\xi_2 - u)^2 + \varepsilon(\eta_2 - v)^2 = \sigma \end{gathered} \tag{3}$$

Die beiden letzten liefern durch Subtraction

$$(\xi_1 - \xi_2)(\xi_1 + \xi_2 - 2u) - (\eta_1 - \eta_2)(\eta_1 + \eta_2 - 2v) = 0$$

Setzen wir hierin den Wert

$$\xi_1 - \xi_2 = -\frac{\varepsilon(\eta_1 - \eta_2)v}{u}$$

Digitized by Google

wie er sich aus (1) ergiebt, ein, so kommt nach Division mit $\eta_1 - \eta_2$ und Multiplication mit u

$$v(\xi_1 + \xi_2) - u(\eta_1 + \eta_2) = 0 \tag{4}$$

Die erste der Proportionen (2) ergiebt nun

$$m_1\xi_1 - \varepsilon l_1\eta_1 = m_1 u - \varepsilon l_1 v$$

Dazu stellen wir

$$l_1\xi_1 + m_1\eta_1 = 0$$

und berechnen aus beiden Gleichungen die Werte von ξ_1 und η_1. Es kommt dann

$$\xi_1 = \frac{m_1(m_1 u - \varepsilon l_1 v)}{m_1^2 + \varepsilon l_1^2}, \qquad \eta_1 = \frac{-l_1(m_1 u - \varepsilon l_1 v)}{m_1^2 + \varepsilon l_1^2}$$

Ebenso wird

$$\xi_2 = \frac{m_2(m_2 u - \varepsilon l_2 v)}{m_2^2 + \varepsilon l_2^2}, \qquad \eta_2 = \frac{-l_2(m_2 u - \varepsilon l_2 v)}{m_2^2 + \varepsilon l_2^2}$$

Diese Werte subtituiren wir schliesslich in (4), wonach sich bei passender Zusammenfassung der Glieder als Gleichung des geometrischen Orts

$$\frac{v^2}{u^2} - 2\frac{v}{u}\frac{\varepsilon m_1 m_2 - l_1 l_2}{m_1 l_2 + m_2 l_1} = \varepsilon \tag{5}$$

ergiebt.

Dieselbe stellt im allgemeinen zwei durch den Anfangspunkt, d. h. den Scheitel des Winkels gehende gerade Linien dar, welche, da das Product der beiden Wurzelwerte von $\frac{v}{u}$ gleich $-\varepsilon$ ist, in Bezug auf die ähnlichen Kegelschnitte conjugirt sind. Im Falle der Ellipse $\varepsilon = +1$ sind beide Wurzelwerte immer reell, im Falle der Hyperbel $\varepsilon = -1$ aber nur dann, wenn

$$\left(\frac{m_1 l_2 + m_2 l_1}{m_1 m_2 + l_1 l_2}\right)^2 < 1 \text{ ist.}$$

Um die Bedeutung dieser Bedingung zu erkennen, führen wir die beiden concaven Winkel φ_1 und φ_2 ein, welche die Schenkel des Winkels mit der positiven ξ axe bilden. Es ist dann

$$-\frac{l_1}{m_1} = \operatorname{tg}\varphi_1, -\frac{l_2}{m_2} = \operatorname{tg}\varphi_2$$

zu setzen, und es sei die Bezeichnung so gewählt, dass $\varphi_1 < \varphi_2$ ist. Substituiren wir diese Werte, so nimmt die obige Bedingung die Form an

$$\left(\frac{\operatorname{tg}\varphi_1 + \operatorname{tg}\varphi_2}{1+\operatorname{tg}\varphi_1 \operatorname{tg}\varphi_2}\right)^2 < 1$$

welche sich leicht in

$$2\sin^2\varphi_2 \cos(2\varphi_1) < \cos(2\varphi_1)$$

überführen lässt. Ist nun $\cos(2\varphi_1) > 0$, d. h. $\varphi_1 < 45^0$ oder $\varphi_1 > 135^0$, so muss $2\sin^2\varphi_2 < 1$, also auch $\varphi_2 < 45^0$ oder $\varphi_2 > 135^0$ sein. Ist jedoch $\cos(2\varphi_1) < 0$, also $135^0 > \varphi_1 > 45^0$, so muss $2\sin^2\varphi_2 > 1$ und auch $135^0 > \varphi_2 > 45^0$ sein. Im ersten Falle ergiebt die Rechnung für σ stets einen negativen Wert, es ist dann die η axe die reelle Axe der ähnlichen Hyperbeln, im zweiten Falle ist σ positiv und die ξ axe die reelle Axe der Hyperbeln. Die obige Bedingung besagt demnach weiter nichts, als dass beide Schenkel des berührten Winkels parallel 2 nichtschneidenden Durchmessern der Hyperbel sein müssen.

§ 13.

Von den berührenden ähnlichen Curven eines Dreiecks.

Machen wir nun Anwendung auf den Fall des vorletzten Paragraphen. Die gegebene Curve berührte die Schenkel des Winkels $Q_2Q_1Q_3$, daher muss der Mittelpunkt jeder ähnlichen berührenden Curve auf MQ_1 oder auf der durch Q_1 hierzu conjugirt gezogenen Geraden liegen. Die Curve berührt aber ebenso die Schenkel der Winkel $Q_1Q_2Q_3$ und $Q_1Q_3Q_2$, und deshalb müssen dieselben Mittelpunkte ähnlicher berührender Curven auch auf MQ_2 und MQ_3 und auf den durch Q_2 resp. Q_3 gehenden conjugirten Geraden zu suchen sein.

Man bekommt daher die übrigen Mittelpunkte, indem man durch Q_1 zur Verbindungslinie der Berührungspunkte B_2 und B_3 eine Parallele zieht, welche MQ_2 und MQ_3 oder deren Verlängerung in M'' und M''' schneidet, dann den zweiten dieser Schnittpunkte M''' mit Q_2 verbindet und diese Linie bis zum Schnittpunkte M' mit MQ_1 verlängert. Dann sind M', M'', M''' die gesuchten Mittelpunkte, und es muss $M'M'''$ conjugirt MQ_2, also parallel B_1B_3 sein, ferner müssen M', M'' und Q_3 auf einer Geraden liegen, welche zu MQ_3 conjugirt, also parallel B_1B_2 ist.

Die 4 Mittelpunkte haben demnach eine solche Lage zu ein-

ander, dass die Verbindungslinie von je 2 derselben zur Verbindungslinie der beiden andern conjugirt ist und sich mit derselben in einer Ecke des Dreiecks schneidet, wie schon in § 8. von uns behauptet worden war.

Nun muss aber für jeden dieser neuen Mittelpunkte der Lehrsatz von § 11. gültig sein. Man bekommt also z. B. auch zum Mittelpunkte M' den Berührungspunkt B_1' mit der Seite Q_2Q_3, indem man M' mit R_1 verbindet, durch Q_1 die Parallele zieht, welche Q_2Q_3 in T_1' trifft, und dann B_1' so bestimmt, dass

$$R_1B_1' = R_1T_1'$$

wird, aber B_1' auf der andern Seite von R_1 zu liegen kommt. Da aber Q_2Q_3 als Tangente an beide Curven auch für beide zum Radiusvector nach dem Berührungspunkte conjugirt sein muss, so muss $M'B_1'$ parallel MB_1 sein. Dieses ist aber nur möglich, wenn B_1' mit T_1 und T_1' mit B_1 zusammenfällt und $M'R_1$ parallel Q_1B_1 läuft. Wir hätten daher M' auch dadurch finden können, dass wir durch T_1 eine Parallele zu B_1M zogen und diese bis zum Schnittpunkt mit MQ_1 verlängerten. Es ist leicht einzusehen, dass ein auf diese Weise construirter Punkt M' wirklich der Bedingung von § 11. entspricht, und $M'R_1$ parallel Q_1B_1 sein muss. Verlängern wir T_1Q_1 bis zum Schnitt mit der Verlängerung von B_1M in C_1, so muss

$$B_1M = MC_1$$

also C_1 ein Punkt der berührenden Curve sein. Dann verlängern wir noch T_1M' und B_1Q_1 bis zum Schnitt in C_1'. Da

$$B_1M = MC_1$$

ist, und T_1C_1' parallel B_1C_1 läuft, so muss auch

$$T_1M' = M'C_1'$$

und C_1' ein Punkt der zweiten berührenden Curve sein. Dann aber muss endlich auch $M'R_1$ parallel $C_1'B_1$ sein, wie behauptet worden.

Damit ist gezeigt, dass die Fusspunkte T der durch die Ecken des Dreiecks gezogenen Parallelen, die bei der Construction der Berührungspunkte einer berührenden Curve vorkommen, selbst wieder Berührungspunkte anderer berührenden Curven sind, und zwar jede zu derjenigen Curve gehört, deren Mittelpunkt mit dem Mittelpunkte der gegebenen Curve und der entsprechenden Ecke auf einer Geraden liegt. Der am Schlusse des § 8. genannte allgemeine Lehrsatz ist

also jetzt seinem ganzen Inhalte nach bewiesen. Gleichzeitig haben wir gelernt, wie man durch einfache Construction zum Mittelpunkt einer berührenden Curve die Mittelpunkte der 3 andern und sämtliche Berührungspunkte finden kann.

Was die Lage der 4 Mittelpunkte angeht, so überzeugt man sich bald, dass stets einer von ihnen innerhalb des Dreiecks, die 3 andern ausserhalb liegen. Man kann zwei wesentlich verschiedene Lagen der Punkte zu einander unterscheiden.

Verbindet man die äusseren Punkte zu einem Dreieck, so liegen im ersten Falle alle Ecken des gegebenen Dreiecks auf den Seiten des neuen, im andern Falle jedoch liegt nur eine Ecke auf der Seite selbst, die beiden andern auf der Verlängerung. Wir werden später noch genauer auf diesen Unterschied zurückkommen.

Jetzt können wir auch die Frage beantworten, ob um jeden beliebigen Punkt als Mittelpunkt eine Curve construirt werden kann, welche die Seiten des Dreiecks berührt. Nimmt man einen Punkt M beliebig an, so lassen sich unter der Voraussetzung, dass derselbe Mittelpunkt einer berührenden Curve ist, die zugehörigen Berührungspunkte B_1, B_2, B_3 finden. Durch diese kann aber nach den Untersuchungen des § 9., wenn von ganz singulären Fällen abgesehen wird, stets eine und nur eine Curve gelegt werden. Dass dann die in B_1, B_2, B_3 an diese eine Curve gelegten Tangenten auch wirklich mit den Seiten des gegebenen Dreiecks übereinstimmen und nicht ein anderes von diesem verschiedenes Dreieck begrenzen, kann leicht eingesehen werden. Die Lage der Eckpunkte des von den Tangenten gebildeten Dreiecks ist dadurch bestimmt, dass dieselben auf den von M aus gezogenen Halbirungslinien der Sehnen B_1B_2, B_2B_3, B_3B_1 liegen, und dass die Verbindungslinie von je 2 derselben durch einen der Punkte B hindurch gehen muss. Daraus folgt, dass die Lage einer Tangente die Lage der beiden andern bestimmt. So liefert z. B. die Tangente in B_1 sogleich die Punkte Q_2 und Q_3 und dann weiter die Verbindung von Q_2 mit B_3 den Punkt Q_1, und es muss dann von selbst Q_1Q_3 durch B_2 gehen. Die Ecken des gegebenen Dreiecks genügen allen diesen Bedingungen. Wollte man nun annehmen, dass die Tangente in B_1 nicht mit der entsprechenden Seite des Dreiecks übereinstimmte, so würde man an Stelle von Q_3 und Q_1 zwei andere Punkte als Ecken des Dreiecks erhalten, deren Verbindungslinie nicht durch B_2 hindurchgeht. Im Falle B_2 auf Q_3Q_1 selbst liegt, würden nämlich, wie man direct aus der Figur ersehen kann, beide Punkte auf MQ_3 und MQ_1 oder beide auf der Verlängerung dieser Linien zu liegen kommen, im Falle B_2 auf der Verlängerung von Q_3Q_1 liegt, dagegen immer

der eine auf der betreffenden Linie, der andere auf der Verlängerung, in beiden Fällen würde also die Verbindungslinie der beiden Punkte durch B_2 nicht mehr hindurchgehen.

Es existiren demnach ausser den Seiten des gegebenen Dreiecks keine Geraden mehr, welche den Bedingungen der Tangenten entsprechen, woraus folgt, dass diese die Tangenten selbst sein müssen. Man kann also in der Tat um jeden beliebigen Punkt als Mittelpunkt eine Curve zeichnen, welche die Seiten des Dreiecks berührt.

Durch eine ähnliche Ueberlegung lässt sich erkennen, dass je 4 beliebig angenommene Punkte der Ebene angesehen werden können als Mittelpunkte von 4 ähnlichen Curven, welche die Seiten eines Dreiecks berühren. Man erhält die Ecken des betreffenden Dreiecks als Schnittpunkte der Verbindungslinie von je 2 Punkten mit der Verbindungslinie der beiden andern.

Ausser den 4 berührenden ähnlichen Curven eines Dreiecks existirt immer noch eine fünfte, welche durch die Ecken des Dreiecks geht. Der Mittelpunkt O derselben ist leicht zu finden. Man zeichnet für eine der berührenden Curven die Radienvectoren nach den Berührungspunkten und zieht durch die Mitten der Dreiecksseiten Parallelen, welche sich in dem gesuchten Mittelpunkte treffen.

Nicht so leicht gestaltet sich die Lösung der Aufgabe, zum Mittelpunkt O einer umbeschriebenen Curve die 4 Mittelpunkte der ähnlichen berührenden Curven zu finden.

Man verbinde O mit den Mitten der Seiten R_1, R_2, R_3, verlängere diese Linien nach beiden Seiten bis zum Schnitt mit der Curve und ziehe durch die entstandenen 6 Schnittpunkte die den Seiten des Dreiecks parallelen Tangenten. Dieselben schliessen dann im Ganzen 4 verschiedene ähnliche Dreiecke ein, welche von der gegebenen Curve berührt werden. Verbindet man nun die Ecken eines jeden dieser Dreiecke mi dem Mittelpunkte O und zieht durch die Ecken des gegebenen Dreiecks hierzu Parallelen, so treffen sich diese in den Mittelpunkten der berührenden Curven.

Hieraus geht hervor, dass sich nicht zu jeder beliebigen umbeschriebenen Curve ähnliche berührende Curven zeichnen lassen. Solche sind nur dann möglich, wenn die Verbindungslinien MR_1, MR_2, MR_3 oder deren Verlängerung die umbeschriebene Curve auch treffen und den Seiten des Dreiecks parallele Tangenten gezogen werden können. Diese Bedingung ist immer erfüllt im Falle der Ellipse, wenn also der Punkt O innerhalb des von R_1, R_2, R_3 gebildeten Dreiecks oder innerhalb der Scheitelwinkel dieses Dreiecks

liegt, im Falle der Hyperbel jedoch nur, wenn alle 3 Ecken auf einem Zweige liegen, wenn also O innerhalb der Scheitelwinkel zum gegebenen Dreieck angenommen wird.

Ist endlich die umbeschriebene Curve eine Parabel, so lässt sich nur eine einzige berührende Curve gleicher Axenrichtung zeichnen. Die Construction der Berührungspunkte kann aus den allgemeinen Vorschriften dieses Paragraphen abgeleitet werden, wenn man sich den Mittelpunkt O unendlich weit entfernt denkt. Man ziehe durch die Ecken des Dreiecks Parallelen zur Axe, welche die Gegenseiten oder deren Verlängerung in T_1, T_2, T_3 treffen. Dann liegen die Berührungspunkte in derselben Entfernung von den Mitten der Seiten wie diese Schnittpunkte, nur nach entgegengesetzter Richtung hin.

§ 14.

Die Mittelpunkte der 4 berührenden ähnlichen Curven als gemeinsame Schnittpunkte dreier Hyperbeln.

Es giebt noch einen zweiten Weg, vom Mittelpunkt O einer umbeschriebenen Curve zu den Mittelpunkten der ähnlichen berührenden Curven zu gelangen. Diese können nämlich auch als gemeinsame Schnittpunkte dreier Hyperbeln bestimmt werden. Soll die berührende Curve der umbeschriebenen ähnlich sein, so muss für jede Seite der Radiusvector zum Berührungspunkte parallel sein der Verbindungslinie des Mittelpunktes dieser Seite mit dem Mittelpunkt der umbeschriebenen Curve. Suchen wir den geometrischen Ort für die Mittelpunkte aller berührenden Curven, bei welchen diese Bedingung nur für eine der Seiten erfüllt ist. Wir wählen als solche Q_2Q_3, nehmen darauf den Berührungspunkt B_1 beliebig an, suchen auf der andern Seite des Mittelpunktes R_1 einen Punkt T_1, so dass

$$T_1R_1 = R_1B_1$$

wird, zeichnen Q_1T_1 und ziehen durch B_1 zu OR_1, durch R_1 zu Q_1T_1 Parallelen, welche sich im Mittelpunkte M der berührenden Curve treffen. Lassen wir nun B_1 auf Q_2Q_3 und der Verlängerung dieser Seite wandern, so bewegt sich der Punkt M auf einer Curve, welche gleich bleibt für alle Punkte 0, welche auf derselben durch R_1 gehenden Geraden liegen. Rückt B_1 an R_1 heran, so nähert sich M dem Mittelpunkte R_1, die Curve geht also durch R_1 hindurch. Ferner geht dieselbe durch 2 Punkte H und J, welche man bekommt, wenn man durch Q_2 und Q_3 zu OR_1 Parallelen zieht und dieselben bis zum Schnitt mit den durch R_1, R_3 resp. R_1, R_2 bestimmten Halbirungslinien verlängert.

Digitized by Google

Auch die unendlich fernen Punkte der Curve lassen sich leicht angeben. Wir ziehen Q_1K parall. OR_1 und suchen auf der andern Seite den Punkt L, für welchen

$$LR_1 = R_1K$$

ist. Dann ist L der Berührungspunkt und die berührende Curve eine Parabel, deren Mittelpunkt als Schnittpunkt von OR_1 und der durch L hierzu parallelen Geraden im Unendlichen liegt. Bewegt sich der Berührungspunkt selbst nach der einen oder andern Richtung in's Unendliche, so rückt T_1 in entgegengesetzter Richtung fort, und der Schnittpunkt M nähert sich immer mehr dem Schnittpunkte der durch R_1 gehenden, zu Q_1T_1 parallelen Geraden mit der durch Q_1 zu Q_2Q_3 gezogenen Parallelen.

Unsere Curve wird demnach eine Hyperbel sein, deren Asymptoten die durch L zu OR_1 und die durch Q_1 zu Q_2Q_3 parallel gelegten Geraden sind. Zeichnen wir wieder das grosse Dreieck, dessen Seiten durch die Ecken des gegebenen parallel den gegenüber liegenden Seiten laufen, so ist die eine Seite dieses Dreiecks die eine, die zugehörige conjugirte Ecktransversale die andere Asymptote des geometrischen Orts.

Analytisch gestaltet sich die Sache für die beigegebene Figur folgendermassen:

Die Verlängerung von MB_1 treffe die durch Q_1 gehende Asymptote im Punkte V, die durch M zu Q_2Q_3 gezogene Parallele treffe die andere Asymptote in W.

Dann ist

$$MV = B_1V - MB_1 = Q_1K - MB_1$$

ferner

$$MW = LB_1 = LR_1 + R_1B_1$$

Nun verhält sich aber:

$$MB_1 : R_1B_1 = Q_1K : T_1K = Q_1K : LR_1 + R_1B_1$$

Es wird daher

$$MV = Q_1K - \frac{R_1B_1 \cdot Q_1K}{LR_1 + R_1B_1} = \frac{Q_1K \cdot LR_1}{LR_1 + R_1B_1} = \frac{Q_1K \cdot LR_1}{MW}$$

und somit

$$MV \cdot MW = Q_1K \cdot LR_1 \quad \text{d. h. constant.}$$

Es ist dies aber wirklich die in schiefwinkligen Coordinaten ausgedrückte, auf die angegebenen Asymptoten als Axen bezügliche Gleichung einer durch R_1 gehenden Hyperbel.

Digitized by Google

Solcher Hyperbeln lassen sich noch zwei weitere, den Seiten Q_1Q_2 und Q_1Q_3 entsprechende zeichnen. Da nun die Mittelpunkte aller berührenden ähnlichen Curven gleichzeitig auf allen drei Hyperbeln liegen müssen, erhalten wir den Satz:

Construirt man dasjenige grosse Dreieck, dessen Seiten durch die Ecken des gegebenen parallel den gegenüberliegenden Seiten laufen und zeichnet zu jeder Seite dieses Dreiecks und der zugehörigen conjugirten Ecktransversalen als Asymptoten diejenige Hyperbel, welche durch die Mitte der parallelen Seite des gegebenen Dreiecks geht, so schneiden sich diese drei Hyperbeln in den 4 Mittelpunkten der berührenden ähnlichen Curven.

Uebrigens sind die Mittelpunkte dieser drei Hyperbeln als Fusspunkte der conjugirten Ecktransversalen des grossen Dreiecks auf der umbeschriebenen Curve selbst gelegen.

Betrachten wir nun die Gestalt und Lage der verschiedenen zur Seite Q_2Q_3 gehörigen Hyperbeln. Sie haben sämtlich eine Asymptote gemeinsam, nämlich die durch Q_1 gehende Seite G_2G_3 des grossen Dreiecks; ferner gehen sie sämtlich durch denselben Punkt R_1. Da die andere Asymptote die zugehörige Ecktransversale G_1A des grossen Dreiecks ist und die Verbindungslinie von G_1 mit Q_1 durch R_1 hindurchgeht und von R_1 halbirt wird, so müssen sämtliche Hyperbeln die Gerade Q_1G_1 im Punkte R_1 berühren. Liegt O auf Q_1R_1 oder auf der Verlängerung hiervon, so fällt der Mittelpunkt A auf Q_1 und die Hyperbel geht über in die beiden Geraden G_2G_3 und QG_1. Durchschneidet OR_1 oder die Verlängerung die Seite Q_1Q_2 des gegebenen Dreiecks, so liegt die Hyperbel in dem von G_1AG_2 und dem zugehörigen Scheitelwinkel gebildeten Raume; durchschneidet sie die Seite Q_1Q_3, so liegt die Hyperbel in dem von G_1AG_3 und dem zugehörigen Scheitelwinkel gebildeten Raume.

Wir wollen für den einen der beiden Fälle die einzelnen Hyperbeln noch genauer verfolgen und annehmen, dass der Schnittpunkt von OR_1 mit Q_1Q_2 sich allmählich von Q_1 nach Q_2 hin bewege. Wir bekommen dann eine Schar von Curven, deren einer Zweig bei R_1 in das Dreieck eintritt und dasselbe zwischen Q_1 und Q_3 wieder verlässt. Dieser Austrittspunkt muss, da J anfänglich ausserhalb des Dreiecks auf der Verlängerung von R_1R_2 liegt, von Q_1 ausgehend sich allmählich abwärts bewegen. Er erreicht den Mittelpunkt R_2, wenn OR_1 parall. Q_1Q_3 ist. In diesem Falle liegt A auf G_3, J auf R_2, die Asymptoten sind G_2G_3 und G_1G_3 selbst und die Hyperbel halbirt beide Seiten des Dreiecks Q_2Q_3 und Q_1Q_3. Dreht sich OR_1 noch weiter, so fällt J auf R_1R_2 selbst, der Aus-

Digitized by Google

trittspunkt der Curve rückt über R_2 hinweg auf Q_3 zu und der Winkel zwischen den Asymptoten wird immer spitzer. Schliesslich entfernt sich A in's Unendliche, die Asymptoten werden parallel und die Curve nähert sich der Geraden $R_1 Q_3$ und deren Verlängerung.

Ganz ähnlich ist der Verlauf, wenn OR_1 die Seite $Q_1 Q_3$ durchschneidet.

Wir unterbrechen an dieser Stelle unsere Betrachtung auf einen Augenblick, um eine Aufgabe einzuschalten, deren Lösung sich unmittelbar aus der Figur des Paragraphen ergiebt: Gegeben sei eine Gerade L, auf ihr ein Punkt R_1, ferner eine zweite Gerade L' und ausserhalb ein Punkt J. Man soll diejenige Hyperbel bestimmen, welche L in R_1 berührt, L' als eine Asymptote hat und durch J geht.

Lösung: Man verlängere L bis zum Schnitt mit L' in Q_1 und verlängere $Q_1 R_1$ um sich selbst bis G_1. Dann verbinde man J mit R_1, ziehe durch Q_1 die Parallele, welche die durch R_1 zu L' gezogene Parallele in Q_2 schneidet, und verlängere $Q_2 R_1$ um sich selbst bis Q_3. Endlich verbinde man Q_3 mit J und ziehe durch G_1 die Parallele, welche L' in A schneidet. Dann ist A der Mittelpunkt der Curve und $G_1 A$ die andere Asymptote. Ferner geht die Curve noch durch einen weiteren Punkt H, den man bekommt, wenn man R_1 mit der Mitte von $Q_1 Q_2$ verbindet und diese Linie verlängert, bis sie die durch Q_2 zu $G_1 A$ parallel gezogene Gerade durchschneidet.

§ 15.

Die Lage der Mittelpunkte.

Wir wissen bereits, dass nicht zu jeder beliebigen umbeschriebenen Curve ähnliche berührende Curven gezeichnet werden können, und haben auch schon angegeben, wo der Punkt O liegen muss, damit solche möglich sind. Nun lassen sich aber die 3 Hyperbeln, deren Schnittpunkte die Mittelpunkte der berührenden Curven sind, in jedem Falle construiren, woraus mit Notwendigkeit zu schliessen ist, dass dieselben sich überhaupt nicht schneiden, wenn O in einem andern als einem der früher angegebenen Räume liegt. Für die Untersuchung genügt es nur zwei der Hyperbeln zu betrachten. Da ferner einer der Mittelpunkte stets innerhalb des Dreiecks liegen muss, braucht man diese beiden, um zu beurteilen, ob Schnittpunkte vorhanden sind oder nicht, auch nur innerhalb des Dreiecks zu verfolgen. Vorher wollen wir jedoch noch einige specielle Fälle erledigen.

Digitized by Google

Ist O der Schwerpunkt, so geht jede Hyperbel über in die betreffende Seite des grossen Dreiecks und die zugehörige Mitteltransversale. Die Mittelpunkte sind demnach die Ecken des grossen Dreiecks und der Schwerpunkt des gegebenen selbst. Da die Curve in diesem Falle stets eine Ellipse ist, kann man das Resultat auch in der folgenden Weise aussprechen: Um den Schwerpunkt eines Dreiecks lassen sich stets 2 concentrische und ähnliche Ellipsen construiren, von denen die eine durch die Ecken des Dreiecks hindurch geht, die andere die Seiten in der Mitte berührt. Ausserdem giebt es noch 3 anbeschriebene ähnliche Ellipsen, welche ebenfalls die Seiten im Mittelpunkt berühren und deren Mittelpunkte die Schnittpunkte der durch die Ecken des Dreiecks zu den Gegenseiten gezogenen Parallelen sind.

Zweitens nehmen wir an, dass O sich auf einer die Seiten halbirenden Geraden bewege. Z. B. auf R_2R_3 und dessen Verlängerung. Dann ist die zu Q_2Q_3 gehörige erste Curve irgend eine G_1Q_1 in R_1 berührende Hyperbel, welche G_2G_3 als eine Asymptote hat. Die zweite auf Q_1Q_3 bezügliche Hyperbel geht durch R_2 und R_1, ihre Asymptoten sind G_2G_3 und G_3G_1. Die dritte zu Q_1Q_2 gehörige geht durch R_2 und R_1, ihre Asymptoten sind G_2G_3 und G_2G_1. Es gehen somit alle 3 Hyperbeln durch denselben Punkt R_1 und berühren die Gerade G_1Q_1; ferner haben sie sämtlich die eine Asymptote G_2G_3 gemeinsam, treffen sich also längs dieser Geraden nach beiden Seiten erst im Unendlichen. In diesem Grenzfalle sind demnach die beiden mit Q_1 auf einer Geraden liegenden Mittelpunkte, von denen der eine beständig innerhalb, der andere ausserhalb des Dreiecks fällt, auf einander zugerückt und mit der Seite zusammengefallen; die beiden andern auf der durch Q_1 zur ersten conjugirten Geraden haben sich nach beiden Seiten in's Unendliche entfernt. Dieser Fall tritt immer ein, wenn O eine die Seiten halbirende Gerade passirt.

Denken wir uns, dass der Punkt O sich innerhalb des Dreiecks in der Richtung nach Q_1 hin der Linie R_2R_3 nähert, so geht die umbeschriebene Ellipse allmählich in ein Paar paralleler Geraden über, nämlich in Q_2Q_3 und die durch Q_1 hierzu gezogene Parallele. Die einbeschriebene Curve wird sich dabei immer mehr der Seite Q_2Q_3 nähern und schliesslich mit ihr, ihr Mittelpunkt also mit R_1 zusammenfallen. Dasselbe geschieht mit der zweiten Q_2Q_3 anbeschriebenen Ellipse; auch sie kommt an Q_2Q_3 heran, ihr Mittelpunkt rückt auf R_1 zu, um diesen Punkt an der Grenze wirklich zu erreichen.

Anders steht es mit den übrigen berührenden Curven. Sie

gehen über in die beiden Geraden, welche sich von Q_1 aus über G_2 resp. G_3 in's Unendliche erstrecken. Die Berührungspunkte mit den Seiten Q_1Q_3 und Q_1Q_2 sind in Q_1 zusammengefallen, der Berührungspunkt mit der dritten Seite Q_2Q_3 ist in unendliche Ferne gerückt.

Wenn O sich auf R_2R_3 bewegend einem dieser beiden Punkte selbst nahe kommt, so wird die erste Hyperbel sich einer der beiden andern nähern und schliesslich mit ihr zusammenfallen. In diesem Falle giebt es unendlich viele umbeschriebene, also auch unendlich viele berührende Curven; der geometrische Ort ihrer Mittelpunkte ist eben diese durch die Mitten der beiden andern Dreiecksseiten hindurchgehende Hyperbel.

Noch ein zweiter Grenzfall muss genauer erörtert werden, der Fall nämlich, dass O die Verlängerung einer Seite des Dreiecks passirt. Nehmen wir an, es bewege sich O in dem Scheitelwinke von $Q_2Q_1Q_3$ auf die Verlängerung der Seite Q_2Q_1 zu.

Der erste Zweig der ersten Hyperbel, welcher bei R_1 in das Dreieck eintritt, verlässt dasselbe dann zwischen Q_1 und R_3, ebenfalls verlässt der erste Zweig der zweiten Hyperbel, welcher bei R_2 das Dreieck betritt, dasselbe zwischen Q_1 und R_3, doch liegt dieser Austrittspunkt weiter von Q_1 entfernt als der vorige. Die beiden Zweige müssen sich daher vor dem Verlassen des Dreiecks schneiden. Da sich aber bei weiterem Fortschreiten die erste Curve der Asymptote G_2G_3, die zweite der Asymptote G_1G_3 nähert, so müssen sie sich nach dem Austritt aus dem Dreiecke noch einmal treffen. Ausserdem muss der zweite Zweig der ersten Hyperbel denselben ersten der zweiten noch in zwei Punkten treffen, die ausserhalb des Dreiecks gelegen sind.

Der erste Zweig der dritten Hyperbel stellt nämlich in diesem Falle eine Curve dar, die von R_3 ausgehend sich sehr bald auf beiden Seiten von R_3Q_1 in der Richtung auf Q_1 zu umwendet und allmählich in die von R_3 über Q_1 in's Unendliche sich erstreckende, doppelt bedeckte Gerade übergeht. Dieser Zweig geht erstens durch die beiden angegebenen Punkte zwischen R_3 und Q_1, trifft ausserdem aber den zweiten Zweig der ersten und den ersten der zweiten Hyperbel in zwei ausserhalb des Dreiecks liegenden Punkten, welche sich auf verschiedenen Seiten der Verlängerung von R_3Q_1 befinden. Es liegen also bei der ersten Hyperbel auf jedem Zweige zwei Schnittpunkte, bei der zweiten und dritten jedoch sämtliche Schnittpunkte auf dem einen Zweige allein.

Gehen wir nun zur Grenze über, so verwandelt sich der erste Zweig der dritten Hyperbel in die doppelt bedeckte Gerade, die sich

Digitized by Google

von R_3 über Q_1 in's Unendliche erstreckt, die beiden Schnittpunkte zwischen R_3 und Q_1 fallen in einen auf R_3Q_1 selbst, die beiden ausserhalb befindlichen in einen auf der Verlängerung von R_3Q_1 gelegenen zusammen. Es berührt dann der erste Zweig der zweiten Hyperbel beide Zweige der ersten in zwei Punkten, die auf R_3Q_1 und dessen Verlängerung liegen.

Die umbeschriebene Curve geht in diesem Falle über in die beiden Geraden OQ_2 und OQ_3. Die berührenden Curven, von welchen nur zwei existiren, sind Hyperbeln, welche Q_1Q_2 als eine Asymptote haben und deren andere Asympte OQ_3 parallel läuft.

Nähern wir uns von der entgegengesetzten Seite her der Verlängerung von Q_2Q_1, so stellen die erste und zweite Hyperbel wieder Curven vor, welche bei R_1 und R_2 das Dreieck betreten und zwischen Q_1 und R_3 verlassen. Sie liegen aber jetzt ganz auseinander und nähern sich erst, wenn man der Grenze nahe kommt, um sich schliesslich wieder in denselben beiden Punkten zu berühren. Anders steht es mit der dritten Curve. Dieselbe biegt jetzt von R_3 aus auf beiden Seiten nach Q_2 hin aus und nähert sich allmählich der von R_3 über Q_3 bis in's Unendliche sich erstreckenden Geraden. Man gelangt also hier nicht zur selben Grenze wie im vorigen Falle.

Es hält nun nicht schwer zu entscheiden, in welchen Teilen der Ebene O liegen muss, damit Schnittpunkte der Hyperbeln vorhanden sind.

Wir nehmen an, dass O sich in dem Raume befinde, welcher von dem Winkel $Q_1R_1R_3$ und seinem Scheitelwinkel begrenzt wird. Dann verlassen die sämtlichen ersten Curven, die bei R_1 das Dreieck betreten, dasselbe zwischen Q_1 und R_2. Es wird demnach die zweite Curve, welche bei R_2 eintritt, die erste innerhalb des Dreiecks schneiden, wenn sie sich so wendet, dass ihr Austrittspunkt auf Q_1Q_2 oder Q_2R_1 zu liegen kommt. Dies geschieht, wenn der Punkt O innerhalb des Winkels $R_3R_2Q_3$ oder des zugehörigen Scheitelwinkels sich befindet. Durch diese beiden Bedingungen wird aber die Lage des Punktes O auf 3 Flächenstücke beschränkt, nämlich auf denjenigen Teil des Dreiecks $R_1R_2R_3$, welcher innerhalb des Winkels $Q_1R_1R_3$ liegt, auf den Scheitelwinkel von $R_1Q_1Q_3$ und auf den Scheitelwinkel von $Q_1R_1R_3$.

Nehmen wir zweitens an, der Punkt O liege in dem Raume, welcher von $Q_1R_1R_2$ und seinem Scheitelwinkel begrenzt wird, so verlässt die erste Curve das Dreieck zwischen Q_1 und R_3 und wird deshalb von der dritten Curve, welche bei R_3 eintritt, nur dann

Digitized by Google

geschnitten, wenn der Austrittspunkt auf Q_1Q_3 oder Q_3R_1 liegt. Wir erhalten damit drei weitere Räume, in denen O liegen darf: den noch übrigen Teil des Dreiecks $R_1R_2R_3$, welcher innerhalb des Winkels $Q_1R_1R_2$ liegt, der Scheitelwinkel von $R_1Q_1Q_2$ und den Scheitelwinkel von $Q_1R_1R_2$.

Fassen wir beide Resultate zusammen, so darf also O liegen in dem Dreieck $R_1R_2R_3$ und innerhalb der Scheitelwinkel zu $Q_3Q_1Q_3$ und $R_2R_1R_3$.

Es ist klar, dass, wenn man in derselben Weise von der zweiten Curve ausgeht und die Lage des Punktes O nach einander auf die Winkel $Q_2R_2R_1$ und $Q_2R_2R_3$ und deren Scheitelwinkel beschränkt, man zu ähnlichen Resultaten kommen muss. Dasselbe wird endlich auch der Fall sein, wenn man von der dritten Curve ausgeht.

Wir gelangen somit wirklich zu dem schon anderweitig als richtig erkannten Resultat, dass die Hyperbeln sich nur dann treffen und nur dann berührende Curven vorhanden sind, wenn der Mittelpunkt O der umbeschriebenen Curve im Innern des Dreiecks $R_1R_2R_3$, innerhalb der Scheitelwinkel dieses Dreiecks und innerhalb der Scheitelwinkel des gegebenen Dreiecks liegt.

Wir wollen nun die Lage der 4 Schnittpunkte zu einander und ihre Verteilung auf die einzelnen Zweige der Hyperbeln zu erkennen suchen.

Wir gehen dabei wieder von der Annahme aus, dass O innerhalb des Winkels $Q_1R_1R_3$ oder des zugehörigen Scheitelwinkels sich befinde. Die erste Hyperbel hat stets G_2G_3 als eine Asymptote, berührt Q_1G_1 in R_1 und schneidet Q_1Q_3 zwischen Q_1 und R_2. Die andere Asymptote wandert von G_1Q_1 bis G_1G_3. Die zweite Hyperbel berührt Q_2G_2 in R_2, hat G_1G_3 als eine Asymptote, während die andere mit G_2G_3 beginnend sich um den Punkt G_2 dreht, die Richtungen G_2Q_2, G_2G_1 passirt und schliesslich die Richtung der durch G_2 zu Q_1Q_3 gezogenen Parallelen annimmt. Der Mittelpunkt der ersten Hyperbel liegt zwischen Q_1 und G_3, der andere rückt von G_3 aus über Q_2 und G_1 allmählich in's Unendliche.

Zunächst liegt O in dem Winkel. Dann wendet sich die zweite Curve von R_2 aus abwärts, durchschneidet die erste Curve innerhalb des Dreiecks und verlässt das Dreieck zwischen Q_2 und R_1, um sich bei weiterem Fortschreiten der Asymptote G_3G_1 zu nähern. Die erste Curve nähert sich aber der Asymptote G_1A, woraus folgt, dass beide Curven sich ausserhalb des Dreiecks noch einmal treffen müssen. Aehnlich liegt die Sache auf der andern Seite. Die erste

Digitized by Google

Curve verlässt das Dreieck zwischen Q_1 und R_2 und nähert sich der Asymptote, deren Richtung zwischen G_2G_3 und G_2Q_2 gelegen ist.

Es müssen sich darum auch hier die beiden Curven noch einmal schneiden. Der vierte und letzte Schnittpunkt muss dann von selbst auf der Seite von Q_1Q_2 liegen, welche Q_3 entgegengesetzt ist.

Die vier Schnittpunkte haben also die erste der beiden in § 13. angegebenen Lagen; die äusseren Punkte lassen sich zu einem Dreieck verbinden, auf dessen Seiten selbst die Ecken des gegebenen Dreiecks liegen. Ferner erkennen wir, dass der erste Zweig der ersten Hyperbel sich mit dem ersten Zweig der zweiten in 3 Punkten schneidet, während die beiden andern Zweige nur einen Punkt gemeinsam haben.

Es erübrigt noch die Lage der Punkte auf der dritten, durch R_3 gehenden Hyperbel festzustellen. Diese hat G_1G_2 als eine Asymptote, die andere liegt zwischen G_3G_1 und G_3G_2 Der erste Zweig derselben muss also durch den jenseits Q_1Q_2 liegenden vierten Punkt, durch den im Innern des Dreiecks gelegenen Punkt und durch den einen der beiden andern liegenden Punkte gehen, und zwar durch den auf der Seite von R_1, wenn die veränderliche Asymptote der Curve zwischen G_3G_2 und G_3Q_3, dagegen durch den bei R_2 befindlichen, wenn die Asymptote zwischen G_3Q_2 und G_3G_1 liegt. Der letzte Punkt liegt auf dem andern Zweige.

Es liegen demnach bei allen 3 Hyperbeln 3 Punkte auf dem ersten und einer auf dem zweiten Zweige. 2 Hyperbeln schneiden sich so, dass ihre ersten Zweige 3 Punkte gemeinsam haben, die beiden andern sich nur in einem Punkte treffen. Die dritte Hyperbel aber schneidet mit ihrem ersten Zweige die beiden andern ersten Zweige nur in 2 Punkten; ausserdem geht derselbe Zweig durch den vierten Punkt, welchen die andern Zweige der ersten beiden Curven gemeinsam haben, während der andere Zweig durch den dritten Punkt hindurchgeht.

Dieses ist die Lage der Punkte für den Fall, dass O sich in demjenigen viereckigen Teile des Dreiecks $R_1R_2R_3$ befindet, welcher durch Q_1R_1 und Q_2R_2 von demselben abgeschnitten wird. Es bedarf jedoch keiner weiteren Begründung, dass man zu ganz denselben Resultaten gelangen muss, wenn man von einer andern Curve den Ausgang nimmt und die Lage des Punktes O auf die von Q_2R_2 und Q_3R_3 oder die von Q_3R_3 und Q_1R_1 begrenzten Teile beschränkt. Unser Resultat gilt daher allgemein für den Fall, dass O innerhalb des Dreiecks $R_1R_2R_3$ liegt.

Digitized by Google

Deswegen brauchen wir auch, wenn wir nunmehr die bewegliche Asymptote der zweiten Curve weiter drehen, das Intervall von G_2O_2 bis G_2G_1 oder die Lage des Punktes O innerhalb des Winkelraumes $Q_1R_2R_1$ nicht weiter zu berücksichtigen und gehen sogleich zu der Annahme über, dass sich die Asymptote über G_2G_1 hinaus bis zu der durch G_2 zu Q_1Q_3 parallelen Richtung drehe, oder dass O innerhalb des Winkels $R_1R_2Q_3$ und des zugehörigen Scheitelwinkels sich befinde.

Dann muss die zweite Curve, welche bei R_2 in das Dreieck eintritt, die erste, da diese G_2G_3 als Asymptote hat, schon vor dem Eintreten in das Dreieck schneiden; sie trifft noch einmal mit ihr im Innern des Dreiecks zusammen, verlässt darauf das Dreieck zwischen Q_1 und R_3 und nähert sich immer mehr der Geraden G_1G_3. Der zweite Zweig der ersten Curve nähert sich aber G_2G_3, es muss deshalb der erste Zweig der zweiten Curve nach dem Verlassen des Dreiecks den zweiten Zweig der ersten mindestens noch in einem Punkte treffen. Nun berührt der zweite Zweig der zweiten Curve die durch G_2 gehende Asymptote, der erste Zweig der ersten Curve die Verlängerung von G_1A. Es müssen sich deswegen diese beiden Zweige in einem vierten Schnittpunkte treffen, so lange die Verlängerung von G_1A die Asymptote durch G_2 auf dieser Seite durchschneidet. Dies ist aber der Fall, wenn O innerhalb des Scheitelwinkels von $Q_1R_1R_3$ liegt.

Dann haben also die 4 Schnittpunkte wieder dieselbe Lage zu einander wie im vorigen Falle, und da dann, wie man sich leicht überzeugt, die dritte Curve mit ihrem ersten Zweige durch die erstgenannten 3 Punkte, mit dem zweiten durch den vierten und letzten Punkt hindurchgeht, so gilt auch für die Verteilung der Punkte auf die einzelnen Hyperbeln dasselbe.

Es bedarf keiner weiteren Begründung mehr, dass dieses Resultat nicht nur für Punkte innerhalb des Scheitelwinkels von $Q_1R_1R_3$ sondern überhaupt für alle Punkte O gelten muss, welche innerhalb der Scheitelwinkel des Dreiecks $R_1R_2R_3$ liegen.

Fassen wir beide Fälle zusammen, so lautet unser Ergebniss: Liegt O in dem Dreieck $R_1R_2R_3$ oder innerhalb eines Scheitelwinkels zu diesem Dreieck, d. h. sind die berührenden Curven Ellipsen, so bilden die äussern Mittelpunkte immer ein Dreieck, auf dessen Seiten die Ecken des gegebenen Dreiecks liegen. Der erste Zweig einer jeden Hyperbel enthält 3 Punkte, der zweite nur einen. Zwei der Hyperbel schneiden sich mit ihrem ersten Zweige in 3 Punkten;

Digitized by Google

der erste Zweig dieser dritten geht aber nur durch zwei dieser Punkte.

Ist aber die Asymptote durch G_2 parallel G_1A_1, liegt 0 im Unendlichen und ist die umbeschriebene Curve eine Parabel, so liegt auch der vierte Mittelpunkt im Unendlichen. Diesem entspricht die einzige in diesem Falle mögliche r berührende Parabel.

Die andern Mittelpunkte liegen im Endlichen, und zwar fallen dieselben mit den Mitten der durch die Ecken zu AG_1 parallel gezogenen Transversalen des Dreiecks zusammen, und diese Transversalen selbst stellen die entsprechenden berührenden Curven dar.

Dreht sich die Asymptote durch G_2 noch weiter, so schneidet der erste Zweig der ersten Curve den zweiten Zweig der zweiten überhaupt nicht, es geht der erste Zweig der zweiten Curve durch sämtliche 4 Mittelpunkte hindurch, während jeder Zweig der ersten Curve zwei derselben enthält. Dann liegen auch sämtliche Punkte auf dem ersten Zweige der dritten Curve. Dieser Fall tritt ein, wenn 0 sich innerhalb des Scheitelwinkels von $R_1Q_1Q_2$ befindet, doch gilt dieses Resultat mit geringer Modification auch für alle Punkte innerhalb des Scheitelwinkels von $R_1Q_1Q_2$ und überhaupt für jeden Punkt im Innern eines Scheitelwinkels zum gegebenen Dreieck.

Wenn also 0 innerhalb eines Scheitelwinkels zum gegebenen Dreieck liegt, d. h. wenn die berührende Curve eine Hyperbel ist, so haben die Mittelpunkte die zweite der beschriebenen Lagen, es lassen sich die äusseren Punkte derart verbinden, dass die eine Ecke des Dreiecks auf einer Verbindungslinie selbst, die beiden andern auf der Verlängerung liegen. In diesem Falle schneiden die ersten Zweige zweier Hyperbeln sich gegenseitig in 4 Punkten, die beiden Zweige der dritten Hyperbel dagegen in 2 Punkten.

§ 16.

Beweis des Satzes: Sämtliche ähnliche berührende Curven eines Dreiecks werden von der ähnlichen Curve der 9 Punkte berührt.

Aus der Planimetrie ist bekannt, dass der durch die Mitten der Seiten, durch die Fusspunkte der Höhen und durch die Mitten der obenen Höhenabschnitte gehende sogenannte Feuerbach'sche Kreis sowol den einbeschriebenen wie alle 3 anbeschriebenen Kreise des Dreiecks berührt. Nach unserm Princip muss deswegen auch die Ellipse durch die Mitten der Seiten, durch die Fusspunkte der con-

Digitized by Google

jugirten Ecktransversalen und durch die Mitten der oberen Abschnitte derselben die sämtlichen 4 berührenden ähnlichen Ellipsen des Dreiecks berühren.

Wir wollen beweisen, dass auch dieser Satz allgemeinere Gültigkeit besitzt und die Curve der 9 Punkte stets die sämtlichen berührenden ähnlichen Curven berührt.

Die berührende Curve sei

$$\xi^2 + \varepsilon\eta^2 = 1$$

ferner bezeichnen wir wie in § 11. die Berührungspunkte mit B_1, B_2, B_3, die Schnittpunkte der Tangenten, d. h. die Ecken des Dreiecks mit Q_3, Q_2, Q_3 und die Coordinaten derselben mit (u_1, v_1), (u_2, v_2), (u_3, v_3).

Man bekommt nun den Mittelpunkt O der umbeschriebenen Curve, indem man M mit B_1, B_2, B_3 verbindet und durch die Mitten der Seiten hierzu Parallelen zieht, welche sich in O treffen. Sind die Coordinaten desselben a und b, so müssen die Gleichungen gelten:

$$\begin{aligned} b - \frac{v_2 + v_3}{2} &= \left(a - \frac{u_2 + u_3}{2}\right) \frac{\eta_1}{\xi_1} \\ b - \frac{v_3 + v_1}{2} &= \left(a - \frac{u_3 + u_1}{2}\right) \frac{\eta_2}{\xi_2} \\ b - \frac{v_1 + v_2}{2} &= \left(a - \frac{u_1 + u_2}{2}\right) \frac{\eta_3}{\xi_3} \end{aligned} \tag{1}$$

und die Gleichung der umbeschriebenen Curve hat die Gestalt:

$$(\xi - a)^2 + \varepsilon(\eta - b)^2 = r^2 \tag{2}$$

Man erhält ferner den Mittelpunkt N der Curve der 9 Punkte, wenn man O mit dem Schwerpunkt S verbindet und diese Linie um die Hälfte verlängert. Die Coordinaten von N werden danach

$$\frac{u_1 + u_2 + u_3 - a}{2} \quad \text{und} \quad \frac{v_1 + v_2 + v_3 - b}{2}$$

und die Curve der 9 Punkte hat zur Gleichung

$$\left(\xi - \frac{u_1 + u_2 + u_3 - a}{2}\right)^2 + \varepsilon\left(\eta - \frac{v_1 + v_2 + v_3 - b}{2}\right)^2 = \frac{r^2}{4} \tag{3}$$

Es soll gezeigt werden, dass diese Curve die gegebene berührt.

Wenn sich 2 ähnliche Curven berühren, muss der Berührungs-

Digitized by Google

punkt auf der gemeinsamen Centrale liegen. Wir verbinden deswegen M und N und berechnen für jede der beiden Curven die Länge des zugehörigen Radiusvectors. Hat der Schnittpunkt B der Centrale mit der ersten gegebenen Curve die Coordinaten (ξ_4, η_4), so ist der Radiusvector für die erste Curve gleich $\sqrt{\xi_4^2+\eta_4^2}$. Nun ist aber

$$\xi_4^2+\varepsilon\eta_4^2 = 1 \quad \text{und} \quad \xi_4 = \frac{u_1+u_2+u_3-a}{v_1+v_2+v_3-b}\cdot\eta_4$$

Setzen wir diesen Wert ein, so kommt

$$\eta_4^2 = \frac{(v_1+v_2+v_3-b)^2}{(u_1+u_2+u_3-a)^2+\varepsilon(v_1+v_2+v_3-b)^2}$$

und es wird

$$\xi_4^2+\eta_4^2 = 1+(1-\varepsilon)\eta_4^2$$
$$= \frac{(u_1+u_2+u_3-a)^2+(v_1+v_2+v_3-b)^2}{(u_1+u_2+u_3-a)^2+\varepsilon(v_1+v_2+v_3-b)^2}$$

Da die zweite Curve der ersten ähnlich ist, so muss der entsprechende Radiusvector derselben gleich $\frac{r}{2}\sqrt{\xi_4^2+\eta_4^2}$ sein.

Sollen sich nun beide Curven berühren, so muss die Summe oder die Differenz der beiden Radienvectoren gleich der Centrale MN sein, je nachdem der Berührungspunkt auf MN oder auf der Verlängerung von MN liegt. Es muss daher

$$\left(1\pm\frac{r}{2}\right)^2(\xi_4^2+\eta_4^2) = \left(\frac{u_1+u_2+u_3-a}{2}\right)^2+\left(\frac{v_1+v_2+v_3-b}{2}\right)^2$$

oder mit Einsetzung des obigen Wertes

$$(2\pm r)^2 = (u_1+u_2+u_3-a)^2+\varepsilon(v_1+v_1+v_3-b)^2 \quad \text{sein.} \qquad (4)$$

Es kommt darauf an, den Nachweis der Richtigkeit dieser Gleichung zu führen. Dieses kann geschehen, indem wir zeigen, dass der Wert von r, der sich aus dieser Gleichung ergiebt, identisch ist mit demjenigen, der sich allein mit Hülfe der Bedingungsgleichungen für ξ, η, a, b, berechnen lässt. Zunächst gehen wir zu dieser zweiten Berechnung von r über, Aus (1) kommt:

$$-\frac{a(12)}{\xi_1\xi_2} = \frac{v_1-v_2}{2}+\frac{u_2+u_3}{2}\frac{\eta_1}{\xi_1}-\frac{u_3+u_1}{2}\frac{\eta_2}{\xi_2}$$

Ersetzen wir die hierin vorkommenden u und v durch die in § 11.

Digitized by Google

unter (2) angegebenen Werte, so ergiebt sich nach geeigneter Zusammenfassung und Multiplication mit $\frac{\xi_1\,\xi_2}{(12)}$:

$$-a = \frac{1}{2(12)(23)(31)}[-(\eta_2-\eta_1)(23)(31)+\varepsilon\xi_1(31)(1-\xi_2\xi_3-\varepsilon\eta_2\eta_3 \\ +\varepsilon\xi_2(23)(1-\xi_3\xi_1-\varepsilon\eta_3\eta_1)]$$

und es wird

$$u_3-a = \frac{1}{2(12)(23)(31)}[(\eta_2-\eta_1)(23)(31)+\varepsilon\xi_1(31)(1-\xi_2\xi_3-\varepsilon\eta_2\eta_3) \\ +\varepsilon\xi_2(23(1-\xi_3\xi_1-\varepsilon\eta_3\eta_1)]$$

Ebenso kommt

$$v_3-b = \frac{1}{2(12)(23)(31)}[-\varepsilon(\xi_2-\xi_1)(23)(31)+\varepsilon\eta_1(31)(1-\xi_2\xi_3-\varepsilon\eta_2\eta_3) \\ +\varepsilon\eta_2(23)(1-\xi_3\xi_1-\varepsilon\eta_3\eta_1)]$$

Diese Ausdrücke setzen wir in die Gleichung

$$(u_3-a)^2+\varepsilon(v_3-b)^2=r^2$$

ein und erhalten

$$r^2 = \frac{2}{4(12)^2(23)^2(31)^2}$$

worin nach Vereinigung der entsprechenden Glieder beider Quadrate unter Benutzung der ursprünglichen Bedingungsgleichungen für ξ, η

$$w = 2\varepsilon(23)^2(31)^2(1-\xi_1\xi_2-\varepsilon\eta_1\eta_2)+(31)^2(1-\xi_2\xi_3-\varepsilon\eta_2\eta_3)^2 \\ +(23)^2(1-\xi_3\xi_1)^2+2\varepsilon(23)(31)^2(12)(1-\xi_2\xi_3-\varepsilon\eta_2\eta_3) \\ +2\varepsilon(23)^2(31)(12)(1-\xi_3\xi_1-\varepsilon\eta_3\eta_1) \\ +2(31)(23)(1-\xi_2\xi_3-\varepsilon\eta_2\eta_3)(1-\xi_3\xi_1-\varepsilon\eta_3\eta_1)(\xi_1\xi_2+\varepsilon\eta_1\eta_2)$$

wird.

Das vierte und fünfte Glied dieses Ausdruckes ergeben durch directe Addition

$$2\varepsilon(12)(23)(31)[(12)+(23)+(31)]$$

Fügt man ferner beim zweiten und dritten das fehlende doppelte Product hinzu, welches dann natürlich beim letzten Gliede subtractiv zu verrechnen ist, so kommt das vollständige Quadrat

$$[(12)+(23)+(31)]^2$$

Vereinigen wir dann noch das erste und das erweiterte letzte Glied, so wird

Digitized by Google

$$w = 2\varepsilon(12)(23)(31[(12)+(23)+(31)]+[(12)+(23)+(31)]^2$$
$$+2(31)(23)(1-\xi_1\xi_2-\varepsilon\eta_1\eta_2)(\xi_1\xi_3+\varepsilon\eta_1\eta_3+\xi_2\xi_3+\varepsilon\eta_2\eta_3)$$
$$-2(31)(23)[1-(\xi_1\xi_2+\varepsilon\eta_1\eta_2)^2]$$

Der letzte Teil dieses Ausdrucks ist aber nach § 11. Gleichung (13) gleich

$$-2\varepsilon(12)^2(23)(31)$$

der vorletzte ergiebt durch directe Ausrechnung

$$-2\varepsilon(12)(23)(31)[(23)+(31)]$$

Addiren wir beide Ausdrücke, so kommt demnach

$$-2\varepsilon(12)(23)(31)[(12)+(28)+(31)$$

welcher Ausdruck sich aber gegen das erste Glied forthebt. Es bleibt damit für w nur noch das vollständige Quadrat über, und es wird

$$r = \pm\frac{(12)+(23)+(31)}{2(12)(23)(31)} \tag{5}$$

wo das Zeichen so zu wählen ist, dass r positiv ist.

Noch schwieriger gestaltet sich die Berechnung, wenn wir von der Gleichung (4) ausgehen. Wenn wir berücksichtigen, dass

$$r^2 = (u_3-a)^2+\varepsilon(v_3-b)^2$$

ist, verwandelt sich dieselbe in die Gleichung:

$$4\pm 4r = u_1^2+u_2^2+2u_1u_3+2u_1(u_3-a)+2u_2(u_3-a)$$
$$+\varepsilon v_1^2+\varepsilon v_2^2+2\varepsilon v_1v_2+2\varepsilon v_1(v_3-b)+2\varepsilon v_2(v_3-b) \tag{6}$$

Nun ergiebt sich aber durch Einsetzen der Werte von u, v

$$u_1^2+\varepsilon v_1^2 = \frac{2\varepsilon}{(23)^2}[1-\xi_2\xi_3-\varepsilon\eta_2\eta_3]$$

$$u_2^2+\varepsilon v_2^2 = \frac{2\varepsilon}{(31)^2}[1-\xi_3\xi_1-\varepsilon\eta_3\eta_1]$$

$$2u_1u_2+1\varepsilon v_1v_2 = \frac{2\varepsilon}{(23)(31)}[\xi_1\xi_3+\varepsilon\eta_1\eta_3+\xi_2\xi_3+\varepsilon\eta_2\eta_3$$
$$-1-\xi_1\xi_2-\varepsilon\eta_1\eta_2]$$

$$2u_1(u_3-a)+2\varepsilon v_1(v_3-b) = \frac{\varepsilon}{(12)(23)}[\xi_1\xi_2+\varepsilon\eta_1\eta_2+\xi_3\xi_2+\varepsilon\eta_2\eta_3]$$
$$-1-\xi_3\xi_1-\varepsilon\eta_3\eta_1]-\frac{\varepsilon}{(12)(23)^2}[1-\xi_2\xi_3-\varepsilon\eta_2\eta_3][(31)+(12)]$$
$$+\frac{\varepsilon}{(12)(31)}[1-\xi_3\xi_1-\varepsilon\eta_3\eta_1]$$

Digitized by Google

$$2u_3(u_3-a)+2\varepsilon v_3(v_3-b)=\frac{\varepsilon}{(12)(31)}[\xi_1\xi_2+\varepsilon\eta_1\eta_2+\xi_1\xi_3+\varepsilon\eta_1\eta_3$$

$$-1-\xi_2\xi_3-\varepsilon\eta_2\eta_3]-\frac{\varepsilon}{(12)(31)^2}[1-\xi_3\xi_1-\varepsilon\eta_3\eta_1][(12)+(23)]$$

$$+\frac{\varepsilon}{(23)(12)}[1-\xi_2\xi_3-\varepsilon\eta_2\eta_3]$$

Fassen wir diese Ausdrücke in passender Weise zusammen, so ergiebt sich für die rechte Seite der Gleichung (6) nach Fortlassung des Factors $\frac{\varepsilon}{(12)(23)(31)}$ der Wert:

$$(1-\xi_2\xi_3-\varepsilon\eta_2\eta_3\left[\frac{(31)}{(23)}[(12)-(31)]-2(12)+23)\right]$$

$$+(1-\xi_3\xi_1-\varepsilon\eta_3\eta_1)\left[\frac{(23)}{(31)}[(12)-(23)]-2(12)+(31)\right]$$

$$+(1-\xi_1\xi_2-\varepsilon\eta_1\eta_2)[2(12)-(23)-(31)]$$

Um denselben noch weiter zu transformiren, benutzen wir die Gleichungen

$$(12)(1-\xi_3\xi_1-\varepsilon\eta_3\eta_1)+(31)(1-\xi_1\xi_2-\varepsilon\eta_1\eta_2)=(12)+(23)+(31)$$

$$(23)(1-\xi_1\xi_2-\varepsilon\eta_1\eta_2)+(12)(1-\xi_2\xi_3-\varepsilon\eta_2\eta_3)=(12)+(23)+(31)$$

$$(31)(4-\xi_2\xi_3-\varepsilon\eta_2\eta_5)+(23)(1-\xi_3\xi_1-\varepsilon\eta_3\eta_1)=(12)+(23)+31)$$

aus welchen

$$1-\xi_2\xi_3-\varepsilon\eta_2\eta_3=\frac{[(12)+(23)+(31)][(12)-(23)+(31)}{2(31)(12)}$$

$$1-\xi_3\xi_1-\varepsilon\eta_3\eta_1=\frac{[(12)+(23)+(31)][(23)-(31)+(12)]}{2(12)(23)}$$

$$1-\xi_1\xi_2-\varepsilon\eta_1\eta_2=\frac{[(12)+(23)+(31)][(31)-(12)+(23)]}{2(23)(31)}\text{ wird.}$$

Setzen wir diese Werte oben ein, so reducirt sich der Ausdruck auf

$$\frac{1}{(12)(23)(31)}[-2(12)(23)(31)[(12)+(23)+(31)]+2(12)^2(23)^2$$

$$+2(23)^2(31)^2+2(31)^2(12)^2-(12)^4-(23^4-(31)^4]$$

Nun ist aber nach (14 in § 11.

$$(\xi_1\xi_2+\varepsilon\eta_1\eta_2)^2+(\xi_2\xi_3+\varepsilon\eta_2\eta_3)^2+(\xi_3\xi_1+\varepsilon\eta_3\eta_1)^2-1$$
$$=2(\xi_1\xi_2+\varepsilon\eta_1\eta_2)(\xi_2\xi_3+\varepsilon\eta_2\eta_3)(\xi_3\xi_1+\varepsilon\eta_3\eta_1)$$

Digitized by Google

Ferner findet sich aus (16) desselben Paragraphen

$$\xi_1\xi_2+\varepsilon\eta_1\eta_2=\sqrt{1-\varepsilon(12)^2},\quad \xi_2\xi_3+\varepsilon\eta_2\eta_3=\sqrt{1-\varepsilon(23)^2}$$

$$\xi_3\xi_1+\varepsilon\eta_3\eta_1=\sqrt{1-\varepsilon(31)^2}$$

und deshalb muss auch

$$2-\varepsilon(12)^2-\varepsilon(23)^2-\varepsilon(31)^2=2\sqrt{(1-\varepsilon(12)^2)(1-\varepsilon(23)^2)(1-\varepsilon(31)^2)}$$

sein, woraus durch Quadriren

$$(12)^4+(23)^4+(31)^4=2(12)^2(23)^2+2(23)^2(31)^2+2(31)^2(12)^2 \\ -4\varepsilon(12)^2(23)^2(31)^2$$

sich ergiebt.

Mit Hülfe dieser Relation vereinfacht sich die rechte Seite von (6), indem wir nun auch den weggelassenen Factor $\frac{\varepsilon}{(12)(23)(31)}$ wieder hinzufügen, auf den Ausdruck:

$$\frac{\varepsilon}{(12)^2(23)^2(31)^2}[-2(12)(23)(31)[(12)+(23)+(31)]+4\varepsilon(12)^2(23)^2(31)^2]$$

oder auf

$$-2\varepsilon\frac{(12)+(23)+(31)}{(12)(23)(31)}+4$$

Setzen wir hierin den für r gefundenen Wert aus (5) ein, so ergiebt sich $\mp 4\varepsilon r+4$, und die Gleichung (4) lautet:

$$(2\mp\varepsilon r)^2=(u_1+u_2+u_3-a)^2+\varepsilon(v_1+v_2+v_3-b)^2 \qquad (7)$$

jenachdem der Quotient $\frac{(12)+(23)+(31)}{2(12)(23)(31)}$ positiv oder negativ ist.

Damit ist der Nachweis geführt, dass die Curve der 9 Punkte wirklich die berührende Curve berührt. Gleichzeitig haben wir auch einen Ausdruck für r gefunden, d. h. für das Verhältniss, in welchem die Axen der umbeschriebenen Curve zu denen der berührenden stehen. Nach (9) in § 11. ist dieser Ausdruck dem absoluten Werte nach weiter nichts als der an jener Stelle mit t bezeichnete Factor, mit dem man die Determinanten (12), (23), (31) multipliciren muss, um entsprechende Ausdrücke in u und v zu erhalten. Nun stellen aber diese Determinanten dem absoluten Werte nach die Inhalte der Dreiecke MB_1B_2, MB_2B_3, MB_3B_1, die Ausdrücke in u, v die Inhalte der Dreiecke MQ_1Q_2, MQ_2Q_3, MQ_3Q_1 dar. Daher ist der Wert von r auch gleich dem constanten Verhältniss von

Digitized by Google

$$MQ_1Q_2 : MB_1B_2 = MQ_2Q_3 : MB_2B_3 = MQ_3Q_1 : MB_3B_1$$

Mit Hülfe von (4) in § 11. kann der Quotient, von dessen Vorzeichen es abhängt, welche der beiden in (7) enthaltenen Gleichungen im gegebenen Falle anzuwenden ist, auch in der folgenden Weise geschrieben werden:

$$\frac{(12)+(23)+(31)}{2(12)(23)(31)} = \frac{u_1v_2-u_2v_1+u_2v_3-u_3v_2+u_3v_1-u_1v_3}{2(u_1v_2-u_2v_1)(u_2v_3-u_3v_2)(u_3v_1-u_1v_3)} \cdot t^2$$

Da t^2 stets positiv ist, hängt das Vorzeichen nur von dem in u, v dem ersten nachgebildeten Ausdruck ab. Der Zähler ist dem absoluten Werte nach gleich dem Inhalte des Dreiecks $Q_1Q_2Q_3$, der Nenner gleich dem doppelten Product der Teildreiecke MQ_1Q_2, MQ_2Q_3, MQ_3Q_1. Welches Vorzeichen der Quotient hat, ist allein von der Lage des Punktes M abhängig, und zwar ist derselbe positiv, wenn M innerhalb des Dreiecks $Q_1Q_2Q_3$ oder innerhalb eines seiner Scheitelwinkel liegt, negativ im ganzen übrigen Raume (sofern von der speciellen Lage auf einer Seite des Dreiecks oder auf der Verlängerung einer solchen abgesehen wird).

Ist nun

$$\varepsilon = +1$$

so liegt nach den Untersuchungen des vorigen Paragraphen ein Winkelpunkt im Dreieck selbst, der zugehörige Quotient ist daher positiv, die andern drei liegen in dem Teile des Raumes, in welchem der Quotient negativ ist.

Im Falle der Ellipse liegt demnach für den innerhalb des Dreiecks liegenden Mittelpunkt der Berührungspunkt B auf der Verlängerung von MN, für die äusseren Punkte auf MN selbst.

Ist

$$\varepsilon = -1$$

so liegt ein Mittelpunkt innerhalb des Dreiecks, ein zweiter innerhalb eines Scheitelwinkels, für beide ist also der Quotient positiv, die beiden andern aber liegen in dem Raume, in welchem derselbe negativ ist.

Im Falle der Hyperbel liegt demnach B auf MN selbst, wenn M innerhalb des Dreiecks oder in einem Scheitelwinkel, dagegen auf der Verlängerung von MN, wenn M in dem übrigen Raume sich befindet.

Digitized by Google

III.

§ 17.

Beziehungen zwischen Kreis und beliebigem Kegelschnitt.

Wir haben in § 3. bemerkt, dass das Product aus den Abschnitten der Secanten, welches beim Kreise für alle durch denselben Punkt gehenden Secanten constant ist, bei der Ellipse nur in dem Falle denselben Wert annimmt, dass die Secanten gleiche Neigung zur Axe haben und ihre Winkelhalbirenden parallel den Hauptaxen der Ellipse sind. Der Grund lag darin, dass nur für solche Geraden das Verhältniss zum Bilde dasselbe war. Wir wollen untersuchen, ob sich dieser Satz auch auf die Hyperbel übertragen lässt.

Die Gleichung des Abbildes sei

$$\xi^2 + \varepsilon\eta^2 = 1$$

Wir nehmen einen Punkt (ξ_1, η_1) beliebig an, legen durch denselben eine Secante und suchen das Product der Abschnitte zu berechnen. Es ist für jeden andern Punkt der Secante

$$\xi = \xi_1 + s\cos\vartheta, \quad \eta = \eta_1 + s\sin\vartheta$$

worin s die positive oder negative Entfernung von (ξ_1, η_1) und ϑ den Winkel bedeutet, den die Secante mit der positiven $x$axe bildet.

Für die Schnittpunkte mit dem Kegelschnitt müssen diese Werte der Gleichung

$$\xi^2 + \varepsilon\eta^2 = 1$$

genügen, woraus

$$s^2 + 2s\,\frac{\xi_1\cos\vartheta + \varepsilon\eta_1\sin\vartheta}{\cot^2\vartheta + \varepsilon\sin^2\vartheta} + \frac{\xi_1^2 + \varepsilon\eta_1^2 - 1}{\cos^2\vartheta + \varepsilon\sin^2\vartheta} = 0$$

sich ergiebt. Das Product der beiden Wurzelwerte von s ist also gleich $\dfrac{\xi_1^2 + \varepsilon\eta_1^2 - 1}{\cos^2\vartheta + \varepsilon\sin^2\vartheta}$. Im Falle des Kreises ist dasselbe constant gleich $\xi_1^2 + \eta_1^2 - 1$; im Falle der gleichseitigen Hyperbel ändert es sich jedoch mit ϑ und ist nur für solche Werte von ϑ gleich für welche die Differenz $\cos^2\vartheta - \sin^4\vartheta$ denselben Wert hat. Dieses ist aber der Fall, wenn die Secanten gleiche Neigung zur Axe haben, also gerade dann, wenn auch die Verhätnisszahlen denselben Wert besitzen und der Satz von der Gleichheit der Producte sich auf die beliebige Hyperbel übertragen lässt. Damit ist der Satz bewiesen: Für jeden Kegelschnitt sind die Producte aus den Abschnitten zweier Secanten gleich, wenn diese gleiche Neigung zur Axe haben.

Digitized by Google

Beim Kreise kann jede Richtung als Richtung der Hauptaxe genommen werden, darum müssen bei demselben die Producte für alle durch denselben Punkt gehenden Secanten gleich sein. Ferner ergiebt sich sogleich der Satz: Zieht man eine Tangente und eine Secante gleicher Neigung, so ist das Quadrat über der Tangente gleich dem Product aus den Abschnitten der Secante.

Ebenso müssen die Umkehrungen richtig sein: Sind für zwei Secanten eines Kegelschnitts die Producte ihrer Abschnitte gleich, so haben dieselben gleiche Neigung zur Axe, und ihre Winkelhalbirenden sind den Axen des Kegelschnitts parallel.

Ist das Quadrat über der Tangente gleich dem Product aus den Abschnitten der Secante, so haben die Tangente und Secante gleiche Neigung zur Axe. Im ersten Falle liegen die 4 Schnittpunkte auf einem Kreise, im letzten Falle berührt der durch den Berührungspunkt und die beiden Schnittpunkte der Secante construirte Kreis die Tangente und den Kegelschnitt.

Diese Sätze ermöglichen es, zu 3 beliebig gegebenen Punkten eines Kegelschnitts allein mit Hülfe der Richtung der Axen denjenigen vierten Punkt zu finden, in welchem der durch die 3 Punkte gelegte Kreis den Kegelschnitt trifft. Man construire den Kreis, verbinde zwei der Punkte mit einander und ziehe durch den dritten die Secante gleicher Neigung, welche den Kreis in dem gesuchten Schnittpunkte trifft. Man kann denselben auch ohne Benutzung des Kreises finden, indem man zwei Mal zwei Punkte verbindet und zu jeder Verbindungslinie durch den dritten Punkt die Secante gleicher Neigung zeichnet; der Schnittpunkt der beiden Secanten ist ebenfalls der gesuchte Punkt.

Es besteht demnach zwischen den Schnittpunkten eines Kreises mit einem Kegelschnitt und der Richtung der Axen eine derartige Beziehung, dass man immer zu 3 Schnittpunkten mit Hülfe der Axenrichtung den vierten finden kann.

Auch im Falle der Berührung lässt sich, wenn die Tangente nebst Berührungspunkt und der eine Schnittpunkt gegeben ist, mit Leichtigkeit den andern Schnittpunkt finden.

Entweder construire man den Kreis, welcher die Tangente in dem gegebenen Punkte berührt und durch den Schnittpunkt geht, und zeichne durch den Schnittpunkt eine Gerade gleicher Neigung mit der Tangente, welche den Kreis im gesuchten Punkte trifft — Oder man ziehe durch den Schnittpunkt zur Tangente und durch den Berührungspunkt zur Verbindungslinie mit dem Schnittpunkte

Digitized by Google

die Geraden gleicher Neigung, welche sich ebenfalls im verlangten Punkte schneiden.

Es ist daher, wenn ein Kreis einen Kegelschnitt durchschneidet, mit der Richtung der Verbindungslinie zweier Schnittpunkte die Richtung der Verbindungslinie der beiden andern gegeben; beide müssen dieselbe Neigung zur Axe haben. Daher muss für alle Kreise, welche dieselben beiden Schnittpunkte mit einem Kegelschnitt gemeinsam haben, die Richtung der Verbindungslinie der beiden andern Schnittpunkte dieselbe sein. Dieser Satz lässt sich auch in folgender Weise umkehren: Haben 2 Kreise einen Punkt mit einem Kegelschnitt gemeinsam und läuft die Verbindungslinie zweier andern Schnittpunkte des ersten Kreises parallel der Verbindungslinie zweier andern Schnittpunkte des zweiten Kreises, so liegt auch der zweite Schnittpunkt der beiden Kreise auf dem Kegelschnitt, und es hat die Verbindungslinie der beiden gemeinsamen Schnittpunkte dieselbe Neigung zur Axe wie die beiden Parallelen.

In dieser Form wird der Satz im nächsten Paragraphen wiederholte Anwendung finden.

Es muss auch für alle Kreise, welche einen Kegelschnitt in demselben Punkte berühren, die Verbindungslinie der beiden Schnittpunkte gleiche Richtung haben.

Lässt man den Radius der Kreise sich stetig ändern, so rücken die beiden Schnittpunkte auf dem Kegelschnitt weiter, und es verschiebt sich ihre Verbindungslinie parallel mit sich selbst. Dabei kann man es immer so einrichten, dass sich der eine der beiden Schnittpunkte dem Berührungspunkte nähert und schliesslich mit ihm zusammenfällt. Man gelangt dann zum Krümmungskreis, welcher im Berührungspunkte 3 Schnittpunkte vereinigt und ausserdem nur noch einen Punkt mit der Curve gemeinsam hat. Der Mittelpunkt desselben lässt sich also in einfacher Weise finden. Man zeichne die Tangente und errichte das Lot; dann ziehe man durch den Berührungspunkt die Sehne gleicher Neigung mit der Tangente und errichte das Mittellot. Der Schnittpunkt beider Lote ist der Mittelpunkt des Kreises.

Es ist auch der Fall möglich, dass beide Schnittpunkte gleichzeitig mit dem Berührungspunkt zusammenfallen, wobei man zu einem Kreise gelangt, der in seinem Berührungspunkt 4 Schnittpunkte vereinigt und sonst keinen Punkt mit dem Kegelschnitt gemeinsam hat. Dieser Fall kann nur eintreten, wenn die Verbindungslinie der Schnittpunkte der Tangente parallel läuft, also die Tangente

Digitized by Google

parallel ist der Axe, d. h. wenn der Berührungspunkt der Scheitelpunkt der Curve ist.

Noch eine weitere Folge von Sätzen kann hier angeführt werden, deren Richtigkeit aus den bisherigen Resultaten unmittelbar sich ergiebt:

Sämtliche Kegelschnitte, welche durch 4 auf einem Kreise liegende Punkte gezeichnet werden können, müssen dieselbe Richtung der Axen haben. Man bekommt diese, indem man den Winkel zweier Gegenseiten in dem von den 4 Punkten gebildeten Viereck halbirt.

Sämtliche Kegelschnitte, welche durch 3 beliebige Punkte gehen und dieselbe Richtung der Axen besitzen, gehen auch noch durch ein und denselben vierten Punkt. Dieser liegt mit den drei ersten auf der Peripherie eines Kreises und wird gefunden, indem man durch einen der Punkte zur Verbindungslinie der beiden andern die Sehnen gleicher Neigung zeichnet.

Sämtliche Kegelschnitte, welche durch 4 Punkte gezeichnet werden können, die nicht auf einem Kreise liegen, müssen darum verschiedene Richtung der Axen besitzen.

Alle Kegelschnitte, welche durch dieselben 3 Punkte gehen und in dem einen derselben den Kreis berühren, welcher durch die 3 Punkte construirt werden kann, haben dieselbe Richtung der Axen. Die Axen laufen parallel den Halbirungslinien der von der Tangente und der Verbindungslinie der beiden Punkte gebildeten Winkel oder auch parallel den Halbirungslinien der Winkel, welche von den Verbindungslinien des Berührungspunktes mit den beiden andern Punkten gebildet werden.

Sämtliche Kegelschnitte derselben Axenrichtung, welche dieselbe Gerade in demselben Punkte berühren und ausserdem einen Punkt gemeinsam haben, gehen noch durch einen dritten Punkt, dessen Lage leicht bestimmt werden kann.

Sämtliche Kegelschnitte derselben Axenrichtung, welche durch 3 Punkte gehen, die so gelegen sind, dass die Verbindungslinien des einen mit den beiden andern gleiche Richtung zur Axe haben, berühren sich in diesem Punkte mit dem Kreise, welcher durch die drei Punkte construirt werden kann.

Für alle Kegelschnitte derselben Axenrichtung, welche durch 2 feste Punkte gehen und dieselbe Gerade im festen Punkte berühren,

Digitized by Google

ist der Berührungspunkt und die Richtung der Axen bestimmt. Man findet den Berührungspunkt, indem man den Kreis zeichnet, welcher die Gerade berührt und durch die beiden Punkte geht. Die Axenrichtung halbirt den Winkel zwischen der Geraden und der Verbindungslinie der beiden Punkte.

Allerdings lassen sich auch unendlich viele Curven zeichnen, welche durch die beiden Punkte und die Gerade in einem andern Punkte berühren. Diese haben aber sämtlich verschiedene Richtung der Axen, während sie in dem einen Falle, in welchem der Berührungspunkt die angegebene bestimmte Lage hat, alle von derselben Axenrichtung sein müssen.

§ 18.

Constructionsaufgaben.

Die bisherigen Angaben reichen hin zur Lösung einer ganzen Reihe von Aufgaben, in denen es sich darum handelt, zur Axenrichtung eines durch Punkte und berührende Geraden oder Kreise bestimmten Kegelschnitts den Mittelpunkt oder umgekehrt zum Mittelpunkt die Richtung der Axen zu finden.

Aufgabe 1: Gegeben sind die Punkte A, B, C, D_1, welche nicht auf einem Kreise liegen. Es soll zu einer gegebenen Axenrichtung der Mittelpunkte des Kegelschnitts gefunden werden, welcher durch diese 4 Punkte hindurchgeht.

Lösung: Man construire den Kreis, welcher durch A, B, C geht und zeichne die Sehne CE, welche mit AB gleiche Neigung zur Axe hat. Dann liegt E auf dem Kegelschnitt. Hierauf lege man durch A, B, D einen Kreis und suche wiederum zu AB die Sehne gleicher Neigung DF. Dann liegt auch F auf dem Kegelschnitt, es ist CE par. DF, und die Verbindungslinie der Mittelpunkte geht durch den Mittelpunkt der Curve. Drittens zeichne man einen Kreis durch C, D, F, lege durch C die Sehne gleicher Neigung mit DF, deren Endpunkte $4i$ abermals auf dem Kegelschnitt liegen muss. Dann ist CG par. BA, und die Verbindungslinie der Mittelpunkte liefert einen zweiten geometrischen Ort für 0.

Liegen die gegebenen 4 Punkte auf einem Kreise, so fallen die 3 zur Construction verwendeten Kreise mit diesem zusammen und die Verbindungslinie der Mitten paralleler Sehnen schneiden sich stets in demselben Punkte, welches auch die Richtung der Axen sein

Digitized by Google

mag. Man erhält also zu einer beliebig angenommenen Richtung der Axen stets dieselbe Curve, nämlich den durch die 4 Punkte hindurchgehenden Kreis. Wenn aber die Axenrichtung parallel läuft der Halbirungslinie des Winkels, welcher von zwei gegenüberliegenden Seiten des Vierecks $ABCD$ oder von den Diagonalen gebildet wird, so geht jede Curve, welche durch drei der Punkte hindurchgeht, von selbst auch durch den vierten. Man kann in diesem Falle noch einen fünften Punkt der Curve annehmen, der nur nicht mit den vier ersten auf demselben Kreise liegen darf.

Aufgabe 2: Gegeben 4 Punkte A, B, C, D, welche auf einem Kreise liegen. Es soll der Mittelpunkt des Kegelschnitts gefunden werden, der durch diese 4 Punkte und ausserdem durch einen fünften Punkt E hindurchgeht, welcher ausserhalb der Peripherie des Kreises liegt.

Lösung: Man zeichne den Kreis durch A, B, E und ziehe EF parallel DC. Ebenso zeichne man den Kreis durch C, D, E und ziehe EG parallel AB. Der Mittelpunkt O liegt auf der Verbindungslinie der Mitten von CD und EF und auf der Verbindungslinie der Mitten von AB und EG. Die Axen des Kegelschnitts sind parallel den Halbirungslinien der Winkel, welche von je 2 gegenüberliegenden Seiten des Vierecks $ABCD$ oder von den Diagonalen desselben gebildet werden.

Wir kommen jetzt zu der Aufgabe, von welcher in § 9. die Rede war, und deren Lösung wir dort in analytischer Weise versucht haben.

Aufgabe 3: Gegeben A, B, C und O. Man soll die Axenrichtung des Kegelschnitts bestimmen, welcher O als Mittelpunkt hat und durch A, B, C hindurchgeht.

Lösung: Man verbinde O mit der Mitte von BC, verlängere diese Linie, bis sie die durch A zu BC gezogene Parallele in D trifft, und verlängere AD um sich selbst bis E. Dann ist E der Endpunkt der durch A zu BC parallel gezogenen Sehne.

In gleicher Weise zeichne man sich den Endpunkt F der durch C zu AB parallelen Sehne. Hierauf construire man durch A, B, C und C, F, E Kreise, die sich in G schneiden. Dann ist G ebenfalls ein Punkt der Curve und die Halbirungslinie der zu EG und AB oder von EO und CF gebildeten Winkel liefern die Richtung der Hauptaxen des Kegelschnitts.

Aufgabe 4: Gegeben die Gerade E, auf derselben der Punkt

Digitized by Google

A, ausserhalb die Punkte *B* und *C*. Es wird der Mittelpunkt 0 des Kegelschnitts gesucht, der eine bestimmte Axenrichtung hat, *L* in *A* berührt und durch *B* und *C* geht.

Lösung: Man zeichne den Kreis, welcher *L* in *A* berührt und durch *A* geht, und suche den Schnittpunkt *D* dieses Kreises mit dem Kegelschnitt. Ebenso construire man den Kreis, welcher *L* in *A* berührt und durch *C* geht und suche den Schnittpunkt *E* mit der Curve. Dann ist *BD* par. *CE* und die Verbindungslinie der Mittelpunkte geht durch 0. Nun zeichne man den Kreis durch *C*, *B*, *D* und ziehe *CF* parallel der Tangente *L*. Es liegt dann auch *F* auf der Curve und die Verbindungslinie von *A* mit der Mitte von *CF* geht ebenfalls durch 0.

Ist *L* die Tangente an den durch *A*, *B*, *C* gehenden Kreis, und weicht die Richtung der Axen ab von der Richtung der Halbirungslinie des von *L* und *BC* oder von *AB* und *AC* gebildeten Winkels, so fallen sämtliche Kreise der Construction in einen zusammen und wir erhalten als einzige Curve den umbeschriebenen Kreis der Punkte selbst.

Stimmt jedoch die Axenrichtung mit der Richtung der genannten Halbirungslinien überein, so wird jede Curve, welche *L* in *A* berührt und durch den einen der beiden Punkte geht, von selbst auch durch den andern gehen. Man kann daher in diesem Falle noch einen vierten Punkt der Curve annehmen, der nur nicht auf dem Kreise durch die drei andern liegen darf. Hierauf bezieht sich die nächste Aufgabe.

Aufgabe 5: Gegeben *L*. *A* auf *L*, ausserhalb *B*, *C*. *L* berührt den Kreis durch *A*, *B*, *C*.

Man soll den Mittelpunkt des Kegelschnitts finden, welcher *L* in *A* berührt, durch *B*, *C* und ausserdem noch durch einen vierten Punkt *D* hindurchgeht, der mit *A*, *B*, *C* nicht auf demselben Kreise liegt.

Lösung: Man zeichne den Kreis durch *D*, welcher *L* in *A* berührt, und ziehe *DE* parall. *BC*. Dann liegt 0 auf der Verbindungslinie der Mitten von *BC* und *DE*. Ferner construire man den Kreis durch *D*, *B*, *C* und ziehe *DF* parallel zu *L*. Dann liegt 0 zweitens auf der Verbindungslinie von *A* mit der Mitte der Sehne *DF*. Die Axenrichtung halbirt den von *L* und *BC* gebildeten Winkel.

Aufgabe 6: Gegeben *L*, *A* auf *L*, ausserhalb *B*, ferner 0. Es soll die Axenrichtung des Kegelschnitts gefunden werden, der 0 als Mittelpunkt hat, durch *B* geht und *L* in *A* berührt.

Digitized by Google

Lösung: Man suche den Endpunkt C der durch B zu L parallel gezogenen Sehne. Dann verlängere man AO um sich selbst bis D, beschreibe den Kreis durch B, C, D und den Kreis, welcher L in A berührt und durch D geht. Beide treffen sich in dem Punkte E der Curve. Die Axen sind dann parallel den Halbirungslinien der von DE und L oder BC gebildeten Winkel.

Aufgabe 7: Gegeben L mit A, L' mit B. Es wird der Mittelpunkt eines Kegelschnitts von bestimmterRichtung der Axen gesucht, welcher L in A und L' in B berührt.

Lösung: Man beschreibe durch B den Kreis, welcher L in A berührt, und bestimme den zweiten Schnittpunkt C dieses Kreises mit der Curve. Ebenso zeichne man durch A den Kreis, welcher L' in B berührt und suche den zweiten Schnittpunkt D dieses Kreises mit dem Kegelschnitt. Dann construire man einen Kreis durch A, D, C, ziehe CE parall. L' und verbinde die Mitte von CE mit B. Endlich zeichne man einen Kreis durch B, C, D, ziehe DF parall. E und verbinde die Mitte dieser Sehnen mit A. Die beiden Verbindungslinien treffen sich dann in O.

Wenn A und B vom Schnittpunkte von L und L' gleichweit entfernt liegen, so fallen alle bei der Construction vorkommenden Kreise in einen zusammen und man erhält für gewöhnlich als einzige Lösung den Kreis, welcher h in A und L' in B berührt. Wenn jedoch in diesem Falle die angenommene Richtung der Axen parallel ist der Halbirungslinie des von L und L' gebildeten Winkels, so kann noch ein dritter Punkt der Curve angenommen werden, der nur nicht auf dem Kreise liegen darf, welcher L in A und L' in B berührt.

Aufgabe 8: Gegeben L mit A, L' mit B. A und B sind gleichweit vom Schnittpunkte der Geraden L und L' entfernt. Es soll der Mittelpunkt O eines Kegelschnitts gefunden werden, der in L in A, L' in B berührt und ausserdem noch durch einen Punkt C geht, der nicht auf dem Kreise liegt, der L in A und L' in B berührt.

Lösung: Man zeichne durch C den Kreis, welcher L in A berührt, ziehe CD parall. L' und verbinde die Mitte von CD mit B. Ebenso construire man den Kreis, welcher durch C geht und L' in B berührt, lege CE parall. L und verbinde A mit der Mitte von CE. Beide Verbindungslinien treffen sich in O. Die eine Axe halbirt den Winkel zwischen L und L', die andere ist parallel AB.

Aufgabe 9: Gegeben L mit A, L' und 0° Man soll die Axen-

Digitized by Google

richtung des Kegelschnitts finden, der 0 als Mittelpunkt hat, L in A und L' berührt.

Lösung: Man verbinde A mit 0 und verlängere diese Linie um sich selbst bis B. Dann ziehe man durch B eine Parallele zu L, welche L' in E trifft, verbinde den Schnittpunkt F von L und L' mit 0 und verlängere diese Linie, bis sie die Verlängerung von EB in G trifft. Endlich ziehe man durch G eine Parallele zu L', welche L in H schneidet.

Dann werden die Seiten des Parallelogramms $HFEG$ von der gesuchten Curve berührt, es geht die Verbindungslinie HE durch 0 und ist zu FG conjugirt. Man bekommt daher den Berührungspunkt C der Seite HG als Schnittpunkt von HG mit der durch A zu FG gezogenen Parallelen. Zieht man ferner durch C eine Parallele zu L, welche AB in J trifft, und verlängert CJ um sich selbst bis D, so ist D ein weiterer Punkt der Curve. Jetzt lege man einen Kreis durch B, D, C und construire den Kreis, welcher durch B geht und L in A berührt. Beide treffen sich in K. Dann läuft die Axenrichtung parallel der Halbirungslinie des von L und BK gebildeten Winkels.

Aufgabe 10: Gegeben ein Kreis K, auf demselben der Punkt A und die Tangente L in diesem Punkte; ferner ausserhalb des Kreises der Punkt B. Es soll der Mittelpunkt des Kegelschnitts gefunden werden, welcher eine bestimmte Richtung der Axen hat, durch B geht und mit dem Kreise K in A eine doppelte Berührung hat.

Lösung: Man zeichne den Schnittpunkt C des Krümmungskreises mit dem Kegelschnitt, construire den Kreis, welcher durch B geht und L in A berührt, und ziehe BD parall. CA.

Dann liegt 0 auf der Verbindungslinie der Mitten von BD und CA. Hierauf ziehe man einen Kreis durch B, C, D und ziehe CE parall. L. Dann liegt 0 zweitens auf der Verbindungslinie von A mit der Mitte von CE.

Liegt B auf K, so bekommt man immer den Krümmungskreis selbst, sofern nicht die Richtung der Axen parallel ist der Halbirungslinie des von L und AB gebildeten Winkels.

Ist dieses der Fall, so kann man noch einen zweiten Punkt ausserhalb des Kreises annehmen und bestimmen, dass der Kegelschnitt ausserdem noch durch diesen Punkt hindurchgehen soll.

Aufgabe 11: Gegeben der Kreis K und im Punkte A desselben

Digitized by Google

die Tangente L, ferner der Punkt 0. Es soll die Axenrichtung des Kegelschnitts gefunden werden, der 0 als Mittelpunkt hat und K in A doppelt berührt.

Lösung: Man verbinde A mit 0 und verlängere diese Linie um sich selbst bis B. Dann ziehe man durch B eine Parallele zu K und beschreibe mit dem Radius von K einen Kreis, welcher die Parallele in B berührt; ferner beschreibe man den Kreis, welcher L in A berührt und durch B geht. Beide Kreise treffen sich in C. Dann ist die Axenrichtung parallel den Halbirungslinien der von BC und L gebildeten Winkel.

§ 19.

Beziehungen zwischen Ellipse und beliebigem Kegelschnitt.

Die Beziehungen zwischen Ellipse und beliebigem Kegelschnitt, zu denen wir nunmehr übergehen, lassen sich mit Leichtigkeit auf die Beziehungen zwischen Kreis und beliebigem Kegelschnitt zurückführen, indem wir die Ellipse mit Hülfe unseres Princips in einen Kreis abbilden. Die Kegelschnitte, mit welchen die Ellipse in Beziehung gebracht werden soll, liefern dabei wieder Kegelschnitte derselben Gattung, deren Dimensionen und Axenrichtung vorher untersucht werden muss.

Wir betrachten einen Kegelschnitt von beliebiger Richtung, beliebiger Dimension der Axen und beliebigem Mittelpunkt und bilden denselben nach der Substitution

$$x = a\xi, \quad y = b\eta$$

ab. Sind die Halbaxen u und v, die Coordinaten des Mittelpunktes x_1, y_1 und der Drehungswinkel der ersten Axe gegen die Richtung der positiven x gleich ϑ, so lautet die Gleichung der Curve:

$$\frac{1}{u^2}[(x-x_1)\cos\vartheta+(y-y_1)\sin\vartheta]^2 + \frac{1}{v^2}[-(x-x_1)\sin\vartheta+(y-y_1)\cos\vartheta]^2 = 1$$

Die Gleichung des Abbildes wird dann:

$$\frac{1}{u^2}[a(\xi-\xi_1)\cos\vartheta+b(\eta-\eta_1\sin\vartheta]^2 + \frac{1}{v^2}[-a(\xi-\xi_1)\sin\vartheta+b(\eta-\eta_1)\cos\vartheta]^2 = 1$$

sofern mit (ξ_1, η_1) das Bild des Mittelpunktes bezeichnet wird. Dieselbe stellt eine Curve zweiten Grades derselben Gattung dar. Ver

Digitized by Google

schieben wir das Coordinatensystem bis zum Punkte (ξ_1, η_1) und nennen die Coordinaten in Bezug auf das neue System ξ', η', so heisst die Gleichung:

$$\frac{1}{u^2}(a\xi' \cos\vartheta + b\eta' \sin\vartheta)^2 + \frac{\varepsilon}{v^2}(-a\xi' \sin\vartheta + b\eta' \cos\vartheta)^2 = 1$$

Dieselbe Gleichung würden wir aber auch erhalten haben, wenn wir um den ursprünglichen Anfangspunkt eine der gegebenen congruente Curve mit derselben Richtung der Axen construirt und diese abgebildet hätten. Man kann daher das Bild einer Curve auch in der Weise bekommen, dass man um den Anfangspunkt eine congruente Curve mit gleicher Axenrichtung zeichnet, diese abbildet und das Bild parallel mit sich selbst verschiebt, bis der Mittelpunkt mit dem Bilde des Mittelpunktes der Curve zusammenfällt. Daraus geht hervor, dass das Bild einer Curve der Gestalt nach nur abhängig ist von den Dimensionen derselben und von der Richtung der Axen, aber unabhängig ist von der Lage des Mittelpunktes. Ferner ergiebt sich, dass ähnliche Curven bei der Abbildung wieder ähnliche Curven liefern.

Es handelt sich nun hauptsächlich darum, die Lage der Axen beim Abbild zu bestimmen. Dieselben entstehen aus demjenigen Paar von conjugirten Durchmessern der Curve, welches bei der Abbildung senkrechte Geraden liefert. Nun werden aber aus sämtlichen conjugirten Durchmessern der Abbildungsellipse senkrechte Geraden.

Wir müssen also diejenigen conjugirten Richtungen der Ellipse aufsuchen, welche auch in Bezug auf die abzubildende Curve conjugirt sind. Zu dem Ende construiren wir um den Anfangspunkt eine der gegebenen ähnliche Curve mit gleicher Richtung der Axen, welche die Abbildungsellipse berührt. Die Richtung zu den Berührungspunkten und die hierzu conjugirte Richtung der gemeinsamen Tangente geben dann die Richtungen der beiden Durchmesser an, welche bei der Abbildung Hauptaxen des Kegelschnitts werden.

Ist die abzubildende Curve eine Ellipse, so kann man diese Durchmesser auch ohne Hülfe der Tangente finden. In diesem Falle lassen sich nämlich 2 ähnliche Curven zeichnen, welche die Abbildungsellipse berühren. Die Berührungspunkte derselben sind dann die Endpunkte der gemeinsamen conjugirten Durchmesser. Ist die abzubildende Curve dagegen eine Hyperbel, so giebt es nur eine berührende ähnliche Curve; man erhält also auch direct nur die Endpunkte des einen Durchmessers, den andern Durchmesser be-

Digitized by Google

kommt man dann, indem man durch den Mittelpunkt eine Parallele zur Tangente zieht.

Daraus geht hervor, dass die Richtung der gemeinsamen conjugirten Durchmesser dieselbe bleibt für alle Curven, welche den Curven ähnlich sind, die sich um den Mittelpunkt der Abbildungsellipse construiren lassen und diese in den Endpunkten desselben oder in den Endpunkten des conjugirten Durchmessers berühren. Soweit diese Curven Ellipsen sind, lässt sich zu jeder, die in den Endpunkten des einen berührt, eine ähnliche zeichnen, welche in denen des andern berührt; wir erschöpfen also alle möglichen Formen der Ellipse, wenn wir uns auf diejenigen beschränken, welche in den Endpunkten des einen allein berühren. Anders liegt die Sache bei den Hyperbeln. Die Hyperbeln, welche in den Endpunken des einen berühren, sind nicht denjenigen ähnlich, welche in denen des andern berühren, sondern stehen zu ihnen im Verhältniss von Hyperbeln zu ihren conjugirten Hyperbeln. Deswegen müssen hier Endpunkte beider Durchmesser berücksichtigt werden.

Die Aufgabe, die Curven zu zeichnen, welche dieselbe Richtung der gemeinsamen conjugirten Axen haben, läuft hiernach auf die im vorigen Paragraphen behandelte Aufgabe hinaus, um einen festen Mittelpunkt die Curven zu construiren, welche eine Gerade in einem bestimmten Punkte berühren. Es giebt deren unendlich viele, und zwar kann noch ein zweiter Punkt beliebig angenommen werden und jedesmal bestimmt werden, dass die Curve durch denselben hindurchgehen soll. Zu jedem Paar von conjugirten Durchmessern der Abbildungsellipse gehören demnach unendlich viele Curven, für welche dasselbe die Richtung der gemeinsamen conjugirten Durchmesser darstellt, eine Schar von Ellipsen und 2 Scharen von Hyperbeln, von welchen die einen in den Endpunkten des einen Durchmessers, die andern in denen des andern berühren.

Es ist klar, dass, wenn man irgend eine aus der Reihe dieser Ellipsen herausnimmt und um ihren Mittelpunkt zu sämtlichen übrigen ähnliche berührende Curven zeichnet, die Hyperbeln der einen Schar in denselben Endpunkten eines Durchmessers, die Hyperbeln der andern Schar in denselben Endpunkten des conjugirten Durchmessers berühren, während zu jeder Ellipse 2 berührende Ellipsen möglich sind, von welchen die eine in den einen, die andere in den andern Endpunkten berührt. Greift man eine Hyperbel heraus und beschreibt wieder ähnliche berührende Curven, so wird dieselbe von den Hyperbeln derselben Schar in denselben Punkten berührt, ebenso von sämtlichen Ellipsen; doch lässt sich keine einer Curve der an-

Digitized by Google

dern Schar ähnliche Hyperbel zeichnen, welche die angenommene Hyperbel berührt.

Gehen wir nun zur Anwendung über. Wir betrachten einen beliebigen Kegelschnitt und schneiden denselben durch eine Ellipse. Die Abbildung liefert dann wieder einen Kegelschnitt geschnitten von einem Kreise. Wir haben aber gefunden, dass, wenn ein Kegelschnitt von einem Kreise geschnitten wird, die gegenüberliegenden Seiten des von den Schnittpunkten gebildeten Vierecks wie auch die Diagonalen desselben mit den Axen des Kegelschnitts gleiche Winkel bilden, wofür hier besser der Ausdruck zu wählen ist, dass die Tangenten parallel den Gegenseiten oder den Diagonalen sich auf der Verlängerung der Hauptaxen treffen. Damit gewinnen wir den Satz: Wird ein Kegelschnitt von einer Ellipse geschnitten, so treffen sich bei jeder der beiden Curven die Tangenten parallel zu den Gegenseiten oder den Diagonalen des von den Schnittpunkten gebildeten Vierecks in Punkten, welche auf den durch den Mittelpunkt der Curve zur Richtung der gemeinsamen conjugirten Durchmesser parallel gezogenen Geraden liegen. Dabei ist zu bemerken, dass im Falle der Hyperbel entweder alle 4 Schnittpunkte auf demselben Zweige oder auf jedem Zweige 2 derselben liegen müssen; im letzteren Falle können natürlich nur Tangenten parallel den Seiten des Vierecks gezogen werden, welche Punkte desselben Zweiges verbinden.

Da ferner für ähnliche Curven derselben Axenrichtung die Richtung der gemeinsamen conjugirten Durchmesser dieselbe bleibt, so muss für alle ähnlichen Ellipsen derselben Axenrichtung, welche dieselben beiden Punkte mit einem Kegelschnitt gemeinsam haben, die Verbindungslinie der beiden andern Schnittpunkte unter sich parallel sein.

Diese Sätze bleiben natürlich auch richtig, wenn zwei Schnittpunkte zusammenfallen, und die Ellipse den Kegelschnitt berührt.

Wird ein Kegelschnitt von einer Ellipse berührt, so schneidet sich bei jeder der beiden Curven die gemeinsame Tangente mit der zur Verbindungslinie parallel gezogenen Tangente in einem Punkte der gemeinsamen conjugirten Durchmesser. Ist der betrachtete Kegelschnitt selbst eine Ellipse oder liegen im Falle der Hyperbel die beiden andern Schnittpunkte mit dem Berührungspunkt auf demselben Zweige, so gilt dasselbe auch für die Tangenten, welche parallel zu den Verbindungslinien des Berührungspunktes mit den beiden andern Schnittpunkten gezogen werden können.

Digitized by Google

Aendert man die Dimensionen der berührenden ähnlichen Ellipsen stetig, so rückt die Verbindungslinie der beiden Schnittpunkte parallel mit sich selbst weiter. Fällt bei dieser Bewegung der eine der beiden Schnittpunkte auf den Berührungspunkt, so erhalten wir diejenige Ellipse, welche mit dem Kegelschnitt eine Berührung zweiter Ordnung hat. Es kann auch der Fall eintreten, dass beide Schnittpunkte mit dem Berührungspunkt zusammenfallen, und die berührende Ellipse vier Schnittpunkte in ihrem Berührungspunkt vereinigt, wenn nämlich der Berührungspunkt Endpunkt eines gemeinsamen conjugirten Durchmessers ist, und die Verbindungslinie der beiden Schnittpunkte der Tangente parallel läuft. Alle diese Fälle können natürlich nur dann eintreten, wenn die gegebene Curve selbst eine Ellipse ist, oder wenn im Falle der Hyperbel die beiden Schnittpunkte mit dem Berührungspunkt auf demselben Zweige liegen.

Kehren wir noch einmal zu dem Falle zurück, dass die Ellipsen den Kegelschnitt in 4 Punkten durchschneiden. Wir fanden, dass für alle der Abbildungsellipse ähnliche Ellipsen, welche dieselben beiden Schnittpunkte mit dem Kegelschnitt gemeinsam haben, die Verbindungslinien der andern beiden Schnittpunkte parallel sein müssen. Der Grund dafür lag in dem Umstande, dass die Richtung der gemeinsamen conjugirten Durchmesser sich für ähnliche Curven nicht ändert. Dieselbe bleibt aber nicht nur gleich für alle unter sich ähnlichen Ellipsen, sondern überhaupt für alle Ellipsen, die denjenigen ähnlich sind, welche sich in dem Mittelpunkt der Abbildungsellipse beschreiben lassen und diese im selben Punkte berühren. Für alle diese muss also auch die Verbindungslinie der beiden andern Schnittpunkte parallel sein und dieselbe Richtung haben wie für die Abbildungsellipse selbst. Construirt man dann zu jeder einzelnen dieser verschiedenartig gestalteten Ellipsen wieder ähnliche, so rückt bei stetiger Aenderung der Dimensionen die Verbindungslinie der beiden Schnittpunkte parallel mit sich selbst fort und man kann die Dimensionen stets so wählen, dass die Verbindungslinie durch dieselben Schnittpunkte hindurchgeht wie bei der Abbildungsellipse selbst. Daraus folgt aber, dass es unendlich viele Ellipsen geben muss, welche durch dieselben auf einer Ellipse liegenden 4 Punkte gehen und dass dieselben sämtlich gleiche Richtung der gemeinsamen conjugirten Durchmesser besitzen. Wir kommen so ganz von selbst auf die Frage nach den Kegelschnitten, die sich durch beliebig gegebene Punkte legen lassen, auf die wir später noch genauer eingehen wollen.

Für den Fall der Berührung lauten unsere Resultate: Sämtliche Ellipsen, welche eine gegebene Ellipse in demselben Punkte berühren

und ausserdem noch 2 feste Punkte mit denselben gemeinsam haben, besitzen gleiche Richtung der gemeinsamen conjugirten Durchmesser.

Es giebt unendlich viele Ellipsen, welche sich mit einer gegebenen Ellipse in demselben Punkt doppelt berühren und ausserem noch einen Punkt mit denselben gemeinsam haben. Diese haben sämtlich gleiche Richtung der gemeinsamen conjugirten Durchmesser.

Sämtliche Ellipsen, welche eine gegebene Ellipse in einem Punkte so berühren, dass der Berührungspunkt 4 Schnittpunkte in sich vereinigt, haben dieselbe Richtung der gemeinsamen conjugirten Durchmesser und zwar giebt der Durchmesser zum Berührungspunkt und der conjugirte die Richtung derselben an.

§ 20.

Beziehungen zwischen beliebigen Kegelschnitten. Von den Kegelschnitten durch 4 beliebige Punkte. Geometrischer Ort der Mittelpunkte.

Bis jetzt haben wir den betrachteten Kegelschnitt nur in Beziehung gebracht zu den Ellipsen von gleicher Richtung der gemeinsamen conjugirten Durchmesser. Es fragt sich, ob unsere Sätze auch gelten, wenn wir denselben mit den zum selben System gehörigen Hyperbeln durchschneiden. Ist der angenommene Kegelschnitt selbst eine Ellipse, so bedarf es keiner weiteren Auseinandersetzung, dass der Satz von den Tangenten parallel zu den gegenüberliegenden Seiten des von den Schnittpunkten gebildeten Vierecks und damit auch alle übrigen Sätze ihre Richtigkeit behalten. Wir haben also nur den Fall zu betrachten, dass wir es nur mit Hyperbeln zu tun haben.

Wir denken uns also eine Hyperbel und schneiden dieselbe durch eine zweite, welche mit der ersten und der Abbildungsellipse gleiche Richtung der gemeinsamen conjugirten Durchmesser besitzt. Wir erhalten dann als Abbild zwei sich schneidende Hyperbeln derselben Axenrichtung. Wir haben aber früher gefunden, dass alle Kegelschnitte durch 4 Punkte auf der Peripherie eines Kreises gleiche Richtung der Axen haben, und dass umgekehrt 2 Kegelschnitte von gleicher Axenrichtung sich nur im Punkte auf der Peripherie eines Kreises schneiden können. Es müssen daher in unserm Falle die Schnittpunkte beim Abbilde auf einem Kreise, bei den ursprünglichen Hygerbeln selbst auf einer der Abbildungsellipse ähnlichen

Digitized by Google

Ellipse liegen. Nun konnte aber jede der Ellipsen von gleicher Richtung der gemeinsamen conjugirten Durchmesser als Abbildungscurve benutzt werden, es muss also auch möglich sein durch die 4 Schnittpunkte der Hyperbeln zu jeder derselben eine ähnliche zu zu schneiden. Schneiden sich demnach 2 Hyperbeln, die zum selben System von Curven gleicher Richtung der gemeinsamen conjugirten Durchmesser gehören, so lassen sich durch die Schnittpunkte unendlich viele Ellipsen legen, welche zum gleichen System gehören und alle über das Schneiden und Berühren der Curven ausgesprochenen Sätze behalten ihre Gültigkeit. Es fragt sich, woran man es erkennen kann, ob 2 beliebige Hyperbeln als zum selben System gehörig betrachtet werden können oder nicht? Lässt sich um den Mittelpunkt der einen eine zur andern ähnliche construiren, welche die erste berührt, so ist es klar, dass beide zum selben System und sogar zur selben Schar gehören, und der Durchmesser zum Berührungspunkt und die gemeinsame Tangente geben die Richtung der gemeinsamen conjugirten Durchmesser an. Lässt sich diese Construction nicht ausführen, so versuche man um den Mittelpunkt der ersten Hyperbel eine Hyperbel zu zeichnen, welche der conjugirten zur zweiten ähnlich ist und die erste berührt. Ist dies möglich, so gehören die beiden Hyperbeln wiederum demselben System, aber verschiedenen Scharen an und der Durchmesser zum Berührungspunkt und die Tangente geben wieder die Richtung der gemeinsamen conjugirten Durchmesser an. Ist weder die eine noch die andere Construction ausführbar, so gehören die beiden Hyperbeln nicht demselben System an. Die Schnittpunkte liegen dann so, dass es überhaupt unmöglich ist eine Ellipse durch dieselben zu legen.

Wir kommen damit wieder zu der Frage nach den Kegelschnitten, welche sich durch 4 beliebige Punkte legen lassen.

Wir nehmen zunächst an, die 4 Punkte hätten eine solche Lage zu einander, dass es möglich sei Ellipsen durch dieselben zu legen. Wie man sich leicht überzeugt, tritt dieser Fall ein, wenn dieselben sich zu einem Viereck mit lauter concaven Winkeln verbinden lassen. Es ist dies die Lage, welche wir bei der Untersuchung der Mittelpunkte der berührenden Curven eines Dreiecks als die zweite bezeichnet haben, die dann immer eintrittt, wenn die berührenden Curven Hyperbeln sind, und der Mittelpunkt der umbeschriebenen Curve innerhalb der Scheitelwinkel des Dreiecks liegt.

Bilden wir nun sämtliche durch die 4 Punkte gehenden Kegelschnitte mit Hülfe einer der Ellipsen ab, so bekommen wir als Abbild 4 auf der Peripherie eines Kreises liegende Punkte und sämtliche durch dieselben gehenden Kegelschnitte.

Digitized by Google

Diese müssen dann aber gleiche Richtung der Axen haben, woraus für die ursprünglichen Curven der Satz folgt: Alle Kegelschnitte, welche durch 4 auf einer Ellipse liegende Punkte, oder welche durch die Ecken eines Vierecks mit concaven Winkeln gezeichnet werden können, haben dieselbe Richtung der gemeinsamen conjugirten Durchmesser.

Ferner für den Fall der Berührung: Alle Kegelschnitte, welche durch 3 beliebige Punkte gezeichnet werden können und in denen einer derselben eine durch die 3 Punkte gelegte Ellipse berührt, haben dieselbe Richtung der gemeinsamen conjugirten Durchmesser. Desgleichen alle Kegelschnitte, welche mit einer Ellipse in demselben Punkte eine Berührung zweiter Ordnung haben und ausserdem noch durch einen festen Punkt der Ellipse gehen. Endlich alle Kegelschnitte, welche eine Ellipse in einem bestimmten Punkte so berühren, dass sämtliche 4 Schnittpunkte mit dem Berührungspunkt zusammenfallen. Im letzteren Falle ist die Richtung der gemeinsamen conjugirten Durchmesser durch den Durchmesser zum Berührungspunkt sogleich bestimmt.

Soweit diese Sätze sich auf Ellipsen beziehen, sind dieselben bereits im vorigem Paragraphen ausgesprochen worden. Wir sehen jetzt, dass sie allgemeine Gültigkeit für alle möglichen Kegelschnitte besitzen.

Was die Verteilung der Punkte auf die Hyperbeln angeht, so liegen in diesem Falle entweder alle 4 Punkte auf demselben Zweige oder auf jedem Zweige zwei derselben. Die Richtung der gemeinsamen conjugirten Durchmesser wird gefunden, indem man irgend eine der Curven zeichnet und zu den gegenüberliegenden Seiten des von den Punkten gebildeten Vierecks parallele Tangenten zieht und diese bis zum Schnitt verlängert. Die Verbindungslinie des Schnittpunktes mit dem Mittelpunkte und die hierzu conjugirte Gerade geben die Richtung an.

Wir nehmen nun ferner an, die Lage der Punkte sei eine derartige, dass es nicht möglich ist Ellipsen durch dieselben zu legen. Es ist der Fall, den wir früher als den ersten bezeichnet haben. Es können stets drei der Punkte so zu einem Dreieck verbunden werden, dass der vierte innerhalb dieses Dreiecks zu liegen kommt. Sämtliche Kegelschnitte durch die 4 Punkte sind dann Hyperbeln, und es giebt nicht 2 unter ihnen, die demselben System von Curven mit gleicher Richtung der gemeinsamen conjugirten Durchmesser angehören. Denn wenn wir annehmen wollten, dass sich um den Mittelpunkt einer von ihnen eine ähnliche zu einer zweiten oder zur

Digitized by Google

conjugirten einer zweiten construiren liesse, welche die erste berührt, so würde man um denselben Mittelpunkt auch eine Ellipse zeichnen können, welche beide in demselben Punkte berührt. Benutzt man diese aber zur Abbildung, so würde man 2 Kegelschnitte derselben Axenrichtung erhalten, woraus folgen würde, dass die 4 Schnittpunkte im Abbilde auf einem Kreise, in Wirklichkeit also auf einer Ellipse liegen, welche der Abbildungsellipse ähnlich ist. Dies widerspricht aber der Voraussetzung.

Es verlieren damit auch die Sätze von den Tangenten parallel den Verbindungslinien der Punkte ihre Gültigkeit, es lassen sich überhaupt die Punkte nicht so anordnen, dass es möglich wäre, Tangenten parallel zu der Verbindungslinie zweier Punkte und gleichzeitig auch parallel zur Verbindungslinie der beiden andern zu ziehen.

Es liegen stets 3 Punkte auf dem einen, der vierte auf dem andern Zweige der Hyperbeln, wie für diesen Fall auch schon die Untersuchung von § 15. für die Hyperbeln ergeben hat, welche durch die Mittelpunkte der berührenden Curven eines Dreiecks gehen.

Einen tieferen Einblick in diese Verhältnisse bekommen wir, wenn wir die Betrachtung auf die Untersuchung des geometrischen Orts aller durch 4 Punkte gehenden Kegelschnitte ausdehnen. Wir setzen dabei als bekannt voraus, dass derselbe selbst wieder ein Kegelschnitt ist. Dann lässt sich in Betreff der Gestalt von vorn herein folgende Bemerkung machen: Im Falle sich durch die 4 Punkte nur Hyperbeln zeichnen lassen, muss der geometrische Ort eine im Endlichen verlaufende Curve, also eine Ellipse sein; sind auch Ellipsen durch die 4 Punkte möglich, so ist er eine Hyperbel, und zwar entsprechen dem einen Zweige derselben nur Ellipsen, dem andern nur Hyperbeln, und es muss dieser letztere Zweig durch die 3 Punkte gehen, die man als Durchschnittspunkte der Verbindungslinie von je 2 Punkten mit der Verbindungslinie der beiden andern oder mit der Verlängerung derselben erhält. Den unendlich fernen Punkten der Hyperbel entsprechen 2 Parabeln.

Der geometrische Ort muss aber nicht nur im letzteren Falle, sondern stets durch die angegebenen Schnittpunkte gehen. Es sind dieses die Stellen, an welchen die Curve in 2 sich schneidende Geraden ausartet und die Verteilung der 4 Punkte auf die einzelnen Zweige der Hyperbel sich ändert. Ausserdem giebt es in jedem Falle aber auch 6 Punkte, durch welche der geometrische Ort hindurchgehen muss, nämlich die Mitten der Verbindungslinien der

Digitized by Google

Punkte selbst. Da sich um jeden Punkt ein Kegelschnitt beschreiben lässt, der durch 3 feste Punkte geht, so kann man auch um die Mitte der Verbindungslinie zweier Punkte stets eine Curve legen, welche durch den einen Endpunkt der Verbindungslinie und durch die beiden andern Punkte hindurchgeht; diese Curve geht dann aber von selbst auch durch den andern Endpunkt. Darum müssen die Mitten der 6 Verbindungslinien auf dem geometrischen Ort liegen. Es sind also stets 9 Punkte des geometrischen Orts bestimmt.

Vereinigen wir 3 der gegebenen Punkte zu einem Dreieck, verbinden den vierten Punkt mit den Ecken dieses Dreiecks und verlängern die Verbindungslinien, bis sie die gegenüberliegenden Seiten oder die Verlängerung derselben treffen, ziehen wir ferner durch die Mitten der Seiten Parallelen zu den Verbindungslinien, welche sich in O treffen, und sehen wir diesen Punkt O an als Mittelpunkt einer dem Dreieck umbeschriebenen Curve, so sind die Verbindungslinien des vierten Punktes mit den Ecken des Dreiecks oder mit den 3 übrigen Punkten die zugehörigen conjugirten Ecktransversalen, der vierte Punkt ist der Schnittpunkt derselben, und der gesuchte geometrische Ort ist weiter nichts als die in § 10. betrachtete, durch die Mitten der Dreiecksseiten, durch die Fusspunkte der conjugirten Ecktransversalen und durch die Mitten der oberen Abschnitte gehende Curve, welche der umbeschriebenen Curve des Dreiecks ähnlich ist, dieselbe Richtung der Axen besitzt, und deren Axen gleich der Hälfte der Axen derselben sind. Den Mittelpunkt N bekommt man, indem man O mit dem Schwerpunkt S des Dreiecks verbindet und diese Linie um die Hälfte verlängert. Da aber die weitere Verlängerung durch den Schnittpunkt der Trasversalen, hier also durch den vierten Punkt hindurchgehen muss, und der Schwerpunkt die ganze Strecke von O bis zu diesem Punkte im Verhältniss von 1 : 2 teilt, so kann man den Mittelpunkt N auch finden, indem man den vierten Punkt mit O verbindet und diese Linien halbirt. Ist der Mittelpunkt des geometrischen Orts gefunden, so lässt sich nach § 18. mit Leichtigkeit auch die Richtung der Hauptaxen bestimmen.

Der Punkt N lässt sich aber noch durch eine dritte Construction finden, die sich auf die in § 10. gemachte Bemerkung stützt, dass die Verbindungslinie der Mitte jeder Dreiecksseite mit dem Mittelpunkt des oberen Abschnitts der zugehörigen Transversale durch N geht und von N halbirt wird. Wir erhalten so den Satz: Sind 4 beliebige Punkte gegeben und verbindet man die Mitte der Verbindindungslinie von je 2 Punkten mit der Mitte der Verbindungslinie der beiden andern, so treffen sich diese 3 Linien in ihrem Mittelpunkte und es ist dieser Schnittpunkt der Mittelpunkt für den geome-

Digitized by Google

trischen Ort der Mittelpunkte aller Kegelschnitte, die sich durch die gegebenen 4 Punkte legen lassen. Der geometrische Ort selbst aber geht durch die Mitten der 6 Verbindungslinien und ausserdem noch durch die 3 Punkte, in welchen die Verbindungslinie von je 2 Punkten die Verbindungslinie der beiden andern oder die Verlängerung derselben trifft.

Liegt der vierte Punkt innerhalb des Dreiecks, so liegen die Fusspunkte der Transversalen sämtlich auf den Seiten selbst, der geometrische Ort resp. die Curve der 9 Punkte ist notwendig eine Ellipse, deren einzelne Bogen nur durch solche Teile des Raumes führen, für welche nach den Erörterungen von § 9. die den Ecken des Dreiecks umbeschriebene Curve eine Hyperbel ist, auf deren einem Zweige nur eine Ecke des Dreiecks liegt, während der andere 2 Ecken und gleichzeitig den vierten Punkt enthält.

Liegt der vierte Punkt ausserhalb des Dreiecks der drei andern, so lässt sich zunächst keine Aussage in Betreff des geometrischen Ortes machen, derselbe kann ebensowol eine Ellipse als auch eine Hyperbel sein.

Es wurde bisher noch nicht davon gesprochen, dass bei vier gegebenen Punkten die Zusammenfassung von drei Punkten zu einem Dreieck auf vier verschiedene Arten möglich ist, dass der geometrische Ort also gleichzeitig Curve der 9 Punkte für 4 verschiedene Dreiecke ist. Es müssen sich also auch durch die Ecken der 4 Dreiecke 4 congruente Curven zeichnen lassen, welche dem geometrischen Orte ähnlich und mit ihm gleichgerichtet sind, und welche doppelte Länge der Axen besitzen. Die Mittelpunkte dieser 4 umbeschriebenen congruenten Curven bilden wieder ein System von Punkten, welches dem gegebenen congruent ist. Man erhält dasselbe, wenn man durch die Mitte jeder Verbindungslinie zweier Punkte zur Verbindungslinie der beiden andern eine Parallele zieht. Diese 6 Parallelen schneiden sich in den 4 Mittelpunkten der umbeschriebenen Curven. Jedem der gegebenen Punkte entspricht derjenige Punkt des Systems der Mittelpunkte, welcher zu dem Dreieck der andern 3 Punkte gehört. Die Verbindungslinien entsprechender Punkte gehen sämtlich durch den Mittelpunkt des geometrischen Orts und werden von demselbem halbirt.

Nun ist es klar, dass, wenn bei einer Zusammenfassung der gegebenen Punkte der vierte Punkt innerhalb des Dreiecks der drei andern liegt, dies bei jeder andern Zusammenfassung nicht mehr der Fall sein wird. Derselbe liegt für jedes andere Dreieck draussen und zwar innerhalb eines Scheitelwinkels. Da aber für alle 4 Drei-

Digitized by Google

ecke die Curve der 9 Punkte dieselbe ist, muss auch für eine solche Lage des vierten Punktes der geometrische Ort eine Ellipse sein, wie übrigens auch die Anschauung sogleich erkennen lässt. Auch hier passirt die Curve nur solche Teile des Raumes, für welche die umbeschriebene Curve eine Hyperbel ist, und zwar gehen diese Hyperbeln für alle Punkte des geometrischen Orts mit Ausnahme derjenigen, welche innerhalb des Scheitelwinkels liegen, mit ihrem Zweige durch 2 Ecken des Dreiecks und gleichzeitig durch den vierten Punkt, mit ihrem andern durch die dritte Ecke.

Für die Teile der Curve innerhalb des Scheitelwinkels geht der eine Zweig durch alle 3 Ecken, der andere durch den vierten Punkt allein, so dass auch hier in allen Fällen wieder 3 Punkte auf dem einen, der letzte auf dem andern Zweige liegen.

Wenn man aber bei einer Zusammenfassung der Punkte der vierte Punkt innerhalb eines Scheitelwinkels liegt, so giebt es stets eine andere Zusammenfassung, bei welcher derselbe innerhalb des Dreiecks zu liegen kommt. Wir können daher das Resultat zusammenfassend dahin aussprechen, dass der geometrische Ort eine Ellipse ist, wenn sich überhaupt 3 Punkte so zu einem Dreieck vereinigen lassen, dass der vierte Punkt innerhalb dieses Dreiecks liegt.

Ist eine solche Zusammenfassung nicht möglich, so liegt der vierte Punkt für jedes Dreieck auch ausserhalb der Scheitelwinkel. In diesem Falle ist der geometrische Ort eine Hyperbel. Der eine Zweig geht nur durch solche Teile des Raumes, für welche die umbeschriebenen Curven Ellipsen, der andere nur durch solche Teile, für welche dieselben Hyperbeln sind, und zwar liegen entweder 2 Ecken des Dreiecks auf dem einen Zweige, der dritte und der vierte Punkt auf dem andern, oder es liegen alle 4 Punkte auf demselben Zweige der Hyperbel. Der letztere Fall tritt ein für alle Punkte des geometrischen Orts, welche innerhalb der Scheitelwinkel sich befinden.

Was die Lage und Gestalt für einzelne besondere Fälle angeht, so ist leicht einzusehen, dass der geometrische Ort nur dann ein Kreis sein kann, wenn der vierte Punkt Schnittpunkt der Höhen des Dreiecks der andern ist, da nur in diesem Falle die conjugirten Richtungen senkrecht zu einander stehen. Uebrigens ist bei dieser Annahme für jede Anordnung der vierte Punkt nur auf einer Höhe des Dreiecks, so ist damit die Richtung der Hauptaxen bestimmt; dieselben laufen der betreffenden Höhe und der zugehörigen Seite des Dreiecks parallel.

Digitized by Google

Wenn der vierte Punkt mit dem Schwerpunkt des Dreiecks zusammenfällt, so berührt der geometrische Ort die Seiten in der Mitte, und der vierte Punkt selbst ist der Mittelpunkt der Curve. Dann fällt auch der Mittelpunkt der umbeschriebenen Curve mit dem Schwerpunkt zusammen. Liegt der vierte Punkt nur auf einer Mitteltransversale, so liegt auch der Mittelpunkt auf dieser Transversale und der geometrische Ort berührt die zugehörige Seite des Dreiecks in ihrem Mittelpunkte.

Berlin, im Januar 1894.

XII.

Miscellen.

1.

Zur Trisection des Winkels.

Es versteht sich wol von selbst, dass der praktische Zeichner einen Winkel dadurch einfach in drei gleiche Teile zerlegt, dass er aus dem Scheitel einen entsprechend grossen Kreisbogen schlägt und diesen zwischen den Winkelschenkeln durch Probiren dreiteilt.

Immerhin bleiben aber jene Anwendungen nicht ausgeschlossen, wo es sich um einfache Apparate handelt, durch welche die Winkeldreiteilung sehr hübsch und genau erfolgen kann.

Wir haben in einer früheren Arbeit: „Beiträge zur Geschichte, Theorie und Praxis der Zeichen-Instrumente“ [1]) zwei Constructionen erwähnt und wollen eine dritte hierher gehörige Art hier beifügen.

Die gedachten zwei Constructionen sind folgende:

Die eine Lösung, Fig. 1. ist auf den ersten Blick verständlich, die Dreiecke 1 2 3 und 2 3 4 sind gleichschenklig, der Winkel 213; oder der demselben gleiche Winkel doc ist gleich $\frac{1}{3} abc$.

Der Gebrauch des Instrumentchens ist folgender: abc sei der gegebene Winkel, von welchem der dritte Teil gewünscht wird; man verlängere den Schenkel bc in der Richtung nach o, lege das mit C bezeichnete Lineal an die Linie ba an, halte das Instrument mit einer Hand fest und bringe mit der andern Hand das Ende des

1) Vergl. Dingler's polytechn. Journ., 1855. Bd. 255. S. 188 ff.

Digitized by Google

Lineales A in die verlängerte Gerade abc, so ist od die gewünschte Richtung. Man braucht also durch b nur eine Parallele od zu ziehen, so wird diese mit bc den Winkel $\frac{1}{3}abc$ einschliessen. Der Rest des gegebenen Winkels $(abc - \frac{1}{3}abc)$ ist dann nur noch zu halbiren und die Dreiteilung ist vorgenommen.

Bei der zweiten Lösung, Fig. 2. besteht der Apparat aus einem Paare zusammengesetzter Cirkel mit vier Beinen, welche so miteinander verbunden sind, dass in jeder Stellung des Cirkels das zweite Bein den Winkel halbirt, welcher durch das erste und dritte Bein gebildet wird, während gleichzeitig das dritte Bein den Winkel halbirt, welchen das zweite und vierte Bein mit einander umschliesen; auf diese Weise wird der Winkel zwischen dem ersten und vierten Bein in drei gleiche Teile geteilt.

In Fig. 2. sind OG, OH, OJ und OK die vier Beine des Cirkels AE, CE, DF und BF sind stangenförmige Verbindungsglieder, drehbar und feststellbar in A, B, C und D, verbunden mittelst Stiften in E und F, welche in Schlitzen der Beine OH und OJ gleiten können. In den Dreiecken OAE und OCE ist

$$OA = OC, \quad AE = CE$$

und OE gemeinschaftlich; folglich ist

$$\text{Wkl. } GOH = \text{Wkl. } HOJ$$

In derselben Weise findet sich, dass

$$\text{Wkl. } HOJ = \text{Wkl. } JOK$$

ist. Es sind daher die drei Winkel einander gleich.

Man hat also beim Gebrauche des Instrumentes nur die Seiten PG und OK auf die Schenkel des gegebenen Winkels zu legen, die Punkte H und J genau zu markiren, schliesslich HO und JO zu ziehen, und die Trisection ist geschehen.

Diese Construction setzt eine Methode der Dreiteilung eines Winkels voraus, durch zwei Paare von parallelen Linealen; vergl. Fig. 3. Mache

$$OA = OD$$

und mit derselben Grösse als Radius beschreibe aus den Punkten A und D zwei Bögen. Der Punkt E auf der Linie OH wird durch den einen Bogen gefunden und der Punkt F auf der Linie OJ durch

Digitized by Google

den andern. Steche Nadeln in O, A und D, bringe die inneren Kanten des Parallelogramm-Lineales $LMNR$ gegen die Nadeln in A und O, in der gleichen Weise das Parallel-Lineal $QRST$ an die Nadeln in O und D, bewege dann die Lineale, dieselben gegen die Nadeln haltend, herum, bis LP die Linie QT auf dem einen und MN die Linie RS auf dem andern der zuerst beschriebenen Bögen schneidet, ziehe hierauf die Geraden längs QT und MN, womit der Winkel dreigeteilt sein wird.

Es ist leicht einzusehen, dass LP und RS sich auch auf der Halbirungslinie des gegebenen Winkels schneiden, eine Wahrheit, welche als gute Probe dienen kann, wenn man die Lineale in die gewünschte Stellung bringt. Ergänzt man in dieser Weise die Parallelogramme $OAEC$ und $ODFB$ der Fig. 2., so ist der Beweis derselbe.

Sehr originell ist die dritte Lösung: Man schneidet, Fig. 4. einen Apparat der hier dargestellten Form aus Carton, gross oder klein, je nach Belieben. Ueber BA (BA ist beliebig gross), ist aus O ein Halbkreis geschlagen, um dessen Radius

$$OA = OB$$

die Kante BA nach rechts verlängert ist; AS steht senkrecht zu BA.

Der ganze Apparat, nur mathematisch betrachtet, ist also aus zwei zu einander senkrechten Geraden und einem Halbkreis gebildet; der Radius des letzteren ist gleich $\frac{1}{3}$ der Länge der einen geraden Strecke.

Ist nun XSY der zu dreiteilende Winkel, so ist der Apparat folgender Massen anzulegen: Da chtsseitige Ende der gedreiteilten Strecke gleitet auf dem Schenkel SY, die in A senkrechte Gerade gleitet durch den Schenkel S, und der Kreisbogen wird zur Berührung mit dem Schenkel XY (hier in C) gebracht.

Markirt man nun die Punkte a und 0 auf dem Zeichenpapier und zieht die Schenkel SA und SO, so ist die Trisection vollzogen.

Der Beweis ist sehr einfach: Es entstehen drei gleiche Dreiecke, jedes derselben ist rechtwinklig; nämlich die beiden Dreiecke in A in Folge der Construction des Instrumentes; das dritte bei C, weil die Tangente SL auf dem Radius CO senkrecht steht; die Gleichheit der drei kleinen, so wie jene der drei grossen Katheten ist an und für sich klar; folglich sind auch die drei spitzen Winkel bei S einander gleich. —

Digitized by Google

In Gehler's mathematischem Wörterbuch ist die im Altertum schon sehr berühmte Aufgabe von der Trisection eines Winkels oder Bogens, weil die Kräfte der euklidischen Geometrie übersteigend, zuerst analytisch gelöst, und dann der Bemühungen der griechischen Geometer gedacht. Die Analysis führt nämlich auf gleichseitige Hyperbeln, welche durch ihren Schnitt den Bogen teilen.

Also übersteigt das Problem die Kräfte der Geometrie der geraden Linie und des Kreises. Auch der Parabel und Conchoide hat man sich bedient.

Dergleichen Teilungen, bemerkt Gehler übrigens ganz richtig, sind indes nie von praktischem Nutzen, sondern nur als Anwendungen der Theorie der Curven zu betrachten; unsere oben angegebenen Teilungen hingegen sind rein praktischer Natur, da bei denselben höhere Curven nicht auftreten. —

Als wir die vorstehenden Zeilen abgeschlossen hatten, fanden wir zufällig in „Grunert's Archiv der Mathematik und Physik" 2. Reihe, 12. Tl. 2. Heft 1893, S. 177 ff. eine Abhandlung des Herrn Arthur Strauss, Lehrer am Realgymnasium zu Schwelm, betitelt: „Teilung eines beliebigen Winkels in eine beliebige Anzahl gleicher Teile mit Hülfe von Modellen". Unter den Modellen scheint Hr. Strauss eine verhältnissmässig grosse Anzahl von Curvenlinealen zu verstehen und sein Apparat besteht aus zwei unserm Apparat (Fig. 4.) ähnlichen Formen, nebst zwei Federn. Die Ausführung ist also ziemlich complicirt. Hr. Strauss sagt unter Anderm: „Wir können also theoretisch mit Hülfe einer Curve $n$ter Ordnung alle Winkel von 0 bis $(2n+1)\pi$ in $(2n+1)$ gleiche Teile teilen". „Praktisch", sagt Hr. Strauss weiter, „lässt sich dies jedoch nicht durchführen, schon deswegen, weil wir die Curven nach beiden Richtungen hin nur unvollständig construiren können. Für die Ausführung der Teilung ist dieser Umstand ja auch bedeutungslos, da wir durch Zweiteilung, bzhw. wiederholte Zweiteilung, die Teilung eines grösseren Winkels stets auf diejenige eines kleineren zurückführen können und umgekehrt".

München, den 10. Mai 1894.

Ernst Fischer,
o. ö. Professor an d. königl. technischen Hochschule.

Digitized by Google

2.

Ueber eine allgemeine Eigenschaft der Curven der reciproken Ordinaten.

Wenn man statt der Curvenordinate den reciproken Wert derselben aufträgt, so erhält man eine neue krumme Linie, welche die Curve der reciproken Ordinate genannt werden soll.

Ein rechtwinkeliges Coordinatensystem vorausgesetzt, ist die Curve der reciproken Ordinate für eine Gerade eine gleichseitige Hyperbel, deren eine Asymptote die Abscissenachse ist, während die zweite durch den Schnittpunkt der letzteren mit der Geraden geht.

Beweis. Wählt man den Schnittpunkt der Geraden mit der Abscissenaxe zum Coordinatenursprung, so lautet die Gleichung der Geraden

$$y = ax$$

die reciproke Ordinate ist daher

$$y = \frac{1}{ax}$$

woraus die Asymptotengleichung der Hyperbel

$$xy = \frac{1}{a} \quad \text{folgt.}$$

Nun lässt sich leicht, ohne Differentialrechnung, synthetisch der Satz nachweisen:

> „Für dieselbe Abscisse ist die Subnormale der Curve der reciproken Ordinate gleich der entgegengesetzten Subnormale der ursprünglichen Curve".

Beweis. Wenn die gegebene Curve steigt, so fällt jene der reciproken Ordinate. Es hat daher die Subtangente der letzteren eine entgegengesetzte Lage zu jener der ersteren.

Es sei ferner P ein Punkt der ursprünglichen Curve, P' der aus ihm abgeleitete der Curve der reciproken Ordinate, Q der Endpunkt der ihnen gemeinschaftlichen Abscisse. Die Tangente der ursprünglichen Curve in P sei T, ihr Schnittpunkt mit der Abscissenachse M. Die Tangente T' an die Curve der reciproken Ordinate in P' findet man, wenn man den unendlich nahen Punkt R' zu P' der Curve mit P' verbindet. Ist N der Schnittpunkt von T' mit der Abscissenachse, so ist zu zeigen, dass

$$QN = QM \quad \text{ist.}$$

Digitized by Google

R' findet man aus dem unendlich nahen Punkte R zu P auf der ursprünglichen Curve. R liegt aber zugleich in T. Wenn man nicht nur aus R, sondern aus allen Punkten von T die entsprechenden Punkte ableitet, so erhält man nach obigem eine gleichseitige Hyperbel, die durch P' und R' hindurchgeht, die Abscissenachse zur Asymptote und M zum Mittelpunkt hat. Diese Hyperbel hat daher in P' dieselbe Tangente, wie die Curve der reciproken Ordinate.

Da aber die Hyperbeltangente durch den Berührungspunkt P, zwischen den Asymptoten halbirt wird, so findet man ihren Schnittpunkt N mit der Abscissenachse, wenn man

$$ON = QM$$

macht, wodurch der Satz bewiesen ist.

Die aus der Scheitelgleichung der Parabel abgeleitete Curve, deren Ordinate

$$\frac{1}{\sqrt{2px}}$$

ist, und deren Gleichung demnach

$$xy^2 = \frac{1}{2p} = a$$

lautet, hat eine sehr einfache Tangentenconstruction und eine bemerkenswerte Eigenschaft bezüglich der Fläche.

Der Abschnitt der Tangente auf der Ordinatenachse ist nämlich $1^1/_2$ mal so gross als die Ordinate des Berührungspunktes, und die von den Coordinatenachsen der Curve und einer Ordinate begrenzte Fläche ist doppelt so gross, als das aus den Coordinaten des Endpunktes gebildete Rechteck.

Beweis. Ist O der Coordinatenursprung, zugleich Scheitel der Parabel, so ist, obige Bezeichnungen beibehalten, QM als Subtangente der Parabel gleich

$$2\,OM = 2x$$

Da nun

$$QN = QM$$

ist, so ist

$$ON = 3x$$

Es verhält sich daher der Tangentenabschnitt auf der Ordinatenachse zur Ordinate des Berührungspunktes wie 3 : 2 w. z. b. w.

Bezeichnet man die oben genannte Fläche mit F, so ist

Digitized by Google

$$F = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{2px}} = \frac{1}{\sqrt{2p}} \cdot \frac{x^{1/2}}{1/2} = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{2p}}$$

welcher Ausdruck auch so geschrieben werden kann:

$$F = \frac{2x}{\sqrt{2px}}$$

woraus folgt

$$F = 2xy \quad \text{w. z. b. w.}$$

Wilhelm Rulf.

3.

Ueber die Potenzen der Zahlen von der Form $xn \mp 1$.

Es sei eine Reihe von Zahlen von der Form $xn \mp 1$, z. B. die Doppelreihe $6n \mp 1$ $(n = 1, 2, 3, \ldots \infty)$ gegeben. Es enthält diese Reihe die folgenden Zahlen:

5, 11, 17, 23, 29, 35, 41, 47, 53, 59, . . .
7, 13, 19, 25, 31, 37, 43, 49, 55, 61, . . .

Erhebt man diese Zahlen zur 2., 3., 4. u. s. w. Potenz, so bestehen die folgenden Congruenzen:

$5^2 \equiv +1 \pmod 6$ und $\equiv +1 \pmod{12}$. $7^2 \equiv +1 \pmod 6$ und $\equiv +1 \pmod{12}$

$5^3 \equiv -1 \pmod 6$ und $\equiv +5 \pmod{12}$. $7^3 \equiv +1 \pmod 6$ und $\equiv +7 \pmod{12}$

$5^4 \equiv +1 \pmod 6$ und $\equiv +1 \pmod{12}$. $7^4 \equiv +1 \pmod 6$ und $\equiv +1 \pmod{12}$

$5^5 \equiv -1 \pmod 6$ und $\equiv +5 \pmod{12}$. $7^5 \equiv +1 \pmod 6$ und $\equiv +7 \pmod{12}$

u. s. w. u. s. w.

Ferner:

$11^2 \equiv +1 \pmod{12}$ und $\equiv +1 \pmod{24}$. $13^2 \equiv +1 \pmod{12}$ und $\equiv +1 \pmod{24}$

Digitized by Google

$11^3 \equiv -1 \pmod{12}$ und $\equiv +11 \pmod{24}$. $13^3 \equiv +1 \pmod{12}$ und $\equiv +13 \pmod{24}$

$11^4 \equiv +1 \pmod{12}$ und $\equiv +1 \pmod{24}$. $13^4 \equiv +1 \pmod{12}$ und $\equiv +1 \pmod{24}$

$12^5 \equiv -1 \pmod{12}$ und $\equiv +11 \pmod{24}$. $13^5 \equiv +1 \pmod{12}$ und $\equiv +13 \pmod{24}$

u. s. w. u. s. w.

Allgemein ist eine Zahl von der Form $6n \mp 1$, wenn sie zu einer geraden Potenz erhoben wird, $\equiv +1 \pmod{6n}$ und $\pmod{2 \cdot 6n}$ und wenn sie zu einer ungeraden Potenz erhoben wird, $\equiv \mp 1 \pmod{6n}$ und $\equiv 6n \mp 1 \pmod{2 \cdot 6n}$. — Aehnliche Gesetze gelten allgemein für die Zahlen von der Form $xn \mp 1$.

Oldenburg im Gr.

G. Speckmann.

4.

Potenzcongruenzen.

Bildet man ein Reihensystem mit dem Modul oder der Differenz p (p eine Primzahl) in der folgenden Weise:

$$\begin{array}{llll} 1, & p+1, & . & . \\ 2, & . & . & . \\ 3, & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ p, & 2p, & . & . \end{array}$$

so sind die Anfangsglieder 1 bis $p-1$ und alle Glieder der zu diesen Anfangsgliedern gehörigen Horizontalreihen nicht durch den Modul p teilbar. Die Glieder dieser Reihen werden aber $\equiv 0 \pmod{p}$, wenn man zu denselben resp. $p-1$, $p-2$, . . . hinzuzählt, denn $1+p-1$, $2+p-2$ u. s. w. sind $\equiv 0 \pmod{p}$. Erhebt man die Glieder der Reihen 1 bis $p-1$ zu irgend welchen Potenzen, so sind auch diese Potenzen sämtlich incongruent zum Modul p. Man kann dieselben aber in leichter Weise durch Hinzunahme eines bestimmten

Digitized by Google

Zusatzgliedes $\equiv 0 \pmod{p}$ machen. In Betreff der Potenzen der Zahlen 1, 2, 3, . . . $p-1 \pmod{p}$ bestehen nämlich die folgenden Gesetze:

$$\left.\begin{array}{l} 1^2+(p-1)1 \\ 2^2+(p-2)2 \\ 3^2+(p-3)3 \\ \cdot \quad\quad \cdot \\ \cdot \quad\quad \cdot \\ (p-1)^2+(p-[p-1])(p-1) \end{array}\right\} \equiv 0 \pmod{p}$$

$$\left.\begin{array}{l} 1^3+(p-1)1^2 \\ 2^3+(p-2)2^2 \\ 3^3+(p-3)3^2 \\ \cdot \quad\quad \cdot \\ \cdot \quad\quad \cdot \\ (p-1)^3+(p-[p-1])(p-1)^2 \end{array}\right\} \equiv 0 \pmod{p}$$

u. s. w.

Allgemein gelten also die Congruenzen

$$\left.\begin{array}{l} 1^n+(p-1)1^{n-1} \\ 2^n+(p-2)2^{n-1} \\ 3^n+(p-3)3^{n-1} \\ \cdot \quad\quad \cdot \\ \cdot \quad\quad \cdot \\ (p-1)^n+(p-[p-1])(p-1)^{n-1} \end{array}\right\} \equiv 0 \pmod{p}$$

Beispiel:

Es sei $p = 7$. Die Anfangsglieder der Reihen des Systems sind $= 1, 2, 3, 4, 5$ und 6.

$1^2+6\,.\,1 = 7$	$1^3+6\,.\,1^2 = 7$	$1^4+6\,.\,1^3 = 7$
$2^2+5\,.\,2 = 14$	$2^3+5\,.\,2^2 = 28$	$2^4+5\,.\,2^3 = 56$
$3^2+4\,.\,3 = 21$	$3^3+4\,.\,3^2 = 63$	$3^4+4\,.\,3^3 = 189$
$4^2+3\,.\,4 = 28$	$4^3+3\,.\,4^2 = 112$	$4^4+3\,.\,4^3 = 448$
$5^2+2\,.\,5 = 35$	$5^3+2\,.\,5^2 = 175$	$5^4+2\,.\,5^3 = 875$
$6^2+1\,.\,6 = 42$	$6^3+1\,.\,6^2 = 252$	$6^4+1\,.\,6^3 = 1512$

$1^5+6\,.\,1^4 = 7$	$1^6+6\,.\,1^5 = 7$
$2^5+5\,.\,2^4 = 112$	$2^6+5\,.\,2^5 = 224$

Digitized by Google

$$3^5 + 4 \cdot 3^4 = 567 \qquad 3^6 + 4 \cdot 3^5 = 5068$$
$$4^5 + 3 \cdot 4^4 = 1792 \qquad 4^6 + 3 \cdot 4^5 = 7168$$
$$5^5 + 2 \cdot 5^4 = 4375 \qquad 5^6 + 2 \cdot 5^5 = 21875$$
$$6^5 + 1 \cdot 6^4 = 9072 \qquad 6^6 + 1 \cdot 6^5 = 54432$$

u. s. w.

Die entstandenen Producte sind alle $\equiv 0 \pmod{p}$.

Die Potenzen der Glieder der zu den Anfangsgliedern 1, 2. 3, . . . $(p-1)$ gehörigen Horizontalreihen werden nach Hinzunahme des bei den Potenzen von 1, 2, 3. . . . $(p-1)$ angegebenen Zusatzgliedes auch alle $\equiv 0 \pmod{p}$.

G. Speckmann.

5.

Congruenzen.

Ist x eine beliebige Zahl und sind y und z zwei Zahlen, die zusammen gleich x sind, so bestehen die folgenden Congruenzen:

$$y^{2n} - z^{2n} \equiv 0 \pmod{x}$$
$$y^{2n-1} + z^{2n-1} \equiv 0 \pmod{x}$$

Beispiele:

$$x = 23. \quad y = 16. \quad z = 7$$

$$16^2 = 256$$
$$-\ 7^2 = -49$$
$$207 \equiv 0 \pmod{23}$$

$$16^3 = 4096$$
$$+\ 7^3 = 343$$
$$4439 \equiv 0 \pmod{23}$$

Beweis. Es ist $z \equiv +z \pmod{x}$ und $y \equiv -z \pmod{x}$

$$z^{2n} - (-z)^{2n} = 0$$
$$z^{2n-1} + (-z)^{2n-1} = 0$$

G. Speckmann.

Digitized by Google

6.

Ueber ebene zusammenhangende Liniengebilde.

Vorbemerkungen.

Ein Liniengebilde heisst zusammenhangend, wenn man von jedem Punkte desselben zu jedem andern gelangen kann, ohne andere Wege als die durch die Linien des Gebildes vorgeschriebenen zu benutzen.

Ein Punkt heisst gerade, wenn in ihm eine gerade Zahl von von Linienteilen zusammenstossen, im andern Falle ungerade. Unter einer Linie kurzweg soll eine solche verstanden sein, die aus einer Geraden durch Verbiegung in einer Ebene, bei welcher nur Punkte, nie Linienteile zur Deckung gelangen, entstanden ist. Eine solche kann man immer in 1 Zuge zeichnen, d. h. so, dass dabei bereits gezeichnete Linienteile nicht mehr befahren werden.

Satz I: Verbiegt man eine Gerade in einer Ebene in beliebiger Weise derart, dass dabei nur Punkte, nie Linienteile sich decken, so kann das dadurch entstandene Liniengebilde höchstens 2 oder keinen ungeraden Punkt haben.

Bew.: Wenn gerade Punkte auf gerade Punkte fallen, so entstehen wieder gerade Punkte. Nun sind aber alle Punkte der Linie ausser ihren Endpunkten gerade. Also können bloss 2 ungerade Punkte entstehen, wenn pie Endpunkte auf gerade Punkte fallen oder frei endigen. Fallen die Endpunkte zusammen, so entsteht kein ungerader Punkt.

Da jedes zusammenhangende Liniengebilde, das sich in 1 Zuge zeichnen lässt, auf obige Weise entstanden gedacht werden kann, so folgt:

Ein Liniengebilde, dass sich in 1 Zuge zeichnen lässt, (bereits gezeichnete Linienteile dürfen dabei nicht befahren werden) hat 2 oder keinen ungeraden Punkt.

Satz II: n Linien, die in eine Ebene so gelegt werden, dass nur Punkte, nie Linienteile zur Deckung gelangen, und welche ein zusammenhangendes Liniengebilde bilden, erzeugen $2k$ ungerade Punkte, wobei k höchstens gleich n sein kann.

Bew.: Die n Linien haben zusammen $2n$ ungerade Punkte. Es können daher ungerade Punkte nur dadurch entstehen, dass diese frei endigen oder mit geraden Punkten zusammenfallen. Die höchste Zahl derselben ist folglich $2n$. Fallen 2 ungerade

Digitized by Google

Punkte zusammen, so hat man 2 weniger. Es kann also ihre Zahl bloss von der Form $2n - 2p$ sein.

Da jedes zusammenhangende Liniengebilde auf letztere Art entstanden gedacht werden kann, so folgt:

Jedes zusammenhangende Liniengebilde kann nur eine gerade Zahl ungerader Punkte haben.

Satz III: Hat ein zusammenhangendes Liniengebilde keinen ungeraden Punkt, so kann dasselbe in 1 Zuge gezeichnet werden (bereits gezeichnete Linienteile dürfen dabei nicht mehr beschrieben werden.)

Bew.: Man nimmt zuerst an, dass das Gebilde aus Linien entstanden ist, bei welchen die Endpunkte zusammenfallen. Eine solche geschlossene Linie kann man stets von einem beliebigen Punkte aus in 1 Zuge zeichnen. Wir beschreiben sie aber aber bloss bis zu einem Punkte, den sie mit einer zweiten Linie gemein hat, beschreiben dann die letztere wieder bloss bis zu einem derartigen Punkte, dann die dritte Linie etc., müssen aber dabei berücksichtigen, dass Linien, von denen Teile bereits gezeichnet sind, von solchen Punkten aus nicht gezeichnet werden. Auf solche Weise fortfahrend kommt man stets zu einem Punkte, von dem aus eine Linie ganz beschrieben werden kann, sodass man wieder zu ihm zurückkehrt. Von diesem aus wird dann die zuletzt unterbrochene Linie wieder fortgesetzt und nur an einem solchen Punkt unterbrochen, den eine ganz neue Linie mit ihr gemein hat. So fortfahrend muss man wieder zum ersten Ausgangspunkt zurückkommen. Angenommmen, die Linien sind teils geschlossen, teils offen, und betrachten wir irgend eine der letztern, dann muss der eine Endpunkt mit dem 1ten Endpunkt einer zweiten, der 2te Endpunkt dieser mit dem 1ten Endpunkt einer dritten u. s. w. zusammenfallen, schliesslich aber der 2te Endpunkt der letzten Linie wieder mit dem 1ten Endpunkt der 1ten. Diese zusammen bilden dann wieder eine einfache geschlossene Linie und alle offenen Linien zerfallen demnach in einfach geschlossene. Damit ist dieser Fall auf den vorigen zurückgeführt.

Satz IV: Um ein Liniengebilde mit $2n$ ungeraden Punkten so zu zeichnen, dass bereits beschriebene Linienteile nicht mehr befahren werden, muss man mindestens $(n-1)$ mal absetzen, d. h. ein solches kann in höchstens n Zügen gezeichnet werden.

Digitized by Google

Bew.: Ein zusammenhangendes Liniengebilde mit $2n$ ungeraden Punkten muss aus mindestens n Linien entstanden gedacht werden, weil weniger keine $2n$ ungerade Punkte liefern können.

Jede dieser Linien kann in 1 Zuge gezeichnet werden. Ist aber das Gebilde aus mehr als n Linien hervorgegangen, so müssen diese doch wieder, da dann Endpunkte aufeinander fallen, in n einfache Linien zerfallen, von denen jede in 1 Zuge gezeichnet werden kann. Wäre die Zahl der Züge $< n$, so könnte das Liniengebilde aus weniger als aus n Linien entstanden gedacht werden, was aber unmöglich ist.

Umkehrung: Lässt sich ein zusammenhangendes Liniengebilde in n Zügen und nicht weniger zeichnen, so hat dasselbe $2n$ ungerade Punkte.

Ladenburg in Baden.

O. Steinert,
Lehramtspraktikant.

7.

Dreieckssatz.

Lehrsatz: Verhalten sich die drei Seiten eines Dreiecks $a : b : c = 4 : 5 : 6$, so ist der Winkel γ, welcher der Seite c gegenüberliegt, zweimal so gross, als der Winkel α, welcher der Seite a gegenüberliegt.

Das Dreieck sei ABC, und zwar

$$a = BC; \quad b = CA; \quad c = AB$$
$$\alpha = \text{Wkl. } BAC; \quad \beta = \text{Wkl. } CBA; \quad \gamma = \text{Wkl. } ACB$$

mithin die Bedingung:

$$a : b : c = 4 : 5 : 6$$

die Behauptung:

$$\gamma = 2\alpha$$

Beweis: Die Transversale CD halbire den Winkel ABC und teile AB in

$$AD = c - x \quad \text{und} \quad BD = x$$

Dann verhalten sich die Stücke bekanntlich wie die anliegenden Dreiecksseiten, d. h. es ist

$$c - x : x = b : a$$

Digitized by Google

oder, da sich die Summen der 2 ersten und 2 letzten Proportionsglieder verhalten müssen wie die Hinterglieder:

$$c : a+b-x : a = 6 : (4+5) = 2 : 3 = a : c$$

also, angewandt auf die Figur,

$$BD : BC = BC : AB$$

Der Winkel β bei B ist den folgenden Dreiecken gemeinsam, daher ist

Dreieck CBD ähnlich ABC

weil ein Winkel gleich und die ihn einschliessenden Seiten proportionirt sind. Daraus folgt:

$$\text{Wkl. } CAB = DCB$$

oder:

$$\alpha = \tfrac{1}{2}\gamma$$

was zu beweisen war.

Anmerkung. Die Grösse der Winkel ist von Anfang an durch die Seitenverhältnisse bekannt. Demnach sind die Winkel

$$\alpha = \arccos \frac{3}{4} = 41^0\,24'\,34'',64\ldots$$

$$\beta = \arccos \frac{9}{16} = 55^0\,46'\,16'',07\ldots$$

$$\gamma = \arccos \frac{1}{8} = 2\arccos \frac{3}{4} = 82^0\,49'\,9''\,29\ldots$$

mit Lineal und Zirkel construirbar.

Dorpat. F. Specht.

8.

Herleitung der trigonometrischen Formel für die Tangente des halben Winkels aus den Seiten des Dreiecks.

Das Dreieck sei ABC, seine Seiten

$$a = BC,\quad b = CA,\quad c = AB$$

deren Gegenwinkel bzhw. α, β, γ. Als bekannt sei angenommen, dass deren Halbirende AO, AO, CO sich im Mittelpunkte O des einbeschriebenen Kreises treffen, dass die Fusspunkte D, E, F der

Digitized by Google

Lote von O auf a, b, c die Berührungspunkte dieses Kreises sind, und dass dessen Radius den Wert hat:

$$OD = OE = OF = \varrho = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$$

$$\text{wo} \quad s = \frac{1}{2}(a+b+c)$$

Sei überdies

$$m = AE = AF; \quad p = BF = BD; \quad q = CD = CE$$

Dann hat man:

$$a = p+q; \quad b = q+m; \quad c = m+p$$
$$s = m+p+q$$

woraus:

$$m = s-a; \quad p = s-b; \quad q = s-c$$

Nun ist

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\alpha = \frac{OE}{AE} = \frac{\varrho}{m};$$

also nach Einsetzung der Werte:

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\alpha = \frac{1}{s-a}\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}; \quad \text{etc.}$$

Dorpat.

F. Specht,
Oberlehrer emeritus.

Digitized by Google

XIII.

Ueber den Flächen- und Rauminhalt der durch Bewegung von Curven und Flächen erzeugten Flächen- und Raumgrössen.

Von

Chr. Nehls,

Wasserbaudirecter in Hamburg.

Einleitung.

Die vorliegende Abhandlung beschäftigt sich mit der Lösung der folgenden Aufgabe:

> „Eine begrenzte Raumcurve oder eine begrenzte beliebig „gekrümmte Fläche bewegt sich, von einer gewissen An- „fangslage ausgehend, nach einem gegebenen Gesetz, bis „zu einer bestimmten Endlage hin und beschreibt dabei „eine gesetzmässig begrenzte Fläche, bzhw. ein gesetzmässig „begrenztes Volumen; für letztere sind die Grösse der „Oberfläche, bzhw. die Grösse des Volumens zwischen An- „fangs- und Endlage der bewegten Curve oder Fläche, die „beide während des entsprechenden Teils der Bewegung „unverändert bleiben oder sich gesetzmässig ändern kön- „nen, allgemeiner zwischen zwei beliebigen Lagen derselben „zu ermitteln."

Die Lösung dieser Aufgabe im allgemeinsten Sinne ist Sache der Integralrechnung, wo sie in den Capiteln über die Complanation begrenzter Flächen und über die Kubatur begrenzter Volumina Aufnahme findet; sie ist hier in jedem einzelnen Falle in endlicher

Digitized by Google

Form oder mit Anwendung von Reihenentwicklungen möglich, sobald die Natur der in Rede stehenden Bewegung, durch welche eben die fraglichen Flächen- und Raumgrössen beschrieben werden, in vollem Umfang durch die entsprechenden Gleichungen und die Grenzen der Bewegung bestimmt ist. Auch der graphischen Behandlung, einschliesslich der Lösung der resultirenden Integrale, wird manche Aufgabe dieser Art ohne Weiteres zugänglich sein. Nichtsdestoweniger wird es im einen wie im andern Falle unter Umständen die Arbeit wesentlich erleichtern und fördern können, wenn man von den allgemeinen Beziehungen oder Gesetzen, welche auf diesem Gebiete gelten, Gebrauch machen kann. Um die Entwicklung solcher Beziehungen und Gesetze, soweit solche mir nicht anderweitig bekannt geworden sind, handelt es sich hier, und ich habe dabei namentlich die graphische Lösung der gestellten Aufgaben mit Hülfe der darstellenden Geometrie und der graphischen Integrationsmethode im Auge; selbstverständlich wird man bei diesem Verfahren die gelegentliche Benutzung erleichternder Hülfsrechnungen nicht ausschliessen wollen, im Gegenteil unter Umständen sogar eine vollständig analytische Lösung der graphischen Behandlung vorziehen. Bezüglich der letzteren verweise ich zuvor noch, insofern es sich um die Auflösung bestimmter Integrale handelt, auf die am Schlusse dieser Abhandlung benannten, früher von mir verfassten Schriften, wobei ich bemerke, dass andere Arbeiten ähnlicher Art, so weit sie mir bekannt sind, nichts wesentlich Neues mehr bieten.

1) Ueber den Amsler'schen Polar-Planimeter, und über graphisch-mechanisches Integriren im Allgemeinen. — Civil-Ingenieur, Band XX, 1874; auch als ergänzter Separat-Abdruck erschienen.

2) Graphisch-mechanische Bestimmung des aequatorialen Trägheitsmoments einer gegebenen Figur in Bezug auf eine beliebige Schwerpunktsachse derselben. — Civil-Ingenieur, Band XX, 1874.

3) Ueber graphisch-mechanisches Integriren. Civil-Ingenieur, Band XXI, 1875.

4) Ueber graphische Integration und ihre Anwendung in der graphischen Statik. 1877. Hannover, Verlag von Carl Rümpler; jetzt Dresden, Gustav Kühtmann's Verlag.

5) Graphische Bestimmung der Momente von Flächen und Bögen ebener Curven und Polygone. — Zeitschrift für Bauwesen, Jahrgang XXIX, 1879.

Digitized by Google

6) Der einfache Balken auf zwei Endstützen unter ruhender und bewegter Last. Hamburg 1885.

7) Die höhern Integralcurven und die Momente der Flächen ebener Curven. Zeitschrift für Bauwesen, Jahrgang XXXIX, 1889.

Ich verweise ausserdem noch auf zwei höchst interessante Schriften von

1) Br. Abdank-Abakanowicz: Les Intégraphes, la courbe intégrale et ses applications. Étude sur un nouveau système d'intégrateurs mécaniques. Paris, Gauthier-Villars, 1886. In deutscher Uebersetzung unter dem Titel: Die Integraphen. Die Integralcurve und ihre Anwendung von Br. Abdank-Abakanowicz. Deutsch bearbeitet von Emil Bitterli. Mit 130 Figuren im Text. Leipzig. Druck und Verlag von B. G. Teubner. 1889.

2) Alfred Amsler: Ueber den Flächeninhalt und das Volumen durch Bewegung erzeugter Curven und Flächen und über mechanische Integrationen. Schaffhausen, H. Maier, 1880.

In beschränktem Umfang wird die auf Seite 225 zur Lösung gestellte Aufgabe in den Lehrbüchern der Physik und Mechanik behandelt in der Theorie des Schwerpunkts, wo das Volumen des schief abgeschnittenen Cylinders und, mit Hülfe der Guldin'schen Regeln, Oberfläche und Volumen solcher Rotations-Flächen und Körper bestimmt werden, welche durch Drehung ebener Curven und Flächen um eine in ihrer Ebene liegende Achse erzeugt werden.

Ich führe hier deshalb zunächst die Darstellung dieses Gegenstandes an, und zwar fast wörtlich in der Behandlung, welche dieselbe findet in dem bekannten „Lehrbuch der analytischen Mechanik" von Duhamel; deutsch herausgegeben von Dr. Oscar Schlömilch. 2te Auflage. Leipzig, B. G. Teubner, 1858. Band 1, Seite 152—156.

§ 1. Volumen des schief abgeschnittenen Cylinders.

Das Volumen V eines abgestumpften — d. h. eines schief abgeschnittenen — Cylinders, dessen Grundfläche in der xy-Ebene liegt, und dessen erzeugende Geraden senkrecht auf dieser Ebene stehen, wird ausgedrückt durch

$$V = \int\int z \, . \, dx \, dy$$

Digitized by Google

dabei ist z die zu x und y gehörige dritte Coordinate eines Punktes xyz der obern Grundebene, und die Integrationsgrenzen bestimmen sich durch die Peripherie der gerad- oder krummlinig begrenzten Basis. Nennen wir φ den Neigungswinkel der oberen gegen die untere Grund- oder xy-Ebene, so ist $\frac{dx \,.\, dy}{\cos\varphi}$ das Element der obern Fläche, mithin deren Gesamtinhalt

$$= \frac{B}{\cos\varphi}$$

wenn B den Inhalt der Basis bezeichnet. Ferner wird der Abstand des Schwerpunkts der obern Fläche von den Ebenen xy bestimmt durch die Formel

$$\frac{B}{\cos\varphi} \cdot z_1 = \int\int \frac{z \,.\, dx\, dy}{\cos\varphi}$$

oder

$$Bz_1 = \int\int z \,.\, dx\, dy$$

woraus in Verbindung mit dem Vorigen folgt:

$$V = B \,.\, z_1$$

Das Volumen ist also gleich dem Product aus der Basis in die Höhe des Schwerpunkts der obern Fläche über der Basis.

Für die übrigen Coordinaten x_1 und y_1 des Schwerpunkts der obern Begrenzungsfläche hat man

$$\frac{B}{\cos\varphi} \cdot x_1 = \int\int \frac{x \,.\, dx\, dy}{\cos\varphi}$$

oder

$$B \cdot x_1 = \int\int x \,.\, dx\, dy;$$

$$\frac{B}{\cos\varphi} \cdot y_1 = \int\int \frac{y \,.\, dx\, dy}{\cos\varphi}$$

oder

$$B \,.\, y_1 = \int\int y \,.\, dx\, dy$$

Die Formeln für $B \,.\, x_1$, $B \,.\, y_1$ und $B \,.\, z_1$ sind ganz dieselben, als wenn es sich um den Schwerpunkt der Basis handelte, folglich liegen die Schwerpunkte der beiden Endflächen in einer und derselben Senkrechten auf der Basis.

Einen abgestumpften Cylinder, dessen erzeugende Gerade schief gegen beide Begrenzungsebenen gerichtet sind, kann man als den

Digitized by Google

Unterschied zweier Cylinder ansehen, welche den Normalquerschnitt zur gemeinschaftlichen Basis haben; die Differenz der beiden Perpendikel von den Schwerpunkten der beiden Endflächen des ursprünglichen Cylinders auf die gemeinsame Basis des neuen Cylinders ist nichts Anderes als die Verbindungslinie jener Schwerpunkte. Daraus folgt der Satz:

„Das Volumen eines beliebigen schief abgeschnittenen „Cylinders ist gleich dem Product aus dem Normalquer„schnitt des Körpers in die Verbindungslinie der Schwer„punkte seiner beiden ebenen Endflächen."

Man kann diesen Satz auf einen andern Ausdruck bringen, wenn man berücksichtigt, dass das Verhältniss des Normalschnitts zu einer der Endflächen gleich ist dem Cosinus des Winkels zwischen beiden Ebenen oder gleich dem Sinus des Winkels zwischen einer erzeugenden Geraden des Cylinders und jener Endfläche, und folglich gleich ist dem Verhältnisse, in welchem der Abstand des Schwerpunkts der zweiten Endfläche von der ersten zur Entfernung beider Schwerpunkte steht. Der Satz lautet nunmehr:

„Das Volumen eines beliebigen schief abgeschnittenen „Cylinders ist gleich dem Product aus der einen Begren„zungsfläche in die aus dem Schwerpunkt der zweiten Be„grenzungsfläche auf die Ebene der ersten gefällte Senk„rechte."

§ 2. Die Guldin'schen Regeln.

Sind x_0 und x die Abscissen der Endpunkte eines ebenen Curvenbogens s, so bestimmt sich die Ordinate y_1 des Schwerpunkts von s durch die Formel

$$s \cdot y_1 = \int y \cdot ds = \int_{x_0}^{x} y \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \cdot dx$$

lässt man denselben Bogen s um die x-Achse sich drehen, so beschreibt er eine Fläche, deren Inhalt F bei einer vollen Umdrehung durch die Formel

$$F = 2\pi \int y \cdot ds = 2\pi \int_{x_0}^{x} y \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \cdot dx$$

gegeben ist; aus der Vergleichung beider Formeln erhält man

Digitized by Google

$$F = 2 \cdot y_1 \pi \cdot s$$

d. h.

„Der Inhalt der Rotationsfläche, welche ein ebener „Curvenbogen bei Umdrehung um eine in seiner Ebene „liegende Achse beschreibt, ist gleich dem Product aus „der Länge des erzeugenden Bogens in die von seinem „Schwerpunkt beschriebene Kreisperipherie."

Eine ebene Fläche F werde einerseits durch zwei in den Entfernungen x_0 und x parallel zur y-Achse gelegte Gerade, andererseits durch zwei Curven begrenzt, deren zur Abscisse x gehörende Ordinaten y_0 und y heissen mögen; die Ordinate des Schwerpunkts von F ist dann durch die Formel

$$F \cdot y_1 = \tfrac{1}{2} \int_{x_0}^{x} (y^2 - y_0^2)\, dx$$

bestimmt; lässt man ferner die Fläche F um die x-Achse sich drehen, so beschreibt sie einen Körper, dessen Volumen

$$V = \pi \int_{x_0}^{x} (y^2 - y_0^2)\, dx$$

ist. Aus beiden Formeln zusammen ergiebt sich

$$V = 2y_1 \cdot \pi \cdot F$$

d. h.

„Das Volumen des Rotationskörpers, den eine ebene „Fläche bei Umdrehung um eine in ihrer Ebene liegende „Achse beschreibt, ist gleich dem Producte aus dem Inhalt „dieser Fläche in die von ihrem Schwerpunkt durchlaufene „Kreisperipherie."

Diese beiden Sätze zusammen bilden die sogen. Guldin'schen Regeln*), nach welchen man Complanationen von Umdrehungsflächen und Kubaturen von Rotationskörpern leicht ausführen kann, sobald der Schwerpunkt der erzeugenden Curve oder Fläche ohne besondere Rechnung aus einfachen geometrischen Betrachtungen zu ermitteln ist. . . . . .

---

*) Anmerkung. Paul Guldinus (1577—1643) beschreibt diese Regeln in seinem Werk: Centrobaryca seu de centro gravitatis etc. (Wien 1635), doch kommen dieselben schon bei Pappus vor, der um die Wende des 3ten und 4ten Jahrhunderts in Alexandrien lebte.

Digitized by Google

Bei einer teilweisen Umdrehung sind die beschriebenen Flächen oder Volumen proportional dem Winkel, um welche sich die erzeugende Curve oder Curvenfläche gedreht hat; daraus folgt, dass die Guldin'schen Regeln auch für teilweise Rotationen gelten, wenn man statt des ganzen Kreisumfangs nur den vom Schwerpunkt durchlaufenen Kreisbogen in Rechnung stellt.

Dreht sich eine ebene Fläche der Reihe nach um mehrere Achsen, so erhält man das erzeugte Volumen durch Multiplication des Inhaltes der bewegten Fläche mit der Summe der successiv von ihrem Schwerpunkte beschriebenen Bögen. Hierbei kommt auf den Abstand der Drehungsachsen nichts an und daher bleibt der Satz auch bei unendlich kleinen Entfernungen der Achsen noch richtig, vorausgesetzt, dass letztere immer in der Ebene der bewegten Figur bleiben; in diesem Falle können zwei aufeinander folgende Drehungsachsen ebensowol parallel sein als sich schneiden.

Ein Beispiel hierzu giebt die Bewegung einer ebenen Figur, wenn diese immer normal auf einer bestimmten Plancurve bleibt, von letzterer immer in dem nämlichen Punkte getroffen wird, und wenn alle ihre Punkte Curven beschreiben, die jener Directrix parallel liegen. Die Bewegung besteht in diesem Falle aus einer stetigen Folge unendlich kleiner Drehungen, deren Mittelpunkte die Krümmungsmittelpunkte der Leitcurve sind; auch kann man sich die Bewegung so vorstellen, als wäre die erzeugende Planfigur erst um einen Cylinder herumgelegt gewesen, dessen Basis die Evolute der Directrix ist, und würde nachher abgewickelt. Der vorigen Bemerkung zufolge behält die Guldin'sche Regel ihre Gültigkeit auch für diesen Fall.

Dasselbe findet noch allgemeiner statt, wenn man eine Planfigur so fortbewegt, dass sie von einer gegebenen Curve doppelter Krümmung in immer demselben Punkte normal geschnitten wird und wenn man zu Achsen der auf einander folgenden Drehungen die Perpendikel nimmt, welche in den Krümmungsmittelpunkten der Directrix auf den entsprechenden osculirenden Ebenen derselben errichtet sind. Denn obschon die successiven Drehungsachsen sich in diesem Falle nicht schneiden, so verschwindet doch beim Uebergange zur Grenze der entstandene Fehler, weil die Entfernung zweier Nachbarachsen eine unendlich kleine Grösse von höherer als erster Ordnung ist. Man kann die genannte Bewegung dadurch veranschaulichen, dass man sich die Planfigur erst auf die Fläche gelegt denkt, welche den geometrischen Ort der successiven Drehungsachsen bildet, und nachher die Figur ohne Gleitung abwickelt. Bei diesen auf einander folgenden Drehungen beschreibt die Planfigur ein Volumen,

Digitized by Google

welches, der Guldin'schen Regel zufolge, dem Producte aus dem Inhalte der Figur in den Weg ihres Schwerpunktes gleichkommt. Der Satz modificirt sich jedoch in dem Falle, wo die erzeugende Figur von den successiven Drehungsachsen geschnitten wird.

In dem Buche: „Des Ingenieurs Taschenbuch. Herausgegeen von dem Verein „Hütte", Auflage 13. Berlin, Verlag von Ernst & Korn, 1887", Seite 106 wird der wesentlich mit den angegebenen Wortlaut übereinstimmenden Fassung der Regeln noch die Bemerkung hinzugefügt: „vorausgesetzt, dass die erzeugende Linie — bzhw. Fläche — auf einer Seite der Achse liegt. — Diese Regeln gelten überhaupt, wenn die sich bewegende Ebene stets auf der Richtung der Bewegung senkrecht steht und die Figur auf einer Seite der Drehachse liegt." Dass die Figur auf einer Seite der Drehachse liege, ist natürlich auch bei Duhamel Voraussetzung.

Die Grenzen dieser Darstellung werden auch in den mir bekannten Werken anderer Schriftsteller höchstens nach der Richtung hin noch überschritten, dass sie auch die Oberfläche des schief abgeschnittenen Cylinders mit in Betracht ziehen. Ich werde im Folgenden zeigen, dass eine systematische Behandlung der Aufgabe zu einer erheblichen Erweiterung der Grenzen des ganzen Gebiets führt, jedoch nur in dem Falle, wo man es mit der Bestimmung des durch eine gesetzmässig bewegte Fläche beschriebenen Rauminhalts zu tun hat. Zunächst füge ich noch einige Worte hinzu in Bezug auf den schief abgeschnittenen Cylinder, welche für graphische Behandlung der betreffenden Aufgaben nicht ohne Nutzen sind.

§ 3. Ergänzung in Bezug auf Volumen und Oberfläche des schief abgeschnittenen Cylinders.

In Figur 1. stelle OA eine durch die Y-Achse gelegte Ebene dar, welche mit der XY-Ebene den Winkel δ bildet. Zwischen den Ebenen OA und XY, welche letztere hier der Gleichförmigkeit wegen mit OX bezeichnet werde, liege ein beliebiger Cylinder, auf dessen Volumen sich die folgende Betrachtung bezieht.

Die Y-Achse ist die gerade Linie, in welcher sich die Ebenen der Endflächen des Cylinders schneiden. Es sei F' die untere, F'' die obere Endfläche, P' ein Punkt in jener, P'' der entsprechende Punkt in dieser Fläche, u' der Abstand des Punktes P' von der Ebene OA, u'' der Abstand des Punktes P'' von OX. Die Coordinaten von P' seien x und y, und das an P' liegende Element der Fläche, bestimmt durch dx und dy, sei d^2F'; dann ist

Digitized by Google

1) $$d^2F' = dx\,dy$$

Multiplicirt man das mit u'', so erhält man das an dem Punkt P' stehende Volumenelement des Cylinders mit

$$dV = u'' \,.\, d^2 \,.\, F' = u'' \,.\, dx\,dy$$

und wenn man diese Gleichung integrirt in Bezug auf die ganze Fläche F', so erhält man das Volumen des Cylinders

2) $$V = \int\int u'' \,.\, d^2F' = \int\int u'' \,.\, dx\,dy$$

An dieser Gleichung ist interessant, dass sie ganz unabhängig ist von der Neigung der Seiten des Cylinders gegen die zu OY, der Durchschnittslinie der Endflächen, normale Ebenen XZ. Man kann demnach die Endflächen F' und F'' in der Richtung jener Durchschnittslinie beliebig gegen einander verschieben, ohne dass dadurch an dem Volumen des Cylinders etwas geändert wird. Ich nehme deshalb den einfachten Fall als Grundlage, wo nämlich der Cylinder parallel zur XZ-Ebene liegt; die bezügliche Untersuchung ist in diesem Falle wesentlich rein planimetrischer Art für letztere Ebene.

Für den Schwerpunkt von F' werde

$$x = x_5, \quad u' = u_5'$$

und ebenso für denjenigen von F'' werde

$$u'' = u_5''$$

es ist also u_5' der Abstand des Schwerpunktes der Fläche F' von OA, u_5'' der Abstand des Schwerpunkts der Fläche F'' von OX. Es sei ferner noch

$$\text{Wkl. } AOX = \delta, \quad \text{Wkl. } P''P'X = \alpha$$

Setzt man

$$\overline{OP''} = v$$

so folgt aus dem Dreieck $OP'P''$ nach der Sinusregel:

3) $$v = \frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha - \delta)}\, x = n \,.\, x$$

also:

$$dv = \frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha - \delta)}\, dx = n \,.\, dx$$

also:

4) $$d^2F'' = dv \,.\, dy = n \,.\, dx\,dy = n \,.\, d^2F'$$

Aus der Figur entnimmt man weiter:

Digitized by Google

5) $$\sin\delta = \frac{u'}{x} = \frac{u''}{v}$$

ebenso ist

6) $$\sin\delta = \frac{u_5'}{x_5} = \frac{u_5''}{v_5}$$

Mit Hülfe der Gleichungen 3) und 4) kann man die Gleichung 2) auf folgende Formen bringen

7) $$V = \int\int u'' \,.\, d^2F' = n\int\int u' \,.\, d^2F' - n\sin\delta \int\int x \,.\, d^2F'$$
$$= \int\int u' \,.\, d^2F'' - \frac{1}{n}\int\int u'' \,.\, d^2F''$$
$$= \frac{1}{n}\sin\delta \int\int v \,.\, d^2F''$$

Die Ausführung der Integrationen ergiebt mit Bezugnahme auf die Schwerpunkte von F' und F'', für welche die Gleichungen 6) entwickelt sind, folgende Beziehungen, in denen

$$n = \frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha-\delta)} \text{ ist:}$$

8) $$V = \int\int u'' \,.\, d^2F' = u_5'' \,.\, F' = n \,.\, u_5' \,.\, F' = n \,.\, \sin\delta \,.\, x_0 \,.\, F'$$
$$= \int\int u' \,.\, d^2F'' = u_5' \,.\, F'' = \frac{1}{n} \,.\, u_5'' \,.\, F''$$
$$= \frac{1}{n} \,.\, \sin\delta \,.\, v_5 \,.\, F''$$

Diese Gleichungen wiederholen in ihren ersten Teilen nur ein in Nr. 1 bereits entwickeltes Resultat; die folgenden Teile dagegen zeigen, dass man für die Bestimmung von V nicht des Schwerpunkts von F' oder F'', sondern nur einer Schwerpunktslinie von einer dieser beiden Flächen bedarf, die der Durchschnittslinie Y der Ebenen dieser Flächen parallel ist, und sie zeigen ferner, dass es genügt, die Lage dieser Schwerpunktslinie und die Flächengrösse für eine und dieselbe Fläche, F' oder F'', zu bestimmen, dass man demnach, wenn der Cylinder im übrigen genügend bestimmt ist, überhaupt nur eine der beiden Endflächen zu verzeichnen braucht.

Für die Oberfläche eines normalen schief abgeschnittenen Cylinders*) findet Folgendes statt:

---

*) Es handelt sich nur um die Cylinderfläche, nicht um die ebenen Endflächen.

Digitized by Google

Ist der Cylinder normal, so ist $\alpha = 90^0$. Ist s der Umfang der Basis F' in der Ebene OX, also ds ein Differential dieses Umfangs für den Punkt xy, so ist die Oberfläche bestimmt durch die Gleichung

$$O = \int u'' \, . \, ds$$

Hierin ist

$$u'' = x \cdot \operatorname{tg} \delta$$

also auch

$$O = \operatorname{tg} \delta \, . \int x \cdot ds$$

Das Integral ist das Moment des Umfangs von F' in Bezug auf die Schnittlinie der Ebenen OX und OA Ist x_s der Abstand des Schwerpunkts des Umfangs von der Schnittlinie, u_s sein Abstand von OA, so findet statt:

$$\int x \, . \, ds = x_s \, . \, s = \frac{u_s}{\operatorname{tg} \delta} \, . \, s$$

und wenn man das einsetzt in die Gleichung für O, so erhält man

$$O = \operatorname{tg} \delta \, . \, x_s \, . \, s = u_s \, . \, s$$

Die Integrale sind auf den ganzen Umfang des Normalschnitts F' zu beziehen. — Das Resultat lautet in Worten:

> „Die Oberfläche eines schief abgeschnittenen normalen „Cylinders ist gleich dem Umfang des Normalschnitts, „multiplicirt in dem Abstand des Schwerpunkts dieses „Schnittes, normal zu dessen Ebene gemessen, von der „geneigten Ebene der andern Endfläche. Zur Bestimmung „jenes Abstandes genügt die Bestimmung einer Schwerlinie „für den Umfang des Normalschnitts parallel zu der letzt-„genannten Endfläche."

Steht keine der Endflächen des Cylinders normal zu den Seiten desselben, so ist es am bequemsten, zunächst einen Normalschnitt und dann den Schwerpunkt seines Umfangs zu bestimmen. Die Oberfläche ist dann gleich dem Umfang dieses Normalschnitts, multiplicirt in die Länge einer von Endfläche zu Endfläche parallel zu den Seiten des Cylinders durch jenen Schwerpunkt gezogenen geraden Linie.

§ 4. Allgemeine Betrachtungen.

(Lage des Coordinatensystems und Richtung der positiven oder negativen Drehung. Lage, Richtung und Projection von Linien und

Digitized by Google

Flächen. Vorzeichen der durch die Bewegung von Linien und Flächen beschriebenen Flächen und Raumgrössen. Allgemeine Resultate in Bezug auf die Grösse der letzteren für parallele Verschiebungen und für Drehbewegungen. Zusammensetzung und Zerlegung von Parallel-Verschiebungen und Drehungen.)

In der analytischen Geometrie der Ebene pflegt man, wenn man mit rechtwinkligen Coordinaten arbeitet, die Achsen des Systems in der Regel so zu legen, wie Fig. 2a zeigt. Die Richtung der positiven X-Achse geht vom Anfangspunkt O aus von links nach rechts, und die Richtung der positiven Y-Achse liegt an der linken Seite eines Beobachters, der sich in O auf der Coordinaten-Ebene aufstellt und nach der Richtung der positiven X-Achse sieht. In Fig. 2b ist die Richtung der positiven Y-Achse die entgegengesetzte. Alle Drehbewegungen um den Anfangspunkt O werden entsprechend der alphabetischen Folge der Buchstaben im ersten Fall in der Richtung von rechts nach links, d. h. in der Richtung von der rechten Seite eines in O stehenden Beobachters vor demselben vorbei nach der linken Seite hin, im zweiten Fall in der Richtung von links nach rechts als rechtläufig, direct oder positiv aufgefasst; eine Drehung in entgegengesetztem Sinne ist rückläufig, indirect oder negativ. Denkt man sich ein bewegliches Coordinatensystem, welches vor der Drehung mit dem festen System zusammenfällt, so bringt die positive Drehung um O die bewegliche positive X-Achse bei einem Drehwinkel von 90^0 in die Richtung der positiven Y-Achse.

Geht man von den Coordinaten der Ebene über zu denjenigen des Raumes, so kommt zu den zwei Achsen X und Y noch eine dritte Achse Z hinzu, die im Anfangspunkt O zu den beiden andern senkrecht steht. Je nachdem man für die Achsen X und Y die Lagen Fig. 2a oder Fig. 2b wählt, kommt man dann zu den in Fig. 3a und 3b in Parallelprojection gezeichneten Axensystemen. Beide Arten des Systems werden vielfach angewendet. Auch bei Raum Coordinaten ist es, wie in der Geometrie der Ebene, gebräuchlich, den Sinn oder das Vorzeichen der Drehung, welche ein räumliches Gebilde um irgend eine der drei Achsen ausführt, durch die Buchstabenfolge der Achsen (xy, yz, zx) zu bestimmen. Man denke sich mit dem Raumgebilde ein zweites Axensystem fest verbunden, welches in der Anfangslage des Gebildes, mit dem es alle Bewegungen gemeinsam durchmacht, mit dem ersten, festen System der Achsen zusammenfällt. Dreht sich jenes Gebilde um die feste X-, bzhw. um die Y- oder Z-Achse, so ist die Drehung positiv, wenn die bewegliche positive Y-, bzhw. Z- oder X-Achse nach einer Drehung

Digitized by Google

von 90° mit der festen positiven Z-, bzhw. X- oder Y-Achse zusammenfällt. Für einen in der positiven Drehachse mit den Füssen in O stehenden Beobachter sind diese Drehungen in der Anordnung Figur 3a positiv in der Richtung von rechts nach links, umgekehrt in der Anordnung Fig. 3b.

Ich werde mich im Folgenden derjenigen Lagen der Coordinatensysteme bedienen, welche in den Figuren 2a und 3a dargestellt sind, so dass alle Drehungen als positiv oder rechtläufig gelten, wenn sie in der Richtung von rechts nach links, d. i. gegen die Richtung der Bewegung der Zeiger einer Uhr, deren Zifferblatt dem Beschauer zugewendet ist, erfolgen.

In der Geometrie des Raumes muss man überall, wo es sich um die Feststellung des Sinns oder Verzeichens von Richtungen handelt, für jede in Betracht kommende Fläche, also auch für jede der Coordinaten-Ebenen, die beiden Seiten der Fläche, bzhw. dieser Ebene unterscheiden. Wo das erforderlich, nehme ich diejenige Seite der XY-, YZ-, ZX-Ebene als die vordere, äussere oder positive an, welche der positiven Richtung der ihr zugeordneten und zu ihr normal stehenden Coordinaten-Achse, d. i. der positiven Z-, X-, Y-Achse, also auch dem Raumachtel $+x+y+z$ zugewendet ist. Hat also ein beliebiger Punkt eines Raumgebildes die Coordinaten xyz, so ist er der $\left\{\begin{matrix}\text{positiven}\\\text{negativen}\end{matrix}\right\}$ Seite der YZ-, ZX-, XY-Ebene zugewendet, je nachdem $x \gtrless 0$, $y \gtrless 0$, $z \gtrless 0$. —

In der Geometrie der Ebene hat man es nur mit einer Seite der Coordinaten-Ebene zu tun.

Eine beliebige Strecke P_1P_2 irgend einer geraden Linie projicire sich auf die Coordinaten-Achsen X, Y, Z nach $P_1'P_2'$, $P_1''P_2''$, $P_1'''P_2'''$. Ist die gegebene Strecke in der Richtung P_1P_2 als positiv zu rechnen, so ist sie in Bezug auf die X-, Y-, Z-Ache positiv oder negativ, je nachdem die eben genannten Projectionen die Richtung der positiven X-, Y-, Z-Achse oder die entgegengesetzte Richtung haben.

Eine beliebig begrenzte ebene Fläche F liege in der Ebene E, deren Gleichung angegeben sei in den Formen:

$$\left.\begin{aligned} &1)\quad ux+by+cz+d=0\\ &2)\quad \cos\lambda\,.\,x+\cos\mu\,.\,y+\cos\nu\;\;z-p=0\end{aligned}\right\} \quad (F.$$

Die letztere Form ist unter dem Namen „Normalgleichung der Ebene“ bekannt; in derselben ist p die Länge der vom Anfangspunkt auf die Ebene gezogenen Normalen, und λ, μ und ν sind die Winkel, welche diese Normale, deren Richtung durch N angedeutet werden möge, mit den positiven Achsen bildet. Die Gleichungen von N sind:

$$3) \qquad x = \frac{\cos\lambda}{\cos\nu} z, \quad y = \frac{\cos\mu}{\cos\nu} . z \qquad \text{(N.}$$

Ueber die Richtung einer auf einer Geraden, hier der Normalen N zu messenden Strecke in Bezug auf die drei Coordinaten-Achsen war schon oben die Rede. Stellt man nun fest, dass, wenn sich auf der Normalen in der positiven Richtung ein Punkt von der einen Seite der Ebene durch dieselbe hindurch bewegt, diejenige Seite der Ebene, welche für diese Bewegung die Austrittsseite ist, die positive Seite der Ebene sein soll, so liegt mit der Normalen auch die zugehörige Ebene nach Lage und Richtung vollständig fest. Voraussetzung ist hierbei natürlich, dass diese Feststellung mit den übrigen bereits getroffenen Bestimmungen nicht im Widerspruch stehe; dass solches nicht der Fall ist, wird weiter unten nachzuweisen sein.

Es möge Gleichung 1), wenn man dieselbe mit einem Factor n multiplicirt, mit Gleichung 2) gleichlautend werden, dann findet man, in Rücksicht darauf, dass stattfindet:

$$4) \qquad \cos^2\lambda + \cos^2\mu + \cos^2\nu = 1$$

die folgenden Beziehungen:

$$5) \quad \begin{cases} p = -\frac{d}{a}\cos\lambda = -\frac{d}{b}\cos\mu = -\frac{d}{c}\cos\nu = -nd \\ \qquad\qquad = -\frac{d}{\mp\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \\ \cos\lambda = \frac{a}{\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \quad \cos\mu = \frac{b}{\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \\ \cos\nu = \frac{c}{\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \end{cases}$$

Das $\pm$ vor dem Wurzelzeichen ist so zu verstehen, dass man von beiden Vorzeichen dasjenige zu wählen hat, welches bei gegebenen λ, μ und ν die letzten drei Gleichungen identisch macht; natürlich gilt für alle drei dasselbe, und in der Gleichung für p das entgegengesetzte Vorzeichen. Ist z. B $\lambda < 90^0$, so ist $\cos\lambda > 0$, und man hat für die Wurzelgrössen das obere oder das untere Vorzeichen

Digitized by Google

zu wählen, je nachdem $a > 0$ oder $a < 0$ ist. Macht man also durch Umkehrung aller Vorzeichen in Gleichung 1), wenn a negativ war) die Grösse a positiv, so hat man das obere Vorzeichen zu wählen, wenn $\lambda < 90^0$ ist.

Man erkennt leicht, dass stattfinden muss:

$$6)\quad \begin{cases} \cos(N, X) = \cos(F, YZ) = \cos\lambda = \dfrac{a}{\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \\ \cos(N, Y) = \cos(F, XZ) = \cos\mu = \dfrac{b}{\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \\ \cos(N, Z) = \cos(F, XY) = \cos\nu = \dfrac{c}{\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \end{cases}$$

$$7)\quad \begin{cases} \cos(N, YZ) = \cos(F, X) = \sin\lambda = \pm\sqrt{\dfrac{b^2+c^2}{a^2+b^2+c^2}} \\ \cos(N, XZ) = \cos(F, Y) = \sin\mu = \pm\sqrt{\dfrac{a^2+c^2}{a^2+b^2+c^2}} \\ \cos(N, XY) = \cos(F, Z) = \sin\nu = \pm\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{a^2+b^2+c^2}} \end{cases}$$

Setzt man nach einander λ, μ, ν gleich null, so fällt in gleicher Folge die Normale N der Ebene F zusammen mit der positiven X-, Y-, Z-Achse und F wird parallel der YZ-, XZ-, XY-Ebene.

Die Projection der in der Ebene F liegenden begrenzten Fläche F auf eine beliebige andere Ebene ist derjenige Teil dieser Ebene, welcher von der Projection des Umfangs der Fläche F eingeschlossen wird. Die Fläche F kann in der Ebene F auf der positiven (äussern) oder auf der negativen (innern) Seite liegen. Im ersten Fall sind in leicht verständlicher Bezeichnung die Projectionen von F auf die Coordinaten-Ebenen:

$$8)\quad \begin{cases} F_{yz} = F_x = F \cdot \cos\lambda = \dfrac{a}{\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \cdot F \\ F_{xz} = F_y = F \cdot \cos\mu = \dfrac{b}{\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \cdot F \\ F_{xy} = F_z = F \cdot \cos\nu = \dfrac{c}{\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \cdot F \end{cases}$$

In Rücksicht auf Gl. 4) folgt hieraus:

Digitized by Google

9) $$F^2 = F_{yz}^2 + F_{xz}^2 + F_{xy}^2 = F_x^2 + F_y^2 + F_z^2$$

Die Projectionen von F sind nach den Gleichungen 8) positiv, wenn die $\left\{\begin{matrix}\text{negative}\\\text{positive}\end{matrix}\right\}$ Seite von F der $\left\{\begin{matrix}\text{positiven}\\\text{negativen}\end{matrix}\right\}$ Seite der betreffenden Coordinaten-Ebene zugewendet ist, was gleichbedeutend ist damit, dass die Normale N, d. i. die Achse der Ebene F mit der Achse dieser betreffenden Coordinaten-Ebene einen Winkel bildet, der kleiner als 90^0 ist. — Umgekehrt ist es, wenn die begrenzte Fläche F auf der negativen Seite der Ebene F liegt. Denkt man sich diese Ebene durchsichtig, so erscheint dieselbe Fläche, die auf der positiven Seite $\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\\text{negativ}\end{matrix}\right\}$ ist, auf der negativen Seite $\left\{\begin{matrix}\text{negativ}\\\text{positiv}\end{matrix}\right\}$; umschreitet man die Fläche, so liegt sie auf der negativen Seite von F links, wenn sie auf der positiven Seite rechts liegt, und umgekehrt. —

Trägt man auf der Normalen N eine Strecke ab, welche nach Grösse und Richtung der begrenzten Fläche F, letzteren Wert der positiven Seite der Ebene F entnommen, gleichwertig ist, so kann diese Gerade an die Stelle der Fläche F gesetzt werden, wenn es sich um die Projection der Fläche F auf irgend eine Ebene handelt und man hierbei an die Stelle der letzteren auch ihre Normale in der vorgeschriebenen Richtung setzt.

Aus der Gleichung einer Ebene in rechtwinkligen Coordinaten ist im allgemeinen nur ihre Lage, nicht aber ihre Richtung, d. h. die Entscheidung darüber zu entnehmen, welche ihrer Seiten die positive, welche die negative ist. Denkt man sich die Ebene um eine in derselben liegende gerade Linie als Achse um 180^0 gedreht, so wechseln beide Seiten der Ebene ihr Vorzeichen, aber die Gleichung der Ebene bleibt dieselbe. Das kommt daher, dass die Gleichungen einer geraden Linie — für die Ebene kommt ihre Normale in Frage — nur die Lage, aber nicht die Richtung festlegt, wenigstens dann nicht, wenn die in derselben vorkommenden Winkelfunctionen in der üblichen Weise auf die kürzeste zahlenmässige Form gebracht sind. Geht man davon aus, dass die positive Richtung einer Geraden der Gleichungen

$$x = \frac{\cos\lambda}{\cos\alpha} \cdot z + q, \quad y = \frac{\cos\mu}{\cos\nu} \cdot z + r$$

mit den positiven Coordinaten-Achsen die Winkel λ, μ und ν bildet, so bildet die positive Richtung der Geraden

$$x = \frac{\cos(180^0+\lambda)}{\cos(180^0+\nu)} \cdot z + q, \quad y = \frac{\cos(180^0+\mu)}{\cos(180^0+\nu)} \cdot z + r$$

Digitized by Google

mit den Achsen die Winkel $180^0+\lambda$, $180^0+\mu$ und $180^0+\nu$, d. h. sie ist der Richtung der ersten Geraden genau entgegengesetzt, erscheint also um einen ihrer Punkte um 180^0 in einer beliebigen Ebene gedreht. Trotzdem sind beide Paar Gleichungen zahlenmässig gleichlautend, denn es ist

$$\frac{\cos(180^0+\lambda)}{\cos(180^0+\nu)} = \frac{\cos\lambda}{\cos\nu}, \quad \frac{\cos(180^0+\mu)}{\cos(180^0+\nu)} = \frac{\cos\mu}{\cos\nu}$$

d. h. beide Gleichungen legen dieselbe Lage der Geraden fest, aber ihre Richtung bleibt dabei unbestimmt.

Dieselbe Unbestimmtheit liegt in der Gleichung der Ebene, denn die Gleichung

$$\cos\lambda \,.\, x+\cos\mu \,.\, y+\cos\nu \,.\, z-p=0$$

entspricht einer andern Ebene, als die Gleichung

$$\cos(180^0+\lambda)x+\cos(180^0+\mu)y+\cos(180^0+\nu)z-p=0$$

für beide ist die Lage der Normalen dieselbe, die Richtung der letzteren aber entgegengesetzt. Aus letzterem Grunde kehren beide Ebenen einander ihre negativen Seiten zu, und setzt man $p=0$, so werden trotzdem die Gleichungen beider

$$\cos\lambda \,.\, x+\cos\mu \,.\, y+\cos\nu \,.\, z=0$$

obwol sie nur der Lage, nicht der Richtung nach sich decken. Das ist natürlich auch dann noch zutreffend, wenn man beide Ebenen jetzt parallel zu der Richtung $p(\lambda, \mu, \nu)$ um die Strecke p verschiebt, wo dann beide der Gleichung

$$\cos\lambda \,.\, x+\cos\mu \,.\, y+\cos\nu \,.\, z-p=0$$

entsprechen.

Diese Unbestimmtheiten in den Formeln haften der Geometrie mit Parallelcoordinaten naturgemäss an, und sie müssen nötigenfalls durch anderweitige Bestimmung der Richtungen beseitigt werden. Analytisch lassen sie sich am bequemsten vermeiden, wenn man die geometrische Bedeutung der imaginären und überimaginären Zahlen heranzieht und mit ihrer Hülfe unverkürzte Richtungscoefficienten einführt. Ich will indessen, um allgemeiner verständlich zu bleiben, diese Hülfsmittel nicht benutzen, sondern mich auf die gewöhnlichen Mittel der analytischen Geometrie der Ebenen und des Raumes beschränken.

Bewegt sich eine gerade Linie

$$L = \overline{ab}$$

Digitized by Google

parallel zu sich selbst nach einer Richtung s um eine Strekee s, so ziehe man (Fig. 4) durch einen beliebigen Punkt von ab eine Gerade, nach Grösse und Richtung gleich s und parallel zu s. Dann erkennt man, dass die von L beschriebene Fläche absolut gleich

$$L \,.\, s \,.\, \cos\varepsilon = L(s\cos\varepsilon) = (L\cos\varepsilon)s$$

ist. In der vorletzten Form ist $s\cos\varepsilon$ die Projection von s auf die Normale zu L, in der letzten Form $L\cos\varepsilon$ die Projection von L auf die Normale zu s. Die Pfeile in der Figur sollen die positiven Richtungen von L und s andeuten; dann gilt Folgendes:

Bewegt sich $+L = ab$ in der Richtung $+s$, so ist die beschriebene Fläche positiv,

bewegt sich $-L = ba$ in der Richung $+s$, so ist die beschriebene Fläche negativ,

bewegt sich $+L = ab$ in der Richtung $-s$, so ist die beschriebene Fläche negativ,

bewegt sich $-L = ba$ in der Richtung $-s$, so ist die beschriebene Fläche positiv.

Demnach ergeben gleiche Vorzeichen für L und s für die beschriebene Fläche das Vorzeichen plus, ungleiche das Vorzeichen minus. — Diese Resultate gelten bei rein fortschreitender Bewegung von L, ohne Drehung, für endliche Werte von L und s. Daraus folgt, dass sie auch für unendlich kleine Werte dieser Grössen gelten. Das ist auch dann noch der Fall, wenn L, jetzt dL, aus seiner Anfangslage in die Endlage nicht durch rein fortschreitende, sondern durch Drehbewegung um eine beliebige zu dL und s, jetzt ds normale Achse übergeht.

Ganz ähnliche Resultate erhält man für das beschriebene Volumen, wenn man sich im Vorstehenden statt der bewegten geraden Linie L, bzhw. dL eine begrenzte Fläche F. bzhw. d^2F denkt. Die Fläche F ist hierbei auf der positiven Seite ihrer Ebene F liegnd zu denken, so dass s positiv oder negativ ist, wenn seine Projection auf die Normale dieser Seite von F mit der Normalen gleiche oder entgegengesetzte Richtung hat. Tritt d^2F an die Stelle von F, so gelten die Resultate für eine unendlich kleine Rewegung von d^2F auch dann, wenn dieselbe eine Drehbewegung um eine beliebige Achse ist.

Es ist nun zu untersuchen, welche Fläche dF eine gerade Linie L, und welches Volumen dV eine Fläche F beschreibt, wenn beide sich um irgend eine Achse um einen unendlich kleinen Winkel δ drehen, und im ersten Falle L, im zweiten Falle F eine endliche

Digitized by Google

Grösse ist. Für den Augenblick kommt es indessen nur auf die Ableitung eines allgemeinen Satzes an, welcher später weiter zu verwerten ist. Dabei sollen L und F als positiv angenommen werden.

Es drehe sich also die positive ebene Fläche F um die Z-Achse um einen unendlich kleinen Winkel δ, und um das Resultat gleich etwas allgemeiner zu gestalten, werde angenommen, dass gleichzeitig mit dieser Drehung eine unendlich kleine Parallelverschiebung σ nach der Richtung der positiven Z-Achse stattfinde. Es sei

$$1) \qquad \cos\lambda \,.\, x + \cos\mu \,.\, y + \cos\nu \,.\, z - p = 0 \qquad (F$$

die Gleichung der Ebenen F, in der die Fläche F liegt, und x_1, y_1, z_1 seien die Coordinaten eines Punktes P_1, an dem das Flächenelement d^2F liegt. Durch die Drehung δ und die Verschiebung σ gehen diese Werte über in x_2, y_2, z_2, und es ist

$$2) \qquad \begin{cases} x_2 = x_1 \cos\delta - y_1 \sin\delta = x_1 - y_1 \,.\, \delta \\ y_2 = y_1 \cos\delta + x_1 \,.\, \sin\delta = y_1 + x_1 \,.\, \delta \\ z_2 = z_1 + \sigma \end{cases}$$

Bezeichnet man P_1 in seiner neuen Lage mit P_2, so ist der Abstand dieses Punktes P_2 von der Ebene F, welcher mit ds_1 bezeichnet werden möge — nach Fig. 4. entspricht das dem Ausdruck $s \,.\, \cos\varepsilon$, bzhw. $ds \,.\, \cos\varepsilon$ — nach der analytischen Geometrie

$$3) \qquad ds_1 = \cos\lambda \,.\, x_2 + \cos\mu \,.\, y_2 + \cos\nu \,.\, z_2 - p$$

Subtrahirt man hiervon Gleichung 1) für den Punkt P_1, so ist in Rücksicht auf 2)

$$4) \qquad ds_1 = (-\cos\lambda \,.\, y_1 + \cos\mu \,.\, x_1)\,\delta + \cos\nu \,.\, \sigma$$

Wird dieser Ausdruck multiplicirt mit d^2F, so erhält man für das von d^2F beschriebene Volumen, welches man als einen nach allen drei Dimensionen unendlich kleinen schiefen Cylinder betrachten kann:

$$5) \quad d^3V = (-\cos\lambda \,.\, y_1 \,.\, d^2F + \cos\mu \,.\, x_1\, d^2F)\,\delta + \cos\nu \,.\, d^2F \,.\, \sigma$$

Lässt man nun bei x_1 und y_1 den Index weg und bezieht die Integrale auf die ganze Fläche F, so erhält man für das von ihr beschriebene Volumen

$$6) \quad dV = (-\cos\lambda \int\int y \,.\, d^2F + \cos\mu \int\int x \,.\, d^2F)\,\delta + \cos\nu \,.\, \sigma \int\int d^2F$$

Digitized by Google

Wenn x_s, y_s, und z_s die Coordinaten des Schwerpunkts von F sind, so ist

$$7) \quad x_s \,.\, F = \int\int x \,.\, d^2F, \quad y_s \,.\, F = \int\int y \,.\, d^2F$$

Diese Gleichungen verwandeln Gl. 6) in:

$$8) \quad dV = ((-\cos\lambda \,.\, y_s + \cos\mu \,.\, x_s)\delta + \cos\nu \,.\, \sigma)F$$

Vergleicht man den eingeklammerten Ausdruck rechts mit der rechten Seite der Gleichung 4), so erkennt man ohne weiteres, dass derselbe der Wert von ds, für den Schwerpunkt der Fläche F ist. Bezeichnet man diesen Wert mit ds_s, so erhält man das interessante Resultat:

$$9) \quad dV = F \,.\, ds_s$$

Dasselbe lautet in Worten, da die Ebene F gegen die als Drehachse angenommene Z-Achse jede beliebige Lage haben kann, allgemein etwa so:

„Dreht sich eine ebene Fläche F von endlicher Grösse „um eine beliebige Achse um einen unendlich kleinen „Winkel δ unter gleichzeitiger Verschiebung nach der Rich- „tung der Achse um eine unendlich kleine Strecke σ, wobei „ δ sowol wie auch σ positiv, null und negativ sein kön- „nen, so ist das von F beschriebene Volumen gleich der „Fläche F, multiplicirt mit dem Abstand ds des Schwer- „punkts von F in der Endlage von der Ebene der An- „fangslage; dabei sind F und der Abstand ds beide mit „ihrem Vorzeichen einzuführen.“

„Das beschriebene Volume.nerscheint demnach als ein an „beiden Enden schief abgeschnittener Cylinder und ist als „solcher zu berechnen.“

Setzt man in Gleichung 1) den Winkel $\nu = 90^0$, so geht in Rücksicht darauf, dass

$$\cos^2\lambda + \cos^2\mu + \cos^2\nu = 1$$

ist, dieselbe über in

$$10) \quad \cos\lambda \,.\, x + \sin\lambda \,.\, y - p = 0$$

Das ist die Gleichung einer zu der Achse Z parallelen, also zu der Ebene XY normalen Ebene, aber gleichzeitig die Gleichung einer in der XY-Ebene liegenden geraden Linie. Ist L eine bestimmte Strecke dieser Linie, so gilt für die bei einer Drehung um die Z Achse von

Digitized by Google

dieser Strecke in der Ebene XY beschriebene Fläche den Zahlenverhältnissen nach genau dasselbe, was aus dem obigen Satze resultirt für das beschriebene Volumen, wenn man L in der Ebene F der Gleichung 10) betrachtet als die Grundlinie eines Rechtecks F von der Höhe eins. Daraus folgt:

„Dreht sich eine gerade Linie L um einen, in einer „durch L gelegten Ebene liegenden Punkt, in dieser Ebene „(d. i. um eine zu der Ebene normale Achse) um einen „unendlich kleinen Winkel δ, so ist die von L beschrie„bene Fläche gleich der Strecke L, multiplicirt mit dem „Abstand ds_s der Mitte oder des Schwerpunkts der Strecke „L in der Endlage von der Anfangslage; dabei sind L „und ds_s beide mit ihrem Vorzeichen einzuführen. Die „beschriebene Fläche ist also wie ein Paralleltrapez zu „behandeln."

Diese Resultate sind unabhängig von der in den Formeln 1) und 11) enthaltenen Grösse p, dem Abstand der Ebene, bzhw. der geraden Linie vom Anfangspunkt; derselbe darf demnach auch null sein, ohne dass unter übrigens gleichen Umständen an dem Resultat etwas geändert wird. So lange die Ebene die Drehachse schneidet, ist das ohne weiteres einleuchtend: nicht so augenfällig ist es, wenn die rotirende Ebene zur Drehachse parallel, bzhw. die rotirende Gerade zu derselben normal ist. Ich komme auf diesen Punkt weiter unten noch zurück.

Man kann eine der obigen Rechnung entsprechende auch für den Fall durchführen, wo sich eine beliebige gerade Linie um die zu ihr windschiefe Z-Achse dreht; das Resultat fällt hier indessen nicht einfach aus, und ich lasse daher jene Rechnung vorläufig auf sich beruhen.

Die Sätze, die für die von einer bewegten Curve erzeugten Fläche abgeleitet worden sind, lassen sich im Zusammenhang etwa so aussprechen, wobei zu beachten ist, dass an die Stelle der Curve auch ein Polygon treten kann.

1) Bewegt sich eine offene ebene Curve ALB irgendwie aus einer Anfangslage L in eine Endlage L_1, deren Ebene der Ebene der Anfangslage L parallel ist, ohne dass im übrigen die Lage von L_1 gegen L beschränktenden Bedingungen unterliegt, so ist eine Parallel-Projection der von L beschriebenen Fläche auf irgend eine Ebene algebraisch gleich der entsprechenden Projection der-

Digitized by Google

jenigen Fläche, die bei derselben Bewegung der Curve L eine Schlusslinie AB erzeugen würde, die mit L in derselben Ebene liegt, im übrigen aber beliebig gekrümmt ist. Ist die Curve L von vornherein geschlossen, so ist die vorhin bezeichnete Projection der von ihr beschriebenen Fläche algebraisch gleich null. — Bewegt sich die Curve L nur in ihrer eigenen Ebene, so gilt das soeben von der Projection der von ihr beschriebenen Fläche Gesagte auch von dieser Fläche selbst.

Ist L ein Polygon, dessen Endlage L_1 die Anfangslage L deckt, so kommen bei einer Bewegung in der Ebene von L nur die von den einzelnen Eckpunkten des Polygons umschriebenen Flächen in Frage.

II) Bewegt sich eine offene Raumcurve L — in obiger Figur ALB, — irgendwie aus einer Anfangslage L in eine solche Endlage L_1, dass dieselben Elemente der Curve in beiden Lagen parallel sind, so ist irgend eine Parallelprojection der von L beschriebenen Fläche auf irgend eine Ebene algebraisch gleich der entsprechenden Projection derjenigen Fläche, die bei derselben Bewegung der Curve L eine Schlusslinie AB beschreibt, die beliebig gekrümmt sein kann, wenn ALB wenigstens drei nicht in einer Geraden liegende Punkte besitzt. Ist die Curve L von vornherein geschlossen, so ist die vorhin bezeichnete Projection der von ihr beschriebenen Fläche algebraisch gleich null.

Die Projection einer Curve oder eines Polygons auf irgend eine gerade Linie ist nach Grösse und Richtung gleich der Projection des Abstandes ihres Endpunkts von ihrem Anfangspunkt, d. i. gleich der Projection ihrer Schlusslinie. Alle etwa ausserhalb dieser resultirenden Strecke fallenden Strecken der ganzen Projection kommen ebenso oft positiv wie negativ vor. Für eine geschlossene Curve oder für ein geschlossenes Polygon fallen Anfangs- und Endpunkt zusammen; ihre Projection auf eine beliebige Gerade ist stets gleich null.

Ein Polyeder wird begrenzt durch eine endliche Anzahl ebener Flächen von endlicher Grösse. Eine stetig gekrümmte Fläche kann man als aus einer unendlich grossen Anzahl unendlich kleiner ebener Flächen zusammengesetzt sich vorstellen. Was in Bezug auf die Projection einer gekrümmten Fläche allgemein gilt, gilt auch für das Polyeder. Bei beiden muss man, ebenso wie bei den Ebenen (vergl. Seite 236 und 237) unterscheiden zwischen einer positiven Aussenseite und einer negativen Innenseite. — Unter der Projection eines ebenen oder gekrümmten Flächenstücks auf eine

Digitized by Google

Ebene versteht man den Teil dieser Ebene, welcher von der Projection des Umfanges oder Randes des projicirten Flächenstückeingeschlossen wird. Denken wir uns ein Flächenstück in eine beliebige Anzahl Teile zerlegt, so machen die für irgend eine Ebene genommenen Projectionen der Teile die Projection des ganzen Flächenstücks aus. Dabei sind die Projectionsflächen der Teile als positiv oder negativ anzusehen, je nachdem ihre Aussenseite der positiven oder Vorderseite ab- oder zugewendet ist. Ist die projicirte Fläche oder ein Teil derselben eine zur Projectionsebene winkelrechte Ebene, so ist die Projection natürlich gleich null. Zwei beliebige Schalen mit gemeinschaftlichem Rande haben für jede beliebige Ebene gleiche Projectionen. Die Projection einer geschlossenen Oberfläche ist, da der Rand selbst nicht vorhanden, also gleich null ist, für jede Projectionsebene ebenfalls null. Gleiche Flächenstücke, die in einer und derselben Ebene oder in parallelen Ebenen liegen, haben, bei beliebiger Form, für irgend eine Projectionsebene gleiche Projectionen. Dasselbe gilt für beliebige Flächen, deren Ränder congruente, parallel gegen einander verschobene Raumcurven sind.

Bewegt sich ein beliebiges Raumgebilde rein fortschreitend nach der Richtung einer festen geraden Linie, oder dreht sich dasselbe um eine feste Achse, so bewegen sich alle feste Punkte des Gebildes in Ebenen, die unter einander parallel sind. Diese Art von Bewegung giebt zu folgender allgemeinen Betrachtung Anlass.

Die Lage und Bewegung irgend eines Gebildes wird bestimmt durch die Lage und Bewegung von drei mit demselben fest verbundenen Punkten, welche ein Dreieck bilden. Erfolgt die Bewegung parallel zu einer gegebenen Ebene, so genügen statt jener drei Punkte deren zwei, welche eine mit dem Gebilde fest verbundene Linie parallel zu der Ebene festlegen. Zunächst ist also die Bewegung einer geraden Linie in einer durch sie gelegten Ebene zu betrachten.

Es sei in Fig. 5 die Linie ab in ihrer Anfangslage ab und in ihrer Endlage $a_1 b_1$ gezeichnet; die Curven aa_1 und bb_1 seien die von den Endpunkten während der Bewegung durchlaufenen Bahnen. Lässt man alle Zwischenlagen ausser Acht, so kann ab nach $a_1 b_1$ gebracht werden durch einfache Verschiebung, wenn $a_1 b_1$ parallel zu ab ist. Ist das nicht der Fall, so kann man unter allen Umständen ab nach $a_1 b_1$ bringen durch Drehung um einen festen Punkt O, den Durchschnittspunkt der geraden Linien cO und dO, welche bzhw. auf den Mitten der Sehnen aa_1 und bb_1 senkrecht stehen.

Digitized by Google

Das gilt beides für eine endliche Bewegung; jedoch nur dann, wenn letztere unendlich klein ist, deckt die auf diese Weise beschaffte Ueberführung von ab nach a_1b_1 auch die wirkliche Bewegung; im Falle der Drehbewegung wird dann O zum augenblicklichen Drehpunkt und Or und Od stehen bzhw. senkrecht auf den Berührungslinien an die Bahnen aa_1 und bb_1 für die Punkte a und b. Sind diese Berührungslinien parallel, so liegt O auf ihren Normalen in unendlicher Entfernung, d. h. aus der Drehung wird eine einfache Verschiebung.

Als Resultirende einer offenen Curve wurde oben bereits die Schlusslinie derselben erkannt, wenn es sich um die Projection der Curve auf irgend eine gerade Linie handelt. Ist die Curve eine ebene Curve, welche sich in ihrer Ebene fortbewegt, so erkennt man, wenn man an die Stelle der Curve zunächst ein Polygon mit endlicher Seitenzahl setzt, dass auch in Bezug auf die Grösse der beschriebenen Fläche irgend eine Anzahl Seiten durch die Schlusslinie ihrer Endpunkte, demnach auch das ganze Polygon durch seine Schlusslinie, und schliesslich auch die stetige Curve durch die ihr zugehörige Schlusslinie vertreten werden kann. Das liefert den Satz:

> „Bewegt sich eine offene ebene Curve in ihrer Ebene, so „ist die von derselben beschriebene Fläche algebraisch, „d. h. nach Grösse und Vorzeichen gleich der von ihrer „Schlusslinie beschriebenen Fläche, für die ausser der „Grösse ebenfalls das Vorzeichen in Frage kommt."

Ist die endliche Bewegung der Curve eine rein fortschreitende Bewegung, so kann vorstehender Satz einfach so bewiesen werden. (Fig. 6).

Ist ab die Anfangs-, a_1b_1 die Endlage der Curve, also $\overline{ab}\,\overline{b_1a_1}$ die von ihr beschriebene Fläche, so ist ersichtlich diese Fläche auch gleich dem Parallelogramm $\overline{ab}\,\overline{b_1a_1}$, welches entsteht, wenn man das über ab liegende Flächensegment hier wegnimmt und bei a_1b_1 wieder ansetzt, und welches von der Schlusslinie ab beschrieben angesehen werden kann. Setzt man statt der letzteren die gebrochene Linie acb, so beschreibt das Stück ac bei der Bwegung nach der Richtung aa_1 keine Fläche, sondern nur cb, und darum muss die ganze von der Curve beschriebene Fläche auch gleich der von dem Normalschnitt cb beschriebenen Fläche $cb\,b_1c_1$ sein. Im ganzen ist die Grösse derselben proportional den Längen ab, cb und aa_1. Liegen einzelne Teile der Curve ab ausserhalb der Linien aa_1 und bb_1, oder hat dieselbe zwischen ab Rückkehrpunkte, Schlingen und dergl.,

Digitized by Google

so wird das Resultat dadurch nicht beeinflusst, da die Wirkungen der betr. Teile sich mit plus und minus so weit aufheben, dass nur eine einmalige Beschreibung der Fläche zwischen aa_1 und bb_1 übrig bleibt.

In ganz ähnlicher Weise kann man die Drehbewegung der Curve ab um einen festen Punkt O betrachten, wie Fig. 7, die nun ohne weiteres verständlich sein wird, zeigt. An die Stelle der Curve ab kann man, wenn es sich um die von ihr für einen Drehwinkel δ beschriebene Fläche handelt, die Schlusslinie ab, oder auch den Normalschnitt cb setzen, und die beschriebene Fläche ist proportional der Länge ab und cb, sowie auch der Grösse des Winkels δ in Teilen des Halbmessers. — Hieran sind nachfolgende Bemerkungen zu knüpfen.

Die von der Curve beschriebene Fläche F ist in dreierlei Weise zu ersetzen:

1) F, beschrieben von cb, ist, wenn man

$$\overline{Ob} = r_2, \quad \overline{Oa} = r_1$$

setzt, bestimmt durch

$$F = \frac{r_2^2 - r_1^2}{2} \cdot \delta$$

2) Wird cb vertreten durch cab, so beschreibt ca keine Fläche, sondern nur $\overline{ab}$, und es muss sich also auch durch directe Rechnung bestätigen lassen, dass, wenn sich ab um O dreht, die beschriebene Fläche den vorstehend angeführten Wert haben muss. Dass das der Fall ist, ergiebt sich ohne weiteres aus der Congruenz der Dreiecke abc und $a_1b_1c_1$.

3) Zieht man OO_1 normal zu ab, und denkt man die Gerade ab um einen Winkel δ um O_1 gedreht, so wird auch dabei eine Flächengrösse gleich F beschrieben. Man findet für dieselbe zunächst

$$\frac{\overline{O_1b}^2}{2} \cdot \delta - \frac{\overline{O_1a}^2}{2}\delta, \text{ worin}$$

$$\overline{O_1b}^2 = r_2^2 - \overline{OO_1}^2 \quad \text{und} \quad \overline{O_1a}^2 = r_1^2 - \overline{OO_1}^2$$

werden diese Werte eingesetzt, so bleibt in der Tat

$$\frac{r_2^2 - r_1^2}{2} \cdot \delta$$

In Fig. 8 sind diese dreierlei Werte für F durch die drei schraffirten Flächen I, II und III dargestellt, und es ist nicht

Digitized by Google

schwer zu übersehen, dass die Gleichwertigkeit von II und III genau dem entspricht, was auf Seite 244 über das dort gefundene Resultat bezüglich der Unabhängigkeit desselben von der Grösse des Wertes p in der Gleichung 10) auf Seite 244 gesagt wurde. Fasst man diese Gleichung auf als die Gleichung einer zur XY-Ebene normalen Ebene F, welche sich um die Z-Achse dreht, und denkt man sich in dieser Ebene F eine beliebige Fläche abgegrenzt, so findet die Gleichwertigkeit von II und III für jede in F parallel zur XY-Ebene gezogene Sehne statt, wobei II direct mit F und III mit einer zu F parallelen, durch die Drehachse gelegten Ebene mit $p = 0$ correspondirt. Aus diesem Zusammenhang gelangt man durch einige weitere nahe liegende Schlüsse dann zu folgender Erweiterung der einfachen Guldin'schen Regel auf Seite 229:

> „Eine beliebige ebene Fläche F beschreibt bei einer „Drehung um eine zu ihrer Ebene parallele Achse ein „genau ebenso grosses Volumen, wie ihre Projection auf „eine, parallel zu der Ebene von F und durch die Dreh„achse gelegte Ebene, bei gleichem Drehwinkel. Nach dem „Seite 244 angeführten Satze darf zu der Drehung auch „noch eine Verschiebung der rotirenden Fläche in ihrer „Ebene parallel zur Drehachse hinzutreten, gleichviel ob „dieselbe gleichförmig ist oder nicht, wobei dann statt des „Wegs des Schwerpunkts der Fläche seine Projection auf „eine zur Drehachse normale Ebene zu nehmen, d. h also, „die auf die Volumengrösse einflusslose Verschiebung über„haupt als nicht vorhanden zu betrachten ist."

In Figur 8 entspricht diesem Satze, auf den ich später noch zurückkommen werde, für irgend einen Schnitt durch den Rotationskörper rechtwinklig zur Drehachse die Flächengleichheit der Schnittflächen II und IIIa.

Nach Seite 246 ist die von einer offenen ebenen Curve bei einer Bewegung derselben in ihrer Ebene beschriebene Fläche algebraisch gleichwertig mit der Fläche, welche die Schlusslinie der Curve beschreibt. Daraus folgt nun, dass, wenn die Schlusslinie selbst gleich null, also die Curve eine geschlossene ist, dann auch die von letzterer bei ihrer Bewegung beschriebene Fläche stets gleich null, d. h. also, dass algebraisch die positiv bestrichenen Flächen von den negativ bestrichenen Flächen aufgehoben werden, gleichviel auf welchen Bahnen die einzelnen Punkte der Curve aus der Anfangslage in die Endlage, die auch mit jener zusammenfallen kann, übergehen. Aus diesem Ergebniss lassen sich für besondere Fälle noch mancherlei interessante Schlüsse ziehen (vergl. hierüber

Digitized by Google

auch die auf Seite 226 unter 1) und auf Seite 227 unter 2) genannten Abhandlungen); ich beschränke die Anwendung hier auf die folgenden Bemerkungen.

Es trete an die Stelle der geschlossenen ebenen Curve, von der vorstehend die Rede ist, ein geschlossenes ebenes Polygon $a \ldots f$ (Fig. 9). Rückt dasselbe in gradlinig fortschreitender Bewegung aus der Anfangslage $a \ldots f$ in die Endlage $a_1 \ldots f_1$, so sind die geraden Linien aa_1, $bb_1 \ldots ff_1$ die Bahnen der Eckpunkte. Die einzelnen Seiten des Polygons beschreiben bei der Bewegung die Parallelogramme abb_1a_1, $bcc_1b_1 \ldots eff_1e_1$, faa_1f_1. Umgeht man dieselben in der Reihenfolge dieser Buchstaben, so tritt der Unterschied in den Vorzeichen der einzelnen Flächen hervor, je nachdem dieselben bei dem Umgehen rechts oder links liegen. Mit den so ermittelten Vorzeichen sind die Flächen beim Zusammenzählen in Ansatz zu bringen; sie ergeben dann für jede beliebige Form des Polygons und für jede Richtung und Länge der Bahnen seiner Eckpunkte algebraisch die Summe null.

Giebt man irgend einem der Parallelogramme das seinem eigentümlichen Vorzeichen entgegengesetzte, so ist dasselbe gleich der algebraischen Summe aller übrigen, demnach ihre Resultirende.

Anmerkung. Es ist sehr leicht, aus diesen Betrachtungen eine Construction abzuleiten für die Lösung der Aufgabe, ein Parallelogramm (auch ein Rechteck, wenn man will, von gegebener Grundlinie) zu zeichnen, das so gross ist, wie die Summe einer beliebigen Anzahl beliebiger Parallelogramme. Reducirt man das Polygon $ab \ldots f$ auf ein Dreieck abc, so ergiebt sich unmittelbar der Lehrsatz des Pappus, und macht man das Dreieck rechtwinklig, etwa mit der Hypotenuse ab, so ergiebt sich der Lehrsatz des Pythagoras, wenn man

$$\overline{aa_1} = \overline{ab}$$

und den Winkel a_1ab gleich 90^0 macht. In ähnlicher Weise findet man auch die übrigen Lehrsätze, die in den Lehrbüchern der Planimetrie bei Gelegenheit des Lehrsatzes des Pythagoras entwickelt zu werden pflegen — unter Anwendung einfacher und nahe liegender Hülfsbetrachtungen.

Man kann sich nun die einzelnen Parallelogramme auch dadurch entstanden denken, dass eine gerade Linie aa_1 parallel ihrer ersten Lage erst an ab, dann an bc u. s. w. und schliesslich an fa fortgleitet, bis die Endlage die Anfangslage deckt. Dann erscheint nach dem Vorigen bezüglich der Grösse der beschriebenen Flächen irgend

Digitized by Google

eine der Teilbewegungen mit entgegengesetztem Vorzeichem, d. i in entgegengesetzter Richtung, z. *B.* von aa_1 nach ff_1 als die Resultirende aller übrigen. Hiernach kann man eine beliebige Anzahl paralleler Verschiebungen einer geraden Linie in eine einzige zusammensetzen und umgekehrt letztere wieder zerlegen. — Sind a und und a_1 zwei Punkte einer ebenen Curve, so beschreibt jeder einzelne Punkt dieser Curve bei der Verschiebung ein Polygon congruent zu $a \ldots f$, folglich ist auch die von der bewegten Curve bestrichene Fläche algebraisch gleich null. Dasselbe ist auch dann der Fall, wenn $a \ldots f$ eine beliebig aus geraden und krummen Teilen zusammengesetzte Linie ist, an der als Leitlinie sich die bewegte Curve als die die Fläche erzeugende Linie parallel fortschreitend, ohne Drehbewegungen fortbewegt.

In Fig. 9 ist die algebraische Summe der Flächen abb_1a_1, $bcc_1b_1 \ldots faa_1f_1$ auch dann gleich null, wenn das geschlossene Polygon $a_1b_1 \ldots f_1$ gegen die Anfangslage $ab \ldots f$ verdreht ist, und demnach nicht $a_1b_1 \parallel ab$, $b_1c_1 \parallel bc \ldots f_1a_1 \parallel fa$ ist. Das Gleiche gilt, wenn an die Stelle des geschlossenen Polygons $abc \ldots f$ eine geschlossene Curve tritt.

Bewegt sich eine Raumcurve L parallel fortschreitend nach der Richtung einer Geraden s um eine Strecke s vorwärts, so bleiben irgend drei Punkte derselben, welche die Eckpunkte eines Dreiecks bilden, stets in Ebenen, die der ursprünglichen Ebene dieser drei Punkte parallel sind. Die von der Curve L beschriebene Fläche ist eine Cylinderfläche, deren Oberfläche der Länge s proportional ist. Letzteres erkennt man in ganz ähnlicher Weise, wie es in Bezug auf Fig. 6 für eine ebene Curve bewiesen wurde. Als Erzeugende kann man sich nämlich auch statt der Curve L irgend eine andere Curve auf der Oberfläche des Cylinders, also auche eine solche denken, welche in irgend einer die Cylinderfläche schneidenden Ebene liegt. Ist diese Ebene normal zu der Richtung s, so schneidet sie die Cylinderfläche in einem Normalschnitt, und die Oberfläche des Cylinders ist an Inhalt gleich der Länge dieses Schnitts, multiplicirt mit s.

Ist die Curve L eine geschlossene Curve, so ist auch die von ihr beschriebene Cylinderfläche nur an den Enden, nicht an den Seiten offen, und die Projection der ganzen Fläche auf eine beliebige Ebene ist stes gleich null.

Ist die Curve L die Randcurve einer beliebigen Fläche F, so wird die letztere ein Volumen beschreiben, welches, wie auch die Fläche geformt sein mag, proportional s ist. Statt der Fläche kann

Digitized by Google

man sich eine beliebige andere Fläche gesetzt denken mit derselben Randcurve; ist letztere eine beliebige Raumcurve, so wird die einfachste Ersatzfläche eine Regelfläche sein, die man jedes Mal nach dem Zweck, den man eben im Auge hat, näher charakterisiren kann. Schneidet man den Cylinder durch eine beliebige Ebene, so ist die Schnittfläche eben ein schiefer ebener Schnitt des Cylinders, der für letzteren auch als Erzeugende gedacht werden kann. Wird die schneidende Ebene normal zu s, so erhält man den Normalschnitt des Cylinders; letzterer ist an Inhalt gleich der Fläche jenes Schnitts multiplicirt mit s. Liegen auch ausserhalb der durch die Randcurve L gehenden Seiten des Cylinders Teile der Fläche F, so heben sich bei der fortschreitenden Bewegung deren Wirkungen für die Erzeugung des Volumens auf bei rein algebraischer Auffassung der Sache. Doch könnte auch gefragt werden nach dem Volumen des die Fläche F umhüllenden Cylinders; dann ist nicht die Randcurve L, falls sie überhaupt vorhanden ist, massgebend; bei einer geschlossenen Fläche F ist L gleich null, d. h. verschwunden. Man muss dann den zu der Richtung s parallelen Cylinder, welcher die Fläche F von aussen berührt, also die Curve, in der er sie berührt, bestimmen. Diese Curve tritt dann an die Stelle der Randcurve L, welche oben angenommen wurde, und eine beliebige dieselbe schliessende Fläche kann als die das Volumen erzeugende Fläche angenommen werden.

In ganz ähnlicher Weise, wie es für eine ebene Curve mit Bezugnahme auf Figur 7 geschehen, kann man auch diese letzten Entwicklungen leicht auf den Fall übertragen, wo sich eine Raumcurve L, bzhw. eine Fläche F, deren Randcurve L ist, um eine feste Achse dreht. Die dabei von der Curve L beschriebene Ringfläche ist proportional dem Drehungswinkel δ und der Länge eines ebenen, durch die Drehachse gelegten Normalschnitts, den man bekanntlich auch Meridianschnitt nennt; die Projection der Ringfläche ist aber nicht gleich null, da die Endlage von L nicht parallel der Anfangslage ist. Ebenso ist das von der Ringfläche, welche von der Fläche F mit der Randcurve L beschrieben wird, umschlossene Volumen proportional dem Drehwinkel δ und dem Flächeninhalt des Meridianschnitts.

Ist L die Anfangs-, L_1 die Endlage einer Raumcurve, und ist die relative Lage beider eine solche, dass L in L_1 durch fortschreitende Bewegung ohne Drehung übergeführt werden kann, so ist die Projection einer beliebigen, zwischen L und L_1 gedachten Eläche auf irgend eine Ebene stets null, wenn L eine geschlossene Curve ist. Das ist eine Erweiterung des auf Seite 252 für die von L beschriebene Cylinderfläche Gesagten.

Digitized by Google

Man erkennt die Richtigkeit der Behauptung sofort, wenn man L und L_1 durch beliebige Flächen F und F_1 schliesst. Diese beiden Flächenteile bilden mit der zwischen L und L_1 angenommenen zusammen eine einzige geschlossene Fläche, bzhw. ein Polyeder im allgemeinen Sinne des Worts. Die Projection dieses Polyeders ist algebraisch gleich null, und da auch die Projectionen von F und F_1 die algebraische Summe null ergeben, so muss auch die Projection der Fläche zwischen L und L_1 null sein.

Denkt man L in L_1 durch rein fortschreitende Bewegung übergeführt, so beschreiben alle Punkte der Curve L congruente Curven. Sind diese Curven gerade Linien, so ist die Fläche zwischen L und L_1 eine Cylinderfläche, welche in ein Prisma übergeht, wenn L ein Polygon ist. Ist also $a \ldots f$ in Fig. 9 ein Raumpolygon und $a_1 \ldots f_1$ die zweite Lage desselben parallell zu $a \ldots f$, so sind die Parallelogramme $a b b_1 a_1$, $b c c_1 b_1 \ldots f a a_1 f_1$ die Seitenflächen des Prismas, für welche die algebraische Summe der Projectionen auf irgend eine Ebene null ist.

Der auf Seite 251 und 252 behandelte Fall ist als ein Grenzfall dieses allgemeineren Falls zu betrachten, und zwar so, dass beide Polygone eben sind und in derselben Ebene liegen, so dass die Projectionen der Parallelogramme auf diese Ebene mit jenen Flächen selbst zusammenfallen.

Ist die Curve oder das Polygon L eben, und die Ebene der Endlage L_1 parallel der Ebene der Anfangslage L, so kann man die geschlossene Figur L durch irgend eine Bewegung in die Endlage L_1 überführen, und es bleibt bestehen, dass die Projection der dadurch beschriebenen Fläche auf irdend eine Ebene stets algebraisch gleich null ist, Es ist also dann nicht erforderlich, dass die Elemente von L den entsprechenden Elementen in der Endlage L_1 parallel seien. Das Gleiche gilt, wenn die Ebenen der Anfangs- und Endlage von L zusammenfallen.

Bewegt sich die Curve L, die Randcurve der Fläche F, rein fortschreitend so, dass ein fest mit ihr verbundener Punkt beständig auf einer zweiten geschlossenen Curve bleibt, so wird in jedem Augenblick der Bewegung die Projection der von L beschriebenen Fläche auf irgend eine Ebene gleich null sein. Der algebraische Wert des von F beschriebenen Volumens ist null, sobald F in seine Anfangslage zurückgekehrt ist. Dasselbe gilt für die von L beschriebene Fläche, wenn L nicht geschlossen ist. Ist die zweite Curve, die Leitcurve, nicht geschlossen, so kann man den Schluss durch eine beliebige, also auch durch eine gerade Schlusslinie her-

Digitized by Google

stellen, und aus dem Obigen ist für diesen Fall zu entnehmen, in welchem Sinne diese Schlusslinie für die von L beschriebene Fläche und das von F beschriebene Volumen als Resultirende der zweiten Curve, der Leitlinie der Bewegung, aufgefasst werden kann.

Auf Seite 248 wurde bewiesen, dass, wenn die Bewegung eines Raumgebildes parallel einer gegebenen Ebene vor sich geht, man dieses Gebilde aus der Anfangslage in die Endlage überführen kann durch eine einfache fortscheitende Bewegung parallel der Ebene oder durch Drehung um eine zu der Ebene senkrechte Achse.

Diese Bewegungen weichen, wenn die Endlage des Gebildes von der Anfangslage um eine unendlich kleine Grösse erster Ordnung entfernt ist, von der wahren Bewegung aus letztgenannter Lage in die andere nur um unendlich kleine Grössen zweiter oder höherer Ordnung ab und können also die wahre Bewegung vertreten.

Das gilt demnach auch in Bezug auf die in beiden Fällen beschriebenen Flächen- und Raumgrössen.

Im weiteren ist bewiesen worden, wie sich auch in letzterer Hinsicht eine beliebige fortschreitende Bewegung eines Raumgebildes auf eine einzige, wenn man will geradlinige Bewegung gleicher Art zurückführen lässt. Im Folgenden soll nun noch kurz erörtert werden, wie sich jede beliebige, aus fortschreitenden und Drehbewegungen zusammengesetzte Bewegung durch eine Drehung um eine gewisse Achse und ein gleichzeitiges Gleiten oder Fortschreiten parallel zu dieser Achse, d. h. durch eine cylindrische Schraubenbewegung ersetzen lässt. Zunächst ist zu dem Ende zu beweisen, dass sich jedes Gebilde aus einer gegebenen Anfangslage in eine beliebige, um endliche Masse davon entfernte Endlage durch eine fortschreitende Bewegung und darauf folgende Drehbewegung oder umgekehrt überführen lässt, wobei unter Umständen eine dieser Bewegung auch gleich null sein kann.

Es sei (Fig. 10) abc die Anfangslage, $a_1b_1c_1$ die Endlage von drei mit dem Gebilde fest verbundenen Punkten (vergl. Seite 251). Durch parallele Verschiebung kann man irgend einen dieser Punkte z. B. a in seine Endlage bringen; die entsprechende Lage von abc sei $a_1b'c'$. Legt man nun zwei Ebenen durch a_1 und bzhw. durch die Mitten der geraden Linien $b'b_1$ und $c'c_1$ und normal zu diesen Linien, so ist die Durchschnittslinie dieser beiden Ebenen die Drehachse, welche es ermöglicht, $a_1b'c'$ durch einfache Drehung um diese Achse in die Endlage $a_1b_1c_1$ zu bringen.

Digitized by Google

Ueber die Richtung der so im allgemeinen bestimmten Drehachse ist Folgendes zu sagen:

Die Achse steht normal zu $b'b_1$ und $c'c_1$. Zieht man also von einem beliebigen Punkte i (Fig. 10b) aus zwei gerade Linien ib'' und ic'', die nach Grösse und Richtung gleich und parallel $b'b_1$ und $c'c_1$ sind, so ist die Achse normal zur Ebene $ib''c''$. Zieht man nun noch ia''', $b''b'''$ und $c''c'''$ gleich und parallel $aa' - aa'$ ist gleich und parallel bb' und cc' — so ist die Ebene $a'''b'''c'''$ parallel der Ebene $ib''c''$, also ist die Achse auch normal zu letzterer Ebene. Es sind aber ia''', ib''' und ic''' die Ortsveränderungen der Punkte a, b und c, und das Resultat ist demnach dieses: Trägt man von einem beliebigen Punkte i aus nach Grösse und Richtung die Entfernung der Endlagen a_1, b_1 und c_1 dreier beliebiger Punkte a, b und c des bewegten Gebildes von ihren Anfangslagen, oder diesen Entfernungen proportionale Längen ab, so steht die Drehachse normal zu der Ebene, welche man durch die Endpunkte a''', b''' und c''' legen kann.

Die Richtung der Drehachse ist unabhängig von der Wahl des Punktes a, den man zunächst durch Parallelverschiebung in seine Endlage bringt, während ihre Lage von der Wahl dieses Punktes abhängt. — Denkt man sich $a_1 b_1 c_1$ als Anfangslage, abc als Endlage, so erkennt man, dass man auch die Drehbewegung vor der fortschreitenden voraufgehen lassen kann.

Ist die Endlage des Gebildes von der Anfangslage nur unendlich wenig entfernt, so kann man die wirkliche Bewegung durch die gleichzeitig erfolgende Parallelverschiebung und Drehbewegung ersetzen, die zusammen von ersterer nur um unendlich kleine Grössen zweiter Ordnung verschieden sind. Handelt es sich um die bei diesen Bewegungen von dem Gebilde beschriebenen Flächen- oder Raumgrössen, so kann man die Teilbewegungen auch als nach einander erfolgend sich vorstellen und die Summe ihrer Wirkungen als die Gesamtwirkung der wirkichen Bewegung einführen, denn jene können von der letzteren nur um unendlich kleine Grössen höherer Ordnung, die als solche zu vernachlässigen sind, verschieden sein. Dasselbe gilt für jede andere Art der Zerlegung der unendlich kleinen wirklichen Bewegung, und es gilt für die Gesamtwirkung dieser Bewegung auch dann, wenn letztere sich aus einer beliebigen Anzahl gleichzeitig erfolgender unendlich kleiner Parallelverschiebungen und Drehungen zusammensetzt.

In Fig. 10a kann die Richtung aa_1 die durch a_1 verlaufende Drehachse unter irgend einem Winkel schneiden. Zerlegt man aber die Verschiebung aa_1 in eine Componente parallel und in eine zweite

Digitized by Google

normal zur Achse, so kann man im Hinblick auf das, auf Seite 247 und 248 mit Bezug auf Fig. 5 Gesagte schon einsehen, dass sich die zuletzt genannte Teilbewegung mit der Drehung zu einer einfachen Drehung um eine zur ersten Achse parallele Achse zusammensetzen lässt. Damit ist aber offenbar nun die Schraubenbewegung fertig. (Liegt die letzte Achse unendlich weit entfernt, so wird aus der Schraubenbewegung eine reine Parallelverschiebung; umgekehrt erhält man eine reine Drehung ohne Verschiebung, wenn die Componente der Verschiebung parallel der Achse null ist.) — Eine endliche Ortsveränderung eines Gebildes wird sich im allgemeinen nicht durch eine einzige Schraubenbewegung, sondern nur durch eine unendlich grosse Anzahl unendlich kleiner Bewegungen dieser Art ersetzen lassen; bei jeder einzelnen dieser Bewegungen ist die Bahn eines beliebigen Punkts des Gebildes eine cylindrische Schraubenlinie. Bekanntlich ist das dem Krümmungskreis einer ebenen Curve entsprechende Analogon für eine Raumcurve die Krümmungsschraube (vergl. u. A. Dr. H. Scheffler, Situationscalcul, § 32), und es leuchtet unmittelbar ein, dass jene cylindrische Schraubenlinie mit der Krümmungsschraube der Bahn des bewegten Punkts zusammenfallen muss. Wegen der weitern Einzelheiten dieser Lehre von der geometrischen Bewegung eines Raumgebildes verweise ich auf das eben genannte Werk, besonders auch auf Duhamel, Analytische Mechanik, wo dieselben sehr ausführlich behandelt sind, und auf andere Lehrbücher der Mechanik. Ich beschränke mich hier darauf, nur noch die folgenden kurzen Ergänzungen der obigen Betrachtungen über die Zusammensetzung und Zerlegung von Fortschritts- und Drehbewegungen, getrennt oder combinirt, hinzuzufügen.

Die Fortschrittsbewegung einer geraden Linie nach einer gegebenen Richtung kann man als ein Gleiten längs einer zu dieser Richtung parallel gezogenen Geraden auffassen. Gleitet diese Gerade gleichzeitig längs einer zweiten, diese wieder längs einer dritten Geraden u. s. w., so vollführt das Gebilde 2, 3 . . . Fortschrittsbewegungen. Dreht sich eine der Geraden gleichzeitig um eine gegebene Achse, diese wieder um eine zweite Achse u. s. w., so kommt zu den fortschreitenden eine entsprechende Anzahl gleichzeitiger Drehbewegungen hinzu. Hierin liegt die Erklärung dafür, was im allgemeinen unter gleichzeitiger Ausführung mehrerer Bewegungen zu verstehen ist. Hat man die Wirkung einer Anzahl gleichzeitiger Bewegungen zu untersuchen, so kommt stets das Zahlenverhältniss der einzelnen Bewegungsgrössen in Frage. Diese Bewegungsgrössen also die Wege der einzelnen Punkte werden, wenn es sich um unendlich kleine Verschiebungen und Drehungen handelt, alle ebenfalls

Digitized by Google

unendlich klein sein. Um sie vergleichen zu können, wird man sie sämtlich auf eine unabhängig veränderliche Grösse, von der sie alle abhängig sind, beziehen müssen. Wählt man hierfür die Zeit, während der die Bewegungen ausgeführt werden, und dividirt alle jene unendlich kleinen Wege der einzelnen Punkte durch das constante Differential der Zeit, so erhält man statt der Wege die Geschwindigkeiten von endlicher Grösse, mit der jene Wege durchlaufen werden. So gewinnt man die Möglichkeit, die Wirkungen mehrerer gleichzeitig erfolgender Bewegungen zu verfolgen, obgleich, so lange diese Wirkungen keine Kraftwirkungen sind, ss sich vielmehr nur um die Bestimmung der durch ein Raumgebilde beschriebenen Flächen- und Raumgrössen handelt, an und für sich die Zeit nicht in Frage kommt. Es soll also zunächst mit σ die Geschwindigkeit einer Parallelverschiebung, mit δ dagegen die Winkelgeschwindigkeit einer Drehung bezeichnet werden; was dann in Bezug auf Zusammensetzungen und Zerlegungen in Bezug auf diese Geschwindigkeiten zu sagen ist, das gilt auch für die entsprechenden Verschiebungen und Drehungen.

Mehrere unendlich kleine gleichzeitige Verschiebungen setzen sich, wenn man sie in beliebiger Folge als nach einander erfolgend denkt, in der Weise zusammen, dass die Schlusslinie des aus denselben construirten Polygons die resultirende Verschiebung ist. Ebenso ist es für die entsprechenden Geschwindigkeiten. Sind letztere nach Grösse und Richtung σ_1, σ_2 . . . und ihre Winkel mit den Coordinaten-Achsen $\alpha_1 \beta_1 \gamma_1$, $\alpha_2 \beta_2 \gamma_2$ . . . , so sind die nach den Richtungen jener Achsen gemessenen Componenten den Resultirenden $\Sigma(\sigma \cos \alpha)$, $\Sigma(\sigma \cos \beta)$, $\Sigma(\sigma \cos \gamma)$, woraus sich unmittelbar der Wert der Resultirenden selbst ergiebt.

Drehung um zwei sich schneidende Achsen. Ist ein Gebilde gleichzeitig zu zwei Drehungen um die Achsen OA und OB (Fig. 11) mit den Winkelgeschwindigkeiten δ und δ_1 veranlasst, so werden die Punkte der Ebene AOB in Ruhe bleiben, für welche die Geschwindigkeiten gleich und entgegengesetzt, also allgemein gleich null sind. Ein solcher Punkt ist O, durch den also die etwa mögliche resultirende Achse verlaufen muss. Ein zweiter Punkt derselben sei P, also OP selbst sei die Achse, dann mus stattfinden für den Punkt P:

$$x \,.\, \delta = x_1 \,.\, \delta_1$$

und, wenn man auf beiden Seiten durch die Länge OP teilt:

$$\sin \alpha \,.\, \delta = \sin \alpha_1 \,.\, \delta_1$$

Man ziehe durch P die Geraden PC und PC_1 bzhw. parallel zu OB und OA, und es sei

Digitized by Google

$$\overline{OC} = \overline{C_1P} = n \,.\, \delta, \quad \overline{OC_1} = \overline{CP} = n_2 \,.\, \delta_1$$

dann erhält man z. B. aus Dreieck OCP

$$\sin\alpha \,.\, n\delta = \sin\alpha_1 \,.\, n_1\delta_1$$

Verglichen mit der vorigen Gleichung erhält man hieraus

$$n = n_1$$

d. h. OP ist die Diagonale eines Parallelogramms $OCPC_1$, dessen Seiten proportional, also auch eines solchen, dessen Seiten gleich δ und δ_1 sind; damit ist die Lage von OP bestimmt.

Um nun noch die resultirende Winkelgeschwindigkeit ε für diese Achse zu finden, beachte man zunächst, dass im Dreieck OCP, wenn

$$\overline{OC} = n\delta, \quad \overline{CP} = n\delta_1 \quad \text{ist:}$$

$$\sin\alpha_1 \,.\, \overline{OP} = \sin(\alpha + \alpha_1)\, n\delta$$

Zieht man nun von einem beliebigen Punkte M auf OB die Normalen zu OA und OP und bezeichnet diese mit a und p, so muss für M stattfinden:

$$p \,.\, \varepsilon = a \,.\, \delta_1$$

und, indem man beiderseits durch OM teilt:

$$\sin\alpha_1 \,.\, \varepsilon = \sin(\alpha + \alpha_1)\, \delta$$

Verglichen mit der vorigen Gleichung erhält man demnach

$$\overline{OP} = \varepsilon_1$$

wenn $n = 1$, also

$$\overline{OC} = \delta \quad \text{und} \quad \overline{OC_1} = \delta_1$$

ist. Für ε gilt also die Gleichung:

$$\varepsilon = \frac{\sin(\alpha+\alpha_1)}{\sin\alpha_1} \,.\, \delta = \frac{\sin(\alpha+\alpha_1)}{\sin\alpha} \,.\, \delta_1$$
$$= \sqrt{\delta^2 + \delta_1^2 + 2\delta\delta_1\cos(\alpha+\alpha_1)}$$

Das Resultat ist:

> „Zwei unendlich kleine Drehungen um sich schneidende „Achsen können durch eine einzige Drehung ersetzt wer- „den, und wenn man auf jenen Achsen vom Durchschnitts- „punkt aus Längen gleich den Winkelgeschwindigkeiten „abträgt, so bestimmt die Diagonale des aus aus diesen „Strecken construirten Parallelogramms sowol die Lage

Digitized by Google

„der resultirenden Achse wie die Winkelgeschwindigkeit „der resultirenden Drehung um die Achse".

Handelt es sich um mehrere Drehungen δ, δ_1 . . . um Achsen, welche sich sämtlich in einem Punkte schneiden, so kann man demnach die resultirende Drehung ganz ebenso finden, wie es oben für Parallelverschiebungen angegeben wurde, wenn man an die Stelle der Grössen σ, σ_1 . . . die Grössen δ, δ_1 . . . , gemessen auf den Richtungen der zugehörigen Achsen, treten lässt.

Verschiebung normal zu einer Achse und Drehung um diese Achse. In Fig. 12 sei die Achse O normal zur Bildebene und die Winkelgeschw. sei δ, die Geschwindigkeit der Verschiebung σ. Dann lassen sich beide Bewegungen zu einer Drehung um eine Achse P, die ebenfalls normal zur Zeichenebene steht, vereinigen, und es findet statt für die Achse O, d. i. für ihre Verschiebung und ihre Drehung um P:

$$\sigma = x \,.\, \delta, \quad \text{also} \quad x = \frac{\sigma}{\delta}$$

und für eine Drehung um O findet man für P:

$$\sigma = x \,.\, \varepsilon$$

woraus durch Vergleich mit der vorigen Gleichung folgt:

$$\varepsilon = \delta$$

Nach diesen einfachen Beziehungen, die sich leicht in Worte kleiden lassen, kann man nicht nur eine fortschreitende Bewegung normal zu einer gegebenen Achse und eine Drehung um diese zu einer Drehung um eine resultirende Achse combiniren, sondern auch umgekehrt die letztere in die beiden ersten zerlegen.

Drehung um zwei parallele Achsen, Drehungspaare. In Fig. 13 seien die beiden Achsen O und O_1 normal zur Zeichenebene die gegebenen Achsen mit den Winkelgeschwindigkeiten δ und δ_1, und P die offenbar zu jenen parallele Achse mit der Winkelgeschwindigkeit ε; P liegt in der Ebene OO_1. Man findet nun leicht nach der Bezeichnung in der Figur für die Achse P, die eben in Ruhe bleiben soll:

$$x \,.\, \delta = x_1 \,.\, \delta_1$$

Ferner für eine Drehung um die Achsen O und P für die Achse O_1: $$(x + x_1)\,\delta = l\,\delta = x_1 \,.\, \varepsilon$$

für eine Drehung um die Achsen O_1 und P für die Achse O:

$$(x + x_1)\,\delta_1 = l\,\delta_1 = x \,.\, \varepsilon$$

Digitized by Google

Aus diesen Gleichungen folgt:

$$\varepsilon = \delta + \delta_1, \quad x = l \cdot \frac{\delta_1}{\delta + \delta_1}, \quad x_1 = l \cdot \frac{\delta}{\delta + \delta_1}$$

Dieselben Formeln erhält man, wenn man von zwei sich schneidenden Achsen ausgeht und dann ihre Neigungswinkel gleich null setzt.

Sind die beiden gegebenen Drehungen einander entgegengesetzt, ist z. B. δ_1 negativ, so erhält es in den vorstehenden Formeln das Vorzeichen minus. Wird dann

$$\delta - \delta_1 = 0$$

so wird

$$\varepsilon = 0, \quad x = -\infty \quad \text{und} \quad x_1 = \infty$$

Man hat es dann mit einem Drehungspaar oder mit einem Gegenpaar von Drehungen zu tun. Für ein solches Gegenpaar liegt die resultirende Achse, für welche die Winkelgeschwindigkeit null ist, in unendlicher Entfernung, d. h. sie existirt als Drehungsachse überhaupt nicht; man erkennt vielmehr unmittelbar die Richtigkeit des folgenden Satzes:

> „Ein Drehungspaar bewirkt eine parallel fortschreitende „Bewegung aller Punkte des Gebildes (ohne Drehung) „nach geraden Linien, welche auf der Ebene des Paares, „d. i. auf der Ebene ihrer Achsen senkrecht stehen; die „Geschwindigkeit dieser Bewegung, für alle Punkte die„selbe, ist gleich dem Product aus der Entfernung der „Achse in die Winkelgeschwindigkeit. Umgekehrt kann man „auch für eine gegebene fortschreitende Bewegung ein „gleichwertiges Drehungspaar einführen."

Drehung um zwei windschiefe Achsen. Die Achsen seien O und O_1, die Winkelgeschwindigkeiten δ und δ_1. Man denke sich zu den zwei Achsen noch eine dritte O_2 hinzu, die etwa parallel zu O_1 ist und O schneidet; bestimmt man für diese die Winkelgeschwindigkeit zu

$$O = \delta_1 - \delta_1$$

so wird dadurch an dem Ganzen nichts geändert. Es lassen sich nun $O(\delta)$ und $O_2(\delta_1)$ zu einer einzigen Drehung zusammensetzen, und $O_2(-\delta_1)$ und $O_1(\delta_1)$ bilden zusammen ein Drehungspaar, reduciren sich also auf eine fortschreitende Bewegung. Letztere kann man, wenn es wünschenswert erscheint, zerlegen in zwei Bewegungen, bzhw. parallel und normal zu der aus $O(\delta)$ und $O_2(\delta_1)$ resul-

Digitized by Google

tirenden Drehachse. Die Bewegung normal zu letzterer und die Drehung um dieselbe lassen sich zu einer einfachen Drehung um eine parallele Achse zusammensetzen, und demnach reducirt sich Alles auf eine cylindrische Schraubenbewegung, die im gegebenen Falle unschwer im einzelnen zu bestimmen ist.

In den folgenden Paragraphen sollen nun die in diesem Paragraphen teils direct vorliegenden, teils aus den allgemeinen Betrachtungen desselben abzuleitenden Resultate rechnungsmässig verwertet, und aus den entwickelten Formeln weitere Schlüsse gezogen werden.

Fortsetzung folgt.

Digitized by Google

XIV.

Nachtrag zu dem Beweise des Fermat'schen Satzes.

Von

G. Korneck.

1.

Der von mir in § 3. inbezug auf die Gleichung

$$nx^3 + ky^3 = z^n$$

ausgesprochene Satz ist in seinen letzten Worten „jeder Wert von x ist durch n teilbar" nicht richtig, wenn $n = 3$ und $k = 1$.

Denn für die Gleichung

$$3x^3 + y^3 = z^3$$

giebt es, wie Herr Schuhmacher (Göppingen) in Hoffmanns Zeitschrift für math. und naturw. Unterricht (Jahrg. 25, Heft 5, S. 350) gezeigt hat, noch ein zweites Lösungsverfahren, welches für x Werte liefert, die nicht durch durch 3 teilbar sind.

In Folge dessen ist auch die Anwendung des Satzes in § 7, um die Unmöglichkeit von

$$x^3 + y^3 = z^3$$

zu beweisen, nicht zulässig, und die Gleichung

Digitized by Google

$$x^3+y^3=z^3$$

ist besonders zu behandeln, wie folgt:

Wenn x durch 3 nicht teilbar ist, so muss es entweder y oder z sein. Aus

$$z^3-y^3=x^3$$

folgt

1) $z-y=r^3$
2) $z^2+yz+y^2=s^3$ und
3) $x=r\,.\,s$

Da es für die zweite Gleichung gleichgiltig ist, welche der beiden Zahlen, z oder y, durch 3 teilbar angenommen wird, so setzen wir z als teilbar durch 3 voraus.

Nun multipliciren wir diese Gleichung mit 64 und erhalten:

$$64z^2+2\,.\,32yz+16y^2+48y^2=64s^3$$

oder

$$(8z+4y)^2+3\,.\,(4y)^2=(4s)^3$$

Es sei nun

$$8z+4y=p,\quad 4y=q,\quad 4s=t$$

so haben wir:

$$p^2+3q^2=t^3$$

Nach dem ersten Lösungsverfahren setzen wir nun

1) $p+q\sqrt{-3}=(u+v\sqrt{-3})^3$
2) $p-q\sqrt{-3}=(u-v\sqrt{-3})^3$

und erhalten:

$$p^2+3q^2=(u^2+3v^2)^3$$

Aus den Gleichungen 1) und 2) ergeben sich für p und q die Werte

$$p=u^3-9uv^2$$
$$q=3u^2v-3v^3$$

Es ist also q durch 3 teilbar.

Bei dem zweiten Lösungsverfahren bezeichnen wir die beiden complexen dritten Wurzeln der Einheit mit ε_1 und ε_2

$$\varepsilon_1=-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{-3}$$
$$\varepsilon_2=-\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\sqrt{-3}$$

so haben wir

Digitized by Google

$$\varepsilon_1+\varepsilon_2=-1,\quad \varepsilon_1-\varepsilon_2=\sqrt{-3}$$

$$\varepsilon_1\varepsilon_2=1,\quad \varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2=-1,\quad \varepsilon_1^2-\varepsilon_2^2=-\sqrt{-3}$$

$$\varepsilon_1^3=\varepsilon_2^3=1,\quad \varepsilon_1^4=\varepsilon_1,\quad \varepsilon_2^4=\varepsilon_2$$

Setzen wir nun:

1) $p+q\sqrt{-3}=\varepsilon_1(u+\varepsilon_1 v)^3$

2) $p-q\sqrt{-3}=\varepsilon_2(u+\varepsilon_2 v)^3$

so ergiebt sich

3) $p^2+3q^2=(u^2-uv+v^2)^3$

4) $p+q\sqrt{-3}=\varepsilon_1 u^3+3\varepsilon_1^2u^2v+3uv^2+\varepsilon_1 v^3$

5) $p-q\sqrt{-3}=\varepsilon_2 u^3+3\varepsilon_2^2u^2v+3uv^2+\varepsilon_2 v^3$

6) $2p=-u^3-3u^2v+6uv^2-v^3$

7) $2q=u^3-3u^2v\qquad\qquad+v^3$

8) $p+q=3uv(v-u)$

Im ersten Falle ist also:

$$q-4y=3v(u+v)(u-v)$$

also

$$y=3\cdot\frac{v(u+v)(u-v)}{4}$$

Im zweiten Falle ist:

$$p+q=8(z+y)=3uv(v-u)$$

also

$$z+y=3\cdot\frac{uv(v-u)}{8}$$

Da z nach Voraussetzung durch 3 teilbar ist, so muss auch im zweiten Falle y durch 3 teilbar sein.

In jedem Falle wären also in der Gleichung

$$x^3+y^3=z^3$$

die beiden Zahlen y und z durch 3 teilbar, während nach Voraussetzung die dritte x durch 3 unteilbar ist. Da dies unmöglich ist, so ist die Gleichung

Digitized by Google

$$x^3 + y^3 = z^3$$

für ganze Zahlen unmöglich.

2.

In dem Beweise in § 3. habe ich angenommen, dass möglicherweise auch gebrochene rationale Werte von λ und φ für x, y, z ganze Zahlen ergeben könnten. Es lässt sich aber zeigen, dass dies nur Brüche mit dem Nenner 2 sein können.

Nehmen wir zunächst $n = 5$, so haben wir

$$x\sqrt{5} = \alpha^5 - 10\alpha^3\beta^2 + 5\alpha\beta^4$$

und aus

$$\alpha^2 + \beta^2 = z \quad \text{folgt} \quad \beta^2 = z - \alpha^2$$

Es ergiebt sich also

$$\begin{aligned} x\sqrt{5} &= \alpha^5 - 10\alpha^3 z + 5\alpha z^2 \\ &\quad + 10\alpha^5 - 10\alpha^3 z \\ &\quad + 5\alpha^5 \end{aligned}$$

$$x\sqrt{5} = 16\alpha^5 - 20\alpha^3 z + 5\alpha z^2$$

Verfährt man ebenso mit der Formel für $x\sqrt{n}$, so ist der Coefficient von α^n die Summe $1 + n_2 + n_4 + n_6 \ldots + n_{n-1}$. Da nun die Summe aller Binomialcoefficienten 2^n ist, so ist die halbe Summe 2^{n-1}, und da die übrigen Coeficienten durch n teilbar sind, so erhält man eine Gleichung von der Form:

$$x\sqrt{n} = 2^{n-1}\alpha^n - ng_1\alpha^{n-2}z + ng_2\alpha^{n-4}z^2 - ng_3\alpha^{n-6}z^4 + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cdot n\alpha z^{\frac{n-1}{2}}$$

Setzt man nun

$$\alpha = \frac{\gamma}{\delta}\sqrt{n}$$

so ergiebt sich nach Multiplication mit δ^n:

$$x\delta^n = 2^{n-1}n^{\frac{n-1}{2}}\gamma^n - n^{\frac{n-1}{2}}g_1\gamma^{n-2}z\delta^2 + n^{\frac{n-3}{2}}g_2\gamma^{n-4}z^2\delta^4$$
$$- n^{\frac{n-5}{2}}g_3 z^3\gamma^{n-6}\delta^6 \ldots + (-1)^{\frac{n-1}{2}}ny z^{\frac{n-1}{2}}\delta^{n-1}$$

Für β wäre dann zu setzen:

Digitized by Google

$$\beta = \frac{\varepsilon}{\delta}\sqrt{k}$$

und man hätte

$$x\delta^2 = ny^2 + k\varepsilon^2$$

Da n und k relativ prim sind, kann δ nicht durch n teilbar sein; es müsste also infolge der vorangehenden Gleichung $\delta = 2$ sein, weil das erste Glied rechts den Factor δ^2 haben müsste.

Also könnte in den Gleichungen 3), 4), 5) nur gesetzt werden

$$\lambda = \frac{\gamma}{2}, \quad \varphi = \frac{\varepsilon}{2}$$

wenn x, y, z ganze Zahlen sein sollen, und es bliebe x durch n teilbar.

Digitized by Google

XV.

Anwendungen des Ameseder'schen Nullsystems *).

Von

Hermann Oppenheimer

in Dettensee.

Einleitung.

Vor einiger Zeit habe ich mich mit der Construction und Behandlung eines ebenen Nullsystems beschäftigt, nachdem meine diesbezüglichen Recherchen in der geometrischen Litteratur zu keinem Ergebniss geführt hatten. Erst Herr Professor Reye in Strassburg, der so gütig war, meine Abhandlung einer Durchsicht zu unterziehen, fand, dass bereits im Jahre 1881 in der oben citirten Abhandlung ein solches System von Herrn Ameseder behandelt worden sei. Wenn nun dieses System in sich selbst auch höchst interessant ist, so scheine ich demnach doch zu der Vermutung berechtigt zu sein, dass dasselbe Anwendung auf anderweitige geometrische Theorien noch nicht gefunden hat. Die nachfolgende Abhandlung soll die Fruchtbarkeit des Systems für die Theorie der Curven dritter Ordnung dartun.

I.

1) Der leichteren Orientirung wegen sollen die wesentlichen Eigenschaften des Ameseder'schen Nullsystems hier in Kürze ange-

---

*) Ameseder: „Ueber ein Nullsystem des zweiten Grades." LXXXIII. Band der Sitzb. d. k. Akad. der Wissenschaften in Wien II. Abth. Febr.-Heft, Jahrgang 1881.

Digitized by Google

geben werden. Das Ameseder'sche Nullsystem ist ein ebenes System, in welchem einer Geraden ein auf ihr liegender Punkt und diesem Punkte dieselbe Gerade eindeutig entspricht. Das System ist quadratisch: den Strahlen eines Strahlenbüschels entspricht als Ort der zugehörigen Nullpunkte ein Kegelschnitt, der natürlich durch das Centrum des Strahlenbüschels gehen muss, weil ja das Centrum auch eine Nullgerade hat; diese berührt eben den Kegelschnitt im Centrum. Alle diese Nullpunktskegelschnitte haben drei Punkte gemeinsam, die drei Doppelpunkte des Systems. Ein solcher Doppelpunkt zeichnet sich dadurch aus, dass ihm nicht ein einziger Strahl als Nullgerade entspricht, sondern unendlich viele, alle die durch ihn hindurchgehen.

Reciprok ist die Enveloppe der Nullgeraden einer Punktreihe ein Kegelschnitt, dem dieses Doppeldreieck umschrieben ist. Jeder Seite des Doppeldreiecks entsprechen ihre sämtlichen Punkte als zugehörige Nullpunkte. Das Doppeldreieck habe die Seiten a, b, c und die Ecken A, B, C. A liege a gegenüber etc. Der Nullpunktskegelschnitt eines Strahlenbüschels, dessen Centrum X auf einer Doppelseite a liegt, zerfällt in diese Doppelseite und eine Gerade x, welche durch den Doppelpunkt A geht. Diese Gerade x schneidet auf den Strahlen des Strahlenbüschels X die Nullpunkte aus. Die Strahlen x durch A und die Punkte X auf a sind projectivisch. Die auf a liegenden Doppelpunkte B und C sind solche Centren X, die von den ihnen zugehörigen Strahlen x, nämlich resp. b und c getroffen werden, im Einklange mit der Tatsache, dass einem Strahl durch einen Doppelpunkt der Doppelpunkt selbst als Nullpunkt entspricht. Man kann daher mit Hilfe einer Doppelseite und des ihr gegenüberliegenden Doppelpunktes — und es ist gleichgiltig, welches Doppelelementpaar man dazu benutzt — in folgender Weise zu einer beliebigen Geraden m ihrem Nullpunkt M construiren.

Die Gerade m schneide a in X_m; man bestimme das dem Punkte X_m entsprechende Element x_m des der Punktreihe der X projectivischen Strahlenbüschels der x, so schneidet x_m auf m den gesuchten Nullpunkt aus.

Den Ausgangspunkt für unsere curventheoretischen Untersuchungen bildet die Aufgabe, ein Nullsystem zu construiren, wenn sieben Paare entsprechender Elemente gegeben sind, und diese Aufgabe erheischt, dass wir uns zunächst mit der „gemeinsamen Nullpunktscurve" zweier Systeme, d. h. mit dem Orte derjenigen Punkte, die in Bezug auf beide Systeme dieselben Nullgeraden haben, resp. mit der reciproken Curve, der Enveloppe dieser Nullgeraden, der „gemeinsamen Nullgeradenenveloppe", beschäftigen.

Digitized by Google

2) Die beiden Nullsysteme seien von einander unterschieden als System I und System II. Das Doppeldreieck von I sei A_1, B_1, C_1 mit den Seiten a_1, b_1, c_1, das von II A_2, B_2, C_2 mit den Seiten a_2, b_2, c_2. Der Nullpunkt von a_2 in Bezug auf I sei P_1. Dann ist der Nullpunktskegelschnitt, der zu irgend einem Punkte Q von a_2 in Bezug auf das System I gehört, derjenige Kegelschnitt K_Q, der durch A_1, B_1, C_1, P_1 und Q geht. Allen Punkten Q von a_2 entsprechen alle Kegelschnitte durch A_1, B_1, C_1, P_1. In Bezug auf das System II entspricht dem Punkte Q als Punkt einer Doppellinie ein Strahl s_q durch den gegenüberliegenden Doppelpunkt A_2. Die Schnittpunkte von s_q und K_q, X_1 und X_2, sind offenbar solche Punkte, die in Bezug auf beide Systeme dieselben Nullgeraden haben, also Punkte des gesuchten Ortes. Da der Strahlenbüschel der s_q projectivisch ist dem Kegelschnittbüschel der K_Q, indem zwei entsprechende Elemente s_q und K_Q Nullpunksörter für denselben Punkt Q sind, der umgekehrt auch eindeutig bestimmt ist, wenn einer der Nullpunktsörter gegeben ist, so sind also die Punkte der gemeinsamen Nullpunktscurve die Durchschnittspunkte eines Kegelschnittbüschels und eines projectivischen Strahlenbüschels, also die Punkte einer Curve dritter Ordnung; dieselbe geht bekanntlich durch die vier Grundpunkte des Kegelschnittbüschels und das Centrum des Strahlenbüschels hindurch, in unserem Falle also durch A_1, B_1, C_1, P_1, A_2, also: die sechs Doppelpunkte liegen auf der gemeinsamen Nullpunktscurve, und der dritte Schnittpunkt einer Doppellinie des einen Systems mit der Curve ist ihr Nullpunkt in Bezug auf das andere System; die Ecke eines der beiden Doppeldreiecke und dieser Nullpunkt einer vierten Doppellinie haben als beigeordneten Rest den dieser vierten Doppellinie gegenüberliegenden Doppelpunkt. Die gemeinsame Nullgeradenenveloppe ist, wie die reciproke Betrachtung ergibt, eine Curve dritter Classe, von der die Doppellinien Tangenten sind. Dabei ist noch folgendes zu bemerken: sobald der Strahlenbüschel der s_q, der Kegelschnittbüschel der K_Q und die projectivische Beziehung zwischen beiden gegeben ist, steht die gemeinsame Nullpunktscurve fest, und doch ist damit noch nicht festgestellt, was für eine Gerade a_2 durch P_1 die dem Punkt A_2 gegenüberliegende Doppellinie sein soll. Es gibt also unendlich viele Nullsystempaare, die 4 Doppelpunkte und dieselbe Nullpunktscurve gemeinsam haben. Am Ende des nächsten Paragraphen werden wir im Anschluss an diese Tatsache neue interessante Beziehungen kennen lernen.

3) Gegeben sind sieben beliebige Geraden 1–7, jeder dieser Geraden ist einer ihrer Punkte, resp. I—VII als ihr Nullpunkt zugewiesen. Man soll zu irgend einer Geraden 8 der Ebene ihren Nullpunkt VIII bestimmen.

Digitized by Google

Dass es nur ein solches Doppeldreieck gibt, d. h. dass unser System eindeutig ist, geht aus folgender Erwägung hervor: würde es mehrere Doppeldreiecke geben, also mehrere Nullsystene, so würden je zwei von den Systemen Anlass geben zu einer gemeinsamen Nullpunktscurve und einer Nullgeradenenveloppe. Auf der ersteren müssten nach den Erörterungen der vorigen Aufgabe ausser den Punkten I—VII auch die sechs Doppelpunkte der beiden Systeme liegen. Nun ist aber eine solche Nullpunktscurve als Curve dritter Ordnung durch 9 Punkte bestimmt. 10 beliebige Punkte der Ebene werden im allgemeinen nicht einer solchen Curve angehören. Ist uns also irgend ein Nullsystem gegeben und wir greifen ganz willkürlich 7 Geraden mit ihren Nullpunkten heraus, so werden diese 7 Punkte mit den drei Doppelpunkten des Systems nicht einer Curve 3. Ordnung angehören. Andrerseits müssten wir aber doch, wenn wir jetzt umgekehrt zu diesen 7 Elementpaaren das System construirten, unter den verschiedenen eventuellen Lösungen auch dieses angenommene System bekommen. Wir kommen also durch die Annahme der Mehrdeutigkeit unserer Aufgabe zu dem Widerspruche, dass zehn Punkte, die wir so wählen können, dass sie nicht einer Curve dritter Ordnung angehören, unter allen Umständen auf einer solchen liegen müssten. Die Aufgabe ist also eindeutig.

Der Entwicklung unserer Lösung müssen nun noch die Erklärung einiger Abkürzungen und einige geometrische Beziehungen vorausgeschickt werden, die im Folgenden jeden Augenblick wiederkehren werden. Unter $\mathfrak{K}$ (1, 2, 3, 4) wollen wir einen Kegelschnitt verstehen, der die Geraden 1, 2, 3, 4 berührt, unter K (I. II, III, IV) einen solchen, der durch die Punkte I, II, III, IV geht. Der Büschel der K (I, II, III, IV) ist der Büschel aller derjenigen Kegelschnitte, welche durch die Punkte I, II, III, IV gehen etc. Irgend ein $K(\ldots\ldots)$ hat das Doppelverhältniss m, das heisse: jeder seiner Punkte bildet mit den vier in der Klammer angegebenen Punkte dies Doppelverhältniss, das Doppelverhältniss μ eines $\mathfrak{K}(\ldots\ldots)$ habe die reciproke Bedeutung. Die geometrischen Beziehungen, die wir nötig haben, sind folgende:

a) Werden die Büschel der K (I, II, III, V) und der K (I, II, III, VI) projectivisch aufeinander bezogen, so ist der Ort des vierten Schnittpunktes entsprechender Kegelschnitte eine Curve 4. Ordnung, die die drei allen gemeinsamen Schnittpunkte I, II, III zu Doppelpunkten hat.

b) Diese Curve kann auch zerfallen. So z. B. ist eine projectivische Beziehung zwischen den beiden Büscheln durch

Digitized by Google

die Bestimmung hergestellt, dass dieser Ort ein K (I, II, III, IV) sein soll.

Diese und die reciproken Beziehungen werden wir verwenden.

Um nunmehr zur Lösung selber überzugehen, so beruht dieselbe auf dem am Eingange erwähnten Grundgesetze, dass wenn a eine Doppellinie und A der gegenüberliegende Doppelpunkt ist, die Schnittpunkte $(a, 1)$, $(a, 2)$, $(a, 3)$, $(a, 4)$, $(a, 5)$, $(a, 6)$, $(a, 7)$ dieselben Doppelverhältnisse bilden, wie resp. die Verbindungslinien (A, I), (A, II), (A, III), (A, IV), (A, V), (A, VI), (A, VII). Gelingt es uns, zu den sieben gegebenen Elementpaaren eine Linie a und einen Punkt A mit dieser Eigenschaft zu finden, dann ist unsere Aufgabe gelöst. Dies suchen wir durch unsere Kegelschnittbüschel und -schaaren in der Weise zu erreichen, dass wir vier Kegelschnitte K (I, II, III, IV), K (I, II, III, V), K (I, II, III, VI), K (I, II, III, VII) zu construiren versuchen, die einen gemeinsamen vierten Schnittpunkt A haben, so dass die $\mathfrak{R}$ (1, 2, 3, 4), $\mathfrak{R}$ (1, 2, 3, 5), $\mathfrak{R}$ (1, 2, 3, 6), $\mathfrak{R}$ (1, 2, 3, 7), die resp. dasselbe Doppelverhältniss haben, eine vierte gemeinsame Tangente a haben. Wir sehen zunächst von dem Elementpaar 7, VII ab und suchen den Ort der Doppelpunkte A und die Enveloppe der zugehörigen a für die Elementpaare 1, I—6, VI zu bestimmen.

Nehmen wir irgend einen K_x (I, II, III, IV) und weisen jedem K (I, II, III, V) denjenigen K (I, II, III, VI) als entsprechend zu, der mit ihm den vierten Schnittpunkt mit K_x (I, II, III, IV) gemeinsam hat, so ist nach Satz b damit eine projectivische Beziehung zwischen diesen beiden Büscheln hergestellt. Lassen wir ferner jedem K (I, II, III, V) denjenigen $\mathfrak{R}$ (1, 2, 3, 5) entsprechen, dessen Doppelverhältniss μ gleichen Wert mit dem Doppelverhältniss m des ersteren hat, so ist damit ebenfalls eine projectivische Beziehung zwischen Büschel und Schaar hergestellt. Beziehen wir in gleicher Weise die Schaar der $\mathfrak{R}$ (1, 2, 3, 6) auf den Büschel der K (I, II, III, VI), so ist durch die eben festgesetzte projectivische Beziehung zwischen K (I, II, III, V) und den K (I, II, III, VI) auch eine projectivische Beziehung zwischen den $\mathfrak{R}$ (1, 2, 3, 5) und den $\mathfrak{R}$ (1, 2, 3, 6) hergestellt; einem beliebigen $\mathfrak{R}$ (1, 2, 3, 5) kommt ein bestimmtes Doppelverhältniss μ zu; denselben Wert hat das Doppelverhältniss m eines bestimmten K (I, II, III, V). Dieser schneidet den K_x (I, II, III, IV) in einem vierten Punkte. Durch diesen geht ein bestimmter K (I, II, III, VI) mit einem Doppelverhältniss m_1 und es gibt einen einzigen $\mathfrak{R}$ (1, 2; 3, 6), dessen Doppelverhältniss

$$\mu_1 = m_1$$

Digitized by Google

ist. Die so auf einander bezogenen $\mathfrak{R}$ (1, 2, 3, 5) und $\mathfrak{R}$ (1, 2, 3, 6) sind also auch projectivisch. Das Erzeugniss ihrer vierten gemeinsamen Tangenten wird aber im allgemeinen nicht wieder ein Kegelschnitt sein, da ja nach Voraussetzung durch die Punkte I—VII die Geraden 1—7 ganz willkürlich gezogen sind, sondern eine Curve vierter Classe mit den Doppeltangenten 1, 2, 3. Eine Curve vierter Classe hat mit einem Kegelschnitt acht Tangenten gemeinsam. Diese Enveloppe wird also ausser ihren drei Doppeltangenten mit $\mathfrak{R}$ (1, 2, 3, 4) noch zwei weitere Tangenten gemeinsam haben, t_1 und t_2. Jede von diesen beiden Tangenten berührt also je einen Kegelschnitt der drei Schaaren; die entsprechenden Kegelschnitte der drei Büschel gehen durch einen und denselben vierten Punkt, resp. T_1 und T_2 auf K_x (I, II, III, IV); es ist also klar, dass T_1 und T_2 Punkte des gesuchten Ortes, t_1 und t_2 Tangenten der gesuchten Enveloppe sind. Auf jedem solchen K_x aus dem Büschel der K (I, II, III, IV) liegen ausser I, II, III, die ja wol auch dem gesuchten Orte angehören werden, zwei weitere Punkte T_1 und T_2; an jeden $\mathfrak{R}$ (1, 2, 3, 4) gehen zwei weitere Tangenten t_1, t_2. Es handelt sich darum die Ordnung dieser Curve der T_1, T_2 resp. die Classe der reciproken Curve festzustellen. Dazu kommen wir durch folgende Erwägung: Hat man einen Doppelpunkt T und die zugehörige Doppellinie t bestimmt, so hat es keine Schwierigkeit, auf t die beiden weiteren Doppelpunkte zu construiren, mit Hilfe der Bedingung T (I, II, III, IV, V, VI) $\overline{\wedge}$ t (1, 2, 3, 4, 5, 6). Zwei mögliche Doppeldreiecke liegen, wie wir wissen, mit den Punkten I—VI auf einer Curve dritter Ordnung, der gemeinsamen Nullpunktscurve. Wüssten wir im voraus, dass die drei Punkte eines Doppeldreiecks mit den sechs Punkten I—VI die Punkte einer einzigen Curve dritter Ordnung sind, so wäre damit festgestellt, dass der gesuchte Ort dritter Ordnung ist. Denn die Endpunkte zweier beliebigen Doppeldreiecke liegen mit den Punkten I—VI auf einer solchen C_3, die durch ein einziges solche Doppeldreieck schon eindeutig bestimmt ist; ihr müssten also alle Doppeldreiecke einbeschrieben sein. Es wäre aber ja doch denkbar, dass die Ecken eines Doppeldreiecks mit den Ecken I—VI die Grundpunkte eines Büschels von C_3 bildeten, deren jeder zwei Dreiecke einbeschrieben wären. Diese Annahme widerlegt sich, ganz abgesehen von den Widersprüchen, die sich dann aus unserer Construction der Curve ergeben würden, am besten in folgender Weise: da jedes solche Dreieck mit den Punkten I—VI Anlass zu einem Curvenbüschel gibt, jeder Curvenbüschel aber eine Curve enthalten müsste, der das gesuchte Doppeldreieck — das auch dem Elementpaar 7. VII genügt — einbeschrieben wäre, so würde auch dieses Doppeldreieck mit I—VI die Grundpunkte

Digitized by Google

eines Büschels bilden. Dann müssten seine drei Ecken, wenn wir Elementpaar VI, 6 mit VII, 7 vertauschen, auch mit den Punkten I II, III, IV, V, VII die 9 Grundpunkte eines Büschels bilden. Das ist aber nicht möglich. Denn 8 Punkte können nicht zwei verschiedene Punkte VI und VII als beigeordneten Rest haben. Also: die Ecken aller zu sechs Elementpaaren möglichen Doppeldreiecke liegen mit den Nullpunkten auf einer Curve dritter Ordnung, die Seiten berühren mit den Nullgeraden eine Curve dritter Classe. Von der Curve dritter Ordnung als gegebener Nullpunktscurve ausgehend, können wir das Resultat so aussprechen:

„Bestimmt man die Enveloppe der Nullgeraden einer Curve dritter Ordnung in Bezug auf ein Nullsystem, dessen Doppeldreieck der Curve einbeschrieben ist, so erhält man eine Curve dritter Classe. Das Doppeldreieck ist dieser Enveloppe natürlich umschrieben. Ausser diesem Dreieck aber gibt es noch unendlich viele andere, welche auch dieser Enveloppe umschrieben und der C_3 einbeschrieben sind. Jedes dieser Dreiecke kann die Stelle des Doppeldreiecks versehen. d. h. wenn wir irgend eines dieser Dreiecke zum Doppeldreieck eines Nullsystems wählen und irgend einem Punkt der C_3 die Nullgerade des anfänglichen Systems auch in Bezug auf dieses neue System zuweisen, so haben alle Curvenpunkte in Bezug auf beide Systeme dieselben Nullgeraden. In Bezug auf alle so herstellbaren Nullsysteme ist die C_3 die gemeinsame Nullpunktcurve, die Curve 3ter Classe (-„$C^{3\prime}$“) die gemeinsame „Nullgeradenenveloppe“. Durch jeden Punkt der C_3 gehen an die C^3 drei Tangenten: eine derselben ist die Nullgerade des Punktes, die andern beiden s_1 und s_2 die durch diesen Punkt gehenden Doppellinien; die dritte zugehörige Doppellinie, die das Doppeldreieck vervollständigt, ist die Verbindungslinie derjenigen beiden Schnittpunkte von s_1, s_2 mit der C_3, die nicht ihre Nullpunkte sind. Reciprok schneidet jede Tangente der C^3 die C_3 in drei Punkten, deren einer der Nullpunkt der Tangente ist. Die andern beiden Schnittpunkte S_1 und S_2 sind die beiden Doppelpunkte dieser Tangenten, der dritte zugehörige Doppelpunkt wird ausgeschnitten von denjenigen beiden Tangenten durch S_1 und S_2, die nicht ihre Nullgeraden sind. Zwei beliebige solche Doppeldreiecke liegen, wie aus den Schlussbemerkungen des vorigen Abschnittes sich ergiebt, derartig zu einander, dass zu den drei Ecken des einen Dreieeks und dem Nullpunkt einer Seite des zweiten Dreiecks die Gegenecke dieser Seite der beigeordnete Rest ist.

Haben wir nun mit Hilfe der Elementpaare I bis VI, 1 bis 6, das eine Curvenpaar, wir wollen es für die Folge $C_{3(VI)}$ und $C^3_{(6)}$ nennen, construirt, so können wir, indem wir ein Elementpaar, etwa

Digitized by Google

6, VI, durch 7, VII ersetzen, in derselben Weise ein zweites Curvenpaar $C^3_{(VII)}$ und $C^3_{(7)}$ herstellen, dem auch das gesuchte Doppeldreieck ein- resp. umschrieben sein muss, und zwar können der Eindeutigkeit der Lösung wegen nur drei von den neuen Durchschnittspunkten sich für die gesuchten Doppelpunkte eignen. In der Tat: fünf von diesen neun Punkten sind die Punkte I—V. Der sechste Punkt, der nicht Doppelpunkt sein kann, wird in folgender Weise erhalten: die Geraden 1—5 bilden einen Kegelschnitt, der sowol als $\mathfrak{K}$ (1, 2, 3, 4) wie als $\mathfrak{K}$ (1, 2, 3, 5) betrachtet werden kann; in dem einen Falle entspricht ihm aber ein bestimmter K (I, II, III, IV), in dem andern ein bestimmter K (I, II, III, V) und diese beiden Kegelschnitte werden im allgemeinen nicht auch zusammenfallen, wenn die Geraden 1—5, die wir den Punkten I—V zuweisen, ganz beliebig sind. Sie werden also einen weiteren Punkt P gemeinsam haben. P ist offenbar ein Punkt beider C_3. 1) geht durch P ein K (I, II, III, VI); ihm entspricht ein $\mathfrak{K}$ (1, 2, 3, 6); $\mathfrak{K}$ (1, 2, 3, 4, 5) und $\mathfrak{K}$ (1, 2, 3, 6) haben eine weitere gemeinsame Tangente p. p ist die P gegenüberliegende Doppellinie in Bezug auf das Elementpaar 1—6, I—VI, denn durch P gehen drei Kegelschnitte, K (I, II, III, IV), K (I, II, III, V), K (I, II, III, VI), und die entsprechenden Kegelschnitte der drei Schaaren $\mathfrak{K}$ (1, 2, 3, 4), $\mathfrak{K}$ (1, 2, 3, 5), $\mathfrak{K}$ (1, 2, 3, 6), wovon die ersten beiden zufällig zurammenfallen, haben p zur vierten gemeinsamen Tangente. Durch P geht 2) ein K (I, II, III, VII); der entsprechende ($\mathfrak{K}$ (1, 2, 3, 7) hat mit $\mathfrak{K}$ (1, 2, 3, 4, 5) eine vierte Tangente p' gemeinsam, und es ist wiederum klar, dass P und p' zusammengehörige Doppelelemente in Bezug auf 1, I—2, II—3, III—4, IV—5, V—7 VII sind.

P ist also der uns noch fehlende sechste Durchschnittspunkt der $C_{3(VI)}$ und $C_{3(VII)}$, kann aber nicht Doppelpunkt sein, weil ihm in Bezug auf die zwei Gruppen von sechs Elementpaaren zwei verschiedene Doppellinien, resp. p und p' entsprechen. Die sechste gemeinsame Tangente der beiden Curven $C^3_{(VI)}$ und $C^3_{(VII)}$, die keine gesuchte Doppellinie sein kann, wird reciprok der eben angeführten Construction vermittelst des Kegelschnittes K (I, II, III, IV, V) erhalten. Diese Linie muss notwendig die Nullgerade zum Punkte P sein. Jede C^3 lässt sich ja doch als die Enveloppe der Nullgeraden zu der zugehörigen C_3 auffassen in Bezug auf unendlich viele Nullsysteme, deren Doppeldreiecke alle der C_3 einbeschrieben sind, unter anderen auch in Bezug auf das gesuchte Nullsystem. Dieses liefert aber zu einem und demselben Punkte P nur eine Nullgerade t.

Anm. 2. Es ergibt sich aus dieser Erwägung folgende merkwürdige Beziehung: Hat man fünf beliebige Punkte I—V, und durch

Digitized by Google

jeden Punkt geht eine Gerade, resp. 1—5, so umhüllen die 5 Geraden einen Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ (1, 2, 3, 4, 5), gleiches Doppelverhältniss haben mit ihm resp. ein K (I, II, III, IV) und ein K (I, II, III, V), die einen 4. Punkt P gemeinsam haben. Ebenso haben die zwei Kegelschnitte $\mathfrak{K}$ (1, 3, 3, 4) und $\mathfrak{K}$ (1, 2, 3, 5), welche dem Kegelschnitt K (I, II, III, IV, V) entsprechen, eine vierte Tangente t gemeinsam. t geht durch P.

Um nun unsere Aufgabe, zum Punkte VIII die Nullgerade 8 zu bestimmen, linear lösen zu können, ist es notwendig, dass wir die Curven $C_{3\text{VI}}$, $C_{3\text{VII}}$ und C^3_{VI}, C^3_{VII} linear construiren können. Diese Construction ergibt sich unmittelbar aus der Möglichkeit, den Punkt P und seine Nullgerade t linear zu construiren. Denn wir können aus den sechs Elementpaaren I—VI, 1—6, sechs verschiedene Gruppen von fünf Elementpaaren herstellen, und jede Gruppe ergibt ein solches Elementpaar P. t, von welchem P der $C_{3(\text{VI})}$, t der $C^3_{(\text{VI})}$ angehört.

Da wir also diese beiden Curvenpaare zeichnen können, so lässt sich zu Punkt VIII in folgender Weise seine Nullgerade 8 bestimmen: wir verbinden VIII mit I und bestimmen die zwei weiteren Tangenten, die ausser 1 von I an die C^3_{VI} und die zwei, welche noch an die C^3_{VII} gehen — die Aufgabe, von einer Geraden, deren einen Schnittpunkt mit einer C_3 man kennt, die beiden andern Schnittpunkte zu bestimmen, lässt sich auf mannigfache Art linear lösen; eine Lösung soll weiter unten angegeben werden —, bestimme auf diesen vier Geraden ihre Nullpunkte (einer von den Schnittpunkten ist jedesmal der zu I gehörige Doppelpunkt, der dritte ist eben dieser Nullpunkt. Die 4 Geraden seien t_2, t_2, t_3, t_4, ihre Nullpunkte resp. T_1, T_2', T_3, T_4; der Kegelschnitt, der durch T_1, T_2, T_3, T_4 geht und 1 in I berührt, ist der Nullpunktskegelschnitt zu I in Bezug auf das gesuchte System; er schneide die Gerade VIII—I in A; dann ist A der Nullpunkt dieser Geraden, in der gleichen Weise können wir den Nullpunkt B der Geraden VIII—II den Nullpunkt C der Geraden VIII—III den Nullpunkt D der Geraden VIII—IV bestimmen. Der Kegelschnitt, der durch VIII, A, B, C, D geht, ist der Nullpunktskegelschnitt zu VIII, seine Tangente 8 in VIII ist die Nullgerade zu VIII. Die Bestimmung des Nullpunktes VIII, wenn die Gerade 8 gegeben ist, ist reciprok.

II.

Wir gehen nun zu den Anwendungen des Systems über. Aus dieser Construction eines ebenen Nullsystems aus sieben seiner

Digitized by Google

Elementpaare ergeben sich einige besonders einfache Lösungen von Problemen der linearen Construction von Curven dritter Ordnung:

1) Zu acht Punkten eines Curvenbüschels den neunten zu finden:

Die 8 Punkte seien benannt mit I, II, III, IV, V, A, B, C. Man zeichne das Dreieck ABC und mache es zum Doppeldreieck eines beliebigen Nullsystems. Die Nullgeraden der 5 anderen Punkte seien resp. 1, 2, 3, 4, 5. Die beiden Kegelschnitte K (I, II, III, IV) und K (I, II, III, V), die gleiches Doppelverhältniss mit $\mathfrak{K}$ (1, 2, 3, 4, 5) haben, jenachdem man diesen Kegelschnitt als $\mathfrak{K}$ (1, 2, 3, 4) oder als $\mathfrak{K}$ (1, 2, 3, 5) betrachtet, schneiden sich in einem vierten Punkte P, der der gesuchte ist.

2) eine C_3 zu construiren aus 9 gegebenen Punkten I, II, III, IV, V, VI, A, B, C.

Man stelle wieder ein Nullsystem mit dem Doppeldreieck A, B, C her. Die Nullgeraden der anderen sechs Punkte seien resp. 1, 2, 3, 4, 5, 6. Die Gerade 6 ist Tangente an einen $\mathfrak{K}$ (1, 2, 3, 4) und an einen $\mathfrak{K}$ (1, 2, 3, 5); die beiden entsprechenden Kegelschnitte K (I, II, III, IV) und K (I, II, III, V) schneiden sich in einem weiteren Punkte P, der zugleich ein Punkt der C_3 ist.

3) wenn man von einer Geraden x einen Durchschnittspunkt X_1 mit einer C_3 kennt, die beiden andern Durchschnittspunkte X_2 und X_3 zu construiren. Man construire ein beliebiges Nullsystem, dessen Doppeldreieck der C_3 einbeschrieben ist, und von welchem x, X_1 ein Elementpaar ist. Dann bestimme man von den unendlich vielen der C_3 einbeschriebenen Doppeldreiecken, die man zur Erzeugung derselben Nullgeradenenveloppe benutzen kann, dasjenige, von welchem x eine Seite ist. Die beiden auf x liegenden Ecken desselben sind die gesuchten Punkte X_2 und X_3.

4) zu einer beliebigen Tangente p einer C^3 den Berührungspunkt P zu construiren. Zum Verständniss der Lösung müssen wir wieder auf die Construction der Curven C_3 und C^3 aus sechs Elementpaaren zurückgreifen. Ein Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ (1, 2, 3, 4) gab mit den beiden Scharen der $\mathfrak{K}$ (1, 2, 3, 5) und $\mathfrak{K}$ (1, 2, 3, 6) Anlass zu einer Curve vierter Classe; die zwei weiteren Tangenten, welche diese Curve ausser den drei Doppeltangenten 1, 2, 3 mit $\mathfrak{K}$ (1, 2, 3, 4) gemeinsam hatte, waren Tangenten der gesuchten C^3, die also mit diesem Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ (1, 2, 3, 4) die Tangenten 1, 2, 3, 4 und eben diese beiden Tangenten, t_1 und t_2, gemeinsam hatte. Nun berührt die Gerade 4 einen $\mathfrak{K}$ (1, 2, 3, 5) und einen $\mathfrak{K}$ (1, 2, 3, 6); ihnen entsprechen resp. ein K (I, II, III, V) und ein K (I, II, III,

Digitized by Google

VI), die sich in einem vierten Punkte P schneiden, durch den auch ein bestimmter K (I, II, III, IV) geht. Der entsprechende Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ (1, 2, 3, 4) gibt zu einer Curve vierter Classe Anlass, die die mit diesem $\mathfrak{K}$ (1, 2, 3, 4) die drei Doppeltangenten 1, 2, 3 die Tangente 4 und dann nur noch eine weitere Tangente A gemeinsam hat. Folglich hat die C^3 mit diesem $\mathfrak{K}$ (1, 2, 3, 4) nur fünf Tangenten gemeinsam, und man kann sich mit der Erwägung, dass die Kegelschnitte einer Schaar durch continuirliche Veränderung eines derselben sich beschreiben lassen, leicht klar machen, dass die sechste Tangente mit 4 zusammenfällt und die Gerade 4 in ihrem Berührungspunkte mit $\mathfrak{K}$ (1, 2, 3, 4) schneidet, der also auch der Berührungspunkt der C^3 ist. Daraus ergibt sich die folgende Construction der Aufgabe, zu einer beliebigen Tangente einer C^3 den Berührungspunkt zu construiren. Man beschreibe der C^3 ein beliebiges Dreieck um und mache es zum Doppeldreieck eines beliebigen Nullsystems. Man greife fünf beliebige Tangenten mit ihren Nullpunkten.

1, I, 2, II, 3, III, 5, V, 6, VI, heraus, wähle die Tangente p, deren Berührungspunkt P wir bestimmen wollen, und ihren Nullpunkt $\mathfrak{P}$ zum Elementpaar 4, IV und bestimme in der eben erläuterten Weise den zu 4 gehörigen $\mathfrak{K}$ (1, 2, 3, 4), der eben p in diesem Punkte P berührt. Auf die reciproke Construction brauche ich wol nicht weiter einzugehen.

III.

Unter einem einer C_3 einbeschriebenen Nullsystembüschel wollen wir für die Folge die Gesamtheit aller Nullsysteme verstehen, zu denen die C_3 gemeinsame Nullpunktscurve ist, und die sechs gegebene Elementpaare gemeinsam haben (deren Nullpunkte also auf dieser C_3 liegen); alle Doppeldreiecke dieser Systeme sind also dieser C_3 einbeschrieben. Für die Folge werden wir den Begriff des Nullsystembüschels auch auf die Gesamtheit dieser Doppeldreiecke übertragen. Die Angehörigkeit zweier solchen Dreiecke zu einem und demselben Nullsystembüschel soll dadurch ausgedrückt sein, dass wir die Dreiecke „coordinirt" nennen.

Es soll zunächst folgender Satz bewiesen werden, der die Umkehrung der eben gewonnenen Beziehung zwischen Nullpunktscurve und Nullgeradenenveloppe bildet:

Jede einfach unendliche Mannigfaltigkeit erster Ordnung von Dreiecken, die einer C_3 einbeschrieben und einer C^3 umschrieben

Digitized by Google

sind, enthält alle Dreiecke eines den beiden Curven ein- resp. umschriebenen Nullsystembüschels. Eine solche Mannigfaltigkeit ist dann jedenfalls von der ersten Ordnung, wenn jeder Punkt X der C_3 Eckpunkt eines einzigen Dreiecks ist Denn alle Punkte einer C_3 machen eine einfach unendliche Mannigfaltigkeit vom dritten Grade aus. Nun bilden doch immer drei von den Punkten der Curve die Ecken eines einzigen Dreiecks. Folglich wird die Mannigfaltigkeit der Dreiecke einfach unendlich vom ersten Grade sein. Man kann das ja auch daraus erkennen, dass aus dem Büschel der Nullsysteme ein System eindeutig bestimmt ist, sobald man einer bel. Geraden irgend einen ihrer Punkte M als Nullpunkt zuweist. Es gibt also genau soviel Dreiecke, als eine Gerade m Punkte hat. Auf dieser Tatsache beruht der nachfolgende Beweis des Satzes:

Irgend ein Punkt A_x der C_3 ist Eckpunkt eines Dreiecks $A_xB_xC_x$. Dann geht an die C^3 durch A_x noch eine Tangente a_x. Irgend ein anderer Punkt $A\lambda$ ist ebenfalls sowol Eckpunkt eines Dreiecks, als Schnittpunkt einer dritten Tangente $a\lambda$. Nehmen wir nun auf $a\lambda$ einen beliebigen Punkt M an und construiren alle diejenigen Kegelschnitte, welche durch M, $A\lambda$ gehen und je einem Dreieck unserer gegebenen Mannigfaltigkeit umschrieben sind, so erhalten wir genau so viel Kegelschnitte, als Dreiecke vorhanden sind, also eine einfach unendliche Mannigfaltigkeit vom ersten Grade. Eine solche Manigfaltigkeit ist aber ein Kegelschnittbüschel, und ein solcher wird ausser den zwei Punkten M, $A\lambda$ noch zwei Punkte Q_1 Q_2 als Grundpunkte haben (Dass sie nicht immer imaginär sein können, werden wir alsbald erkennen.) Dann haben die Geraden MQ_1 und MQ_2 offenbar die Eigenschaft, dass, wenn man alle Nullsysteme bildet, in Bezug auf welche $A\lambda$, $b\lambda$ ein Paar zusammengehöriger Elemente und je ein Dreieck unserer Mannigfaltigkeit das Doppeldreieck ist, Q_1 und Q_2 die Nullpunkte zu MQ_1 und MQ_2 in Bezug auf alle diese Systeme sind. Nehmen wir also zwei von diesen Nullsystemen und bilden die gemeinsame Nullpunktscurve, so geht dieselbe allemal durch diese Punkte Q_1, Q_2, die also gleichzeitig allen diesen gemeinsamen Nullpunktscurven angehören, zu denen diese Mannigfaltigkeit von Nullsystemen Anlass gibt. Nimmt man nun aber statt M einen beliebigen andern Punkt M' auf $A\lambda M$, so findet man, dass auch M' zu zwei allen diesen Curven gemeinsamen Punkten Q_1' und Q_2' Anlass gibt.

Ein dritter Punkt M'' würde ebenso zu zwei solchen Punkten Q_1'' und Q_2'' geführt haben. Also: alle diese Curven haben unendlich viele Punktpaare gemeinsam, fallen also in eine einzige Curve zusammen. Da ferner die gemeinsame Nullpunktscurve zweier Systeme

Digitized by Google

auch ihren Doppeldreiecken umschrieben ist, diese Curve aber, die wir eben erhalten haben, gemeinsame Nullpunktscurve zu allen Nullsystemen ist, die sich mit Hilfe der gegebenen Dreiecke als Doppeldreiecke und des weiteren Elementpaars $A\lambda$, $a\lambda$ bilden lassen, so müssen dieser Curve alle gegebenen Dreiecke einbeschrieben sein, d. h. sie deckt sich mit der gegebenen C_3. Hat man nun ein Dreieck Δ_1 und sucht zu der C_3 die Nullgeradenenveloppe in Bezug auf das Dreieck Δ_1 als Doppeldreieck und $A\lambda$, $a\lambda$ als Elementpaar, so erhält man eine Curve $C^3\Delta_1$. Nimmt man ein Dreieck Δ_2 und behält $A\lambda$, $a\lambda$ als Elementpaar bei, so ist in Bezug auf diese beiden Systeme, das mit dem Dreieck Δ_1 und das mit dem Dreieck Δ_2, wie wir eben bewiesen haben, die gemeinsame Nullpunktscurve, also

$$C^3\Delta_2 \equiv C^3\Delta_1$$

alle Systeme haben auch dieselbe Nullgeradenenveloppe, die also notwendig die Enveloppe aller unserer Dreiecke sein muss, womit unser Satz bewiesen ist.

Wir können aus diesem Beweise über die Nullpunkte dreier Tangenten der C^3, die von einem Punkte der Ebene ausgehen, eine Beziehung ableiten. Die zwei weiteren Tangenten der C^3, die ausser $a\lambda$ von dem Punkte M ausgehen, haben ihre Nullpunkte in Q_1 und Q_2 und $A\lambda$, M, Q_1, Q_2 sind die Grundpunkte eines Kegelschnittbüschels, der alle Doppelpunkttripel des Nullsystems auf der C_3 ausschneidet. Er wird also auch das Doppelpunkttripel ausschneiden, von dem eine der drei Tangenten, die von M ausgehen, z. B. $a\lambda$ eine Seite ist; $a\lambda$ schneide C_3 ferner in den Punkten A_μ und B_μ, die also Punkte eines Tripels sind; der dritte zugehörige Doppelpunkt sei C_μ. Dann muss der Kegelschnitt des Büschels, der dieses Tripel ausschneidet, in die Gerade $a\lambda$, die die drei Punkte M, A_μ, B_μ enthält, und eine zweite Gerade die gegenüberliegende gemeinsame Sehne $Q_1 Q_2$ zerfallen; ihr dritter Schnittpunkt mit der C_3 ist also dieser Doppelpunkt C_μ. Daraus ergibt sich folgende neue Beziehung zwischen den Punkten einer C_3 und den Tangenten einer Nullgeradenenveloppe C^3.

„Nimmt man eine beliebige Tangente $a\lambda$ der C^3 und construirt von jedem ihrer Punkte das Paar weiterer Tangenten, so gehen die Verbindungslinien der zugehörigen Nullpunktpaare durch denjenigen Punkt C_μ der C_3, der der Tangente $a\lambda$ als Doppelpunkt gegenüberliegt."

Digitized by Google

IV.

Ueber Nullsystemnetze und ihre Beziehung zu Steiner'schen Punktpaarsystemen.

Sei einer C_3 ein beliebiges Nullsystembüschel einbeschrieben. Ein Dreieck desselben sei ABC, ein anderes $A_1B_1C_1$. A_1B_1 schneide die C_3 noch in D_1; dann ist der Punkt C_1 den vier Punkten A, B, C, D_1 beigeordnet. Folglich schneiden sich, wenn D der dritte Schnittpunkt der Seite AB mit der C_3 ist, CD_1 und C_1D in einem und demselben Punkte M_1 der Curve. Behalten wir das Dreieck ABC bei, ersetzen aber das Dreieck $A_1B_1C_1$ durch das Dreieck $A_2B_2C_2$, so haben analog, wenn D_2 der dritte Schnittpunkt von A_2B_2 mit der Curve ist, DC_2 und CD_2 einen und denselben dritten Schnittpunkt mit der C_3 gemeinsam. Nehmen wir irgend ein Dreieck $A_\mu B_\mu C_\mu$, so schneiden sich ebenso DC_μ und CD_μ in einem Punkte der Curve (wobei D_μ der dritte Schnittpunkt von $A_\mu B_\mu$ ist). Man bekommt also alle Punktepaare $C_\mu D_\mu$, zu welchen ein Nullsystem Anlass gibt, indem man ein Punktpaar $D—C$ mit einem beliebigen Punkt X der Curve verbindet und ihn die ganze Curve durchlaufen lässt. Die dritten Schnittpunkte von DX und CX resp. C_μ und D_μ, sind dann jedesmal wieder ein entsprechendes Punktpaar.

Daraus geht hervor: alle Punktpaare $C_\mu D_\mu$ eines Nullsystembüschels bilden ein Steiner'sches Punktpaarsystem. In der Folge wird öfters die Ausdrucksweise wiederkehren: „ein Nullsystembüschel hat ein bestimmtes Punktpaarsystem". Zwei Dreiecke wollen wir coordinirt nennen, wenn ihre Punktpaare demselben System angehören. Alle Dreiecke, die ein Punktpaar gemeinsam haben, wollen wir einen Dreieckbüschel nennen. Es ist interessant, dass durch einen solchen Dreieckbüschel offenbar auch alle Punktpaare eines Punktpaarsystems erhalten werden können. In dieser Beziehung könnte man einen solchen Büschel einen ausgearteten Nullsystembüschel nennen. Alle Dreiecke, die einem und demselben Dreiecke, also auch unter sich, coordinirt sind, wollen wir ein Dreiecksnetz nennen, alle Nullsysteme, zu denen ein solches Netz Anlass gibt, ein Nullsystemnetz. Zwei Dreiecke eines Netzes bestimmen eindeutig einen Nullsystembüschel. Denn seien die beiden Dreiecke $A_\varkappa B_\varkappa C_\varkappa$, $A_\mu B_\mu C_\mu$ mit resp. den dritten Seitenschnittpunkten $\mathfrak{C}_\varkappa$, $\mathfrak{B}_\varkappa$, $\mathfrak{A}_\varkappa$, $\mathfrak{C}_\mu$, $\mathfrak{B}_\mu$, $\mathfrak{A}_\mu$ (wo $\mathfrak{C}_\varkappa$ der dritte Schnittpunkt von $A_\varkappa$, $B_\varkappa$ sei u. s. w.); dann ist für die Construction des Nullsystems erstens das Dreieck $A_\varkappa B_\varkappa C_\alpha$ gegeben, zweitens sind zu drei Geraden $A_\mu B_\mu$, $B_\mu C_\mu$, $A_\mu C_\mu$ ihre Nullpunkte resp. $\mathfrak{A}_\mu$, $\mathfrak{B}_\mu$, $\mathfrak{C}_\mu$ gegeben, also mehr als

Digitized by Google

nötig ist, um ein System zu construiren; ein zweites System des Büschels erhält man, wenn $A_x B_x C_x$ mit $A_\mu B_\mu C_\mu$ vertauscht. Wenn man ein beliebiges Punktpaar $C_\mu D_\mu$ auf der Curve annimmt, so ist bekanntlich damit das ganze Punktpaarsystem, also auch das zugehörige Dreieck- und Nullsystemnetz bestimmt. Ist ein bestimmtes Nullsystem gegeben, von welchem ein Dreieck $A_\mu B_\mu C_\mu$ ist, ist D_μ der dritte Schnittpunkt von $B_\mu C_\mu$ und man sucht dasjenige Dreieck des Systems, das in D_μ seinen Eckpunkt hat, so hat man nur die Nullgerade zu demjenigen Punkte D_ν' zu construiren, der dem Punkte D_μ entspricht, wenn man ihn in dem Punktpaarsystem, das dem Nullsystem zugrunde liegt, als Punkt C_ν auffasst.

Diesen Punkt D_ν' kann man, wie man erkennt, wenn man einen Punkt G dem Punkte D_μ mehr und mehr nähert, in der Weise construiren, dass man in D_μ die Tangente zeichnet und ihren Tangentialpunkt E mit C_μ verbindet; diese Linie schneidet die Curve zum dritten Mal in D_ν'. In einem Falle fällt D_ν' mit C_μ zusammen, dann, wenn C_μ und D_μ' conjugirte Punkte sind. Unter den drei conjugirten Nullsystemnetzen wollen wir die drei Netze verstehen, die als Punktpaarsysteme je eines der drei conjugirten Punktpaarsysteme haben. Ein Dreieck eines solchen Netzes hat bekanntlich die Eigenschaft, dass die dritten Schnittpunkte der drei Seiten auf einer Geraden liegen. Wir werden diese drei Netze weiter unten eingehend studiren, im voraus aber von der eben erwähnten Eigenschaft der Dreiecke schon Gebrauch zu machen haben.

V.

Nun wollen wir zwei Anwendungen von dem in III bewiesenen Satze machen.

1) Beschreiben wir allen Dreiecken eines einer C_3 einbeschriebenen Nullsystembüschels die Dreiecke ein, die gleichzeitig der C_3 einbeschrieben sind, verbinden also bei jedem Dreieck die dritten Schnittpunkte der drei Seiten unter einander, dann erhalten wir wieder die Dreiecke eines der C_3 einbeschriebenen Nullsystembüschels. Die Zahl der so erhaltenen Dreiecke ist selbstverständlich genau so gross, wie die Zahl der Dreiecke des gegebenen Nullsystems, deren jedem je eines einbeschrieben ist, also bilden sie auch eine einfach unendliche Mannigfaltigkeit.

Zweitens sind sie alle einer C^3 umschrieben, wie aus folgender Erwägung hervorgeht: Ein beliebiger Punkt $\mathfrak{A}$ der Curve hat eine Gerade BC zur Nullgeraden in Bezug auf den gegebenen System-

Digitized by Google

büschel, die Seite eines Doppeldreiecks ABC ist. Die Nullpunkte der beiden andern Seiten des Dreiecks seien $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$; dann sind $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{A}\mathfrak{C}$ zwei Tangenten der gesuchten Enveloppe. Ausser den zwei Tangenten durch $\mathfrak{A}$ gibt es noch eine dritte, die zwei Nullpunkte eines andern andern Doppeldreiecks verbindet. Sind nämlich die Nullpunkte zweier zusammengehörigen Doppelseiten b_1 und c_1, die sich in A_1 schneiden mögen, $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{C}_1$, und sind $A_x B_x C_x$ die Eckpunkte eines beliebigen Doppeldreiecks, dann liegen also A_1, $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{C}_1$ A_x, B_x, C_x auf einem Kegelschnitt, dem Nullpunktskegelschnitt zu A_1, also ist der dritte Schnittpunkt $\mathfrak{A}_2$ von $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{C}_1$ beigeordneter Rest zu A_1, A_x, B_x, C_x. Solcher Punkttripel, wie A_1, $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{C}_1$ gibt es aber ebenso viele als es Curvenpunkte gibt. Sobald der Punkt A_1 gegeben ist, ist ein solches Tripel A_1, B_1, C_1 und damit auch der beigeordnete Rest $\mathfrak{A}_2$ eindeutig bestimmt. Ist, wie in unserem Falle, umgekehrt der beigeordnete Rest $\mathfrak{A}$ gegeben, so erledigt sich die Frage nach einer weiteren Tangente durch $\mathfrak{A}$ mit der Frage nach der Existenz eines solchen Punktes A_1, der zusammen mit $A_x B_x^* C_x$ dem Punkte $\mathfrak{A}$ beigeordnet ist. Solcher Punkte aber gibt es einen einzigen, also auch eine weitere Tangente durch $\mathfrak{A}$. Die Curve ist also dritter Classe. Damit aber sind die Kriterien für die Anwendbarkeit des Satzes III gegeben. Die Dreiecke bilden einen neuen Nullsystembüschel. In der Tat unterscheiden sich die drei Tangenten, die von einem beliebigen Punkte $\mathfrak{A}$ der C_3 ausgehen, in der Weise, dass zwei von ihnen zusammgehören als Linien, die $\mathfrak{A}$ mit einem andern Nullpunkte verbinden, die dritte zwei anderweitige Nullpunkte verbindet und $\mathfrak{A}$ als dritten Schnittpunkt enthält; das ist die Nullgerade zu $\mathfrak{A}$ in Bezug auf den neuen Systembüschel.

Wir wollen der Kürze wegen für die Folge die Punkte eines Punktpaars unterscheiden in „Eckpunkt" (eines Dreiecks) und „Nullpunkt" (der gegenüberliegenden Seite) und bei zwei Punktpaaren von gleichartigen Punkten (Nullpunkten oder Eckpunkten) und ungleichartigen Punkten (1 Nullpunkt und 1 Eckpunkt) sprechen.

VI.

Ueber Grassmann'sche Dreiecke.

Aus der eben angestellten Betrachtung ergibt sich ohne weiteres die Grassmann'sche Lösung der Aufgabe: ein Dreieck zu construiren das einer C_3 einbeschrieben ist und durch drei beliebige auf der C_3 gegebenen Punkte geht. Wir müssen die Lösung hier deswegen

Digitized by Google

analysiren, weil die Betrachtungen des folgenden Paragraphen sich darauf stützen. Das Dreieck der gegebenen Punkte sei $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ (Fig. 2).

$\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ habe den dritten Schnittpunkt c, der von $\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ sei a, der von $\mathfrak{A}\mathfrak{C}$ b. Denken wir uns nun, $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ sei Doppeldreieck eines Nullsystembüschels, der einem andern Nullsystembüschel einbeschrieben ist, von dem $A_1 B_1 C_1$ ein Doppeldreieck sei; C_1 liege $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ gegenüber u. s. w. Dann ist das Punktpaarsystem des eingeschriebenen Nullsystembüschels gegeben durch $\mathfrak{C}$ c ($\mathfrak{C}$ Eckpunkt, c Nullpunkt); das des umschriebenen Dreiecks ist gegeben durch $C_1\mathfrak{C}$ (C_1 Eckpunk,t $\mathfrak{C}$ Nullpunkt). Betrachten wir aber in dem umschriebenen System C_1 als Nullpunkt, so entspricht ihm bekanntlich als Eckpunkt der Punkt c. Soll also die Aufgabe gelöst werden, zu $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ das Dreieck $A_1 B_1 C_1$ zu construiren, so läuft die Aufgabe darauf hinaus, ein Punktpaarsystem zu construiren, wenn man zu einem gesuchten Punkte C_1 desselben seinen Eckpunkt c und seinen Nullpunkt $\mathfrak{C}$ kennt, jenachdem man ihn selbst als Nullpunkt oder Eckpunkt des Systems betrachtet. Nun ist, wie wir am Ende des § IV. ausgeführt haben, der dritte Schnittpunkt der Verbindungslinie $\mathfrak{C}$ c mit der C_3, C', der Tangentialpunkt von C_1. Die vier Tangenten von c an die Curve ergeben also die 4 Berührungspunkte C_1, C_2, C_3, C_4, die Eckpunkte der vier gesuchten Dreiecke sind. Also:

Zu einem Nullsystembüschel giebt es ein einbeschriebenes, aber vier umschriebene Nullsystembüschel. Da das Punktpaarsystem eines Büschels, welcher einem andern Nullsystembüschel A einbeschrieben ist, sich aus dem Punktpaarsystem von A ohne Zuhilfenahme eines Doppeldreiecks ableiten lässt, so können wir folgenden Satz aussprechen, der sich auch noch anders beweisen lässt:

„Alle Nullsystembüschel, welche den Nullsystembüscheln eines Netzes einbeschrieben sind, bilden wieder ein Netz.“ Diesen geometrischen Sinn hat es, wenn wir in der Folge sagen werden, ein Netz ist einem andern Netze, oder auch, ein Punktpaarsystem ist einem andern Punktpaarsystem ein- oder umschrieben.

Zwischen zwei solchen Punktpaarsystemen besteht ein einfacher Zusammenhang: in dem umschriebenen Systeme entspricht dem Punkte C_1 als einem Eckpunkt der Punkt $\mathfrak{C}$, als einem Nullpunkt der Punkt c (s. Fig. 1); in dem einbeschriebenen Systeme entspricht dem Eckpunkt $\mathfrak{C}$ der Nullpunkt c. Daraus ergiebt sich folgender Satz:

„Bestimmen wir zu jedem Punkte eines Punktpaarsystems seinen Nullpunkt und seinen Eckpunkt, so ergeben alle so construirten Punktpaare das einbeschriebene Punktpaarsystem.“

Digitized by Google

VII.

2) Mit jedem Nullsystemnetz ist noch ein zweites gegeben. Sei C Eckpunkt und D zugehöriger Nullpunkt eines solchen Netzes, so erhalten wir, wenn wir die Functionen von D und C vertauschen, also C zum Nullpunkt, D zum Eckpunkt machen, ein zweites Netz. Selbstverständlich geht dann dieser Rollenwechsel innerhalb sämtlicher Punktpaare des Systems vor sich. Zwei solche Nullsystemnetze, die dasselbe Punktpaarsystem haben, nur dass Nullpunkt und Eckpunkt in der eben erläuterten Weise vertauscht sind, wollen wir zwei reciproke Netze nennen, in dem gleichen Sinne von zwei reciproken Nullsystemen und zwei reciproken Dreiecken sprechen. Auf die gegenseitigen Beziehungen zweier solcher Netze werden wir weiter unten zu sprechen kommen (§ IX). Für die folgenden Betrachtungen haben wir zunächst einen Satz zu beweisen: „Die Netze, die zwei reciproken Netzen einbeschrieben sind, sind wieder reciprok."

Zum Beweise nehmen wir ein Punktpaar $C-D$ und betrachten zwei reciproke Dreiecke, die dieses Punktpaar gemeinsam haben. Ist ABC das eine Dreieck (s. Fig. 2), so ist F Eckpunkt, G zugehöriger Nullpunkt des einbeschriebenen Punktpaarsystems. Zum reciproken Dreieck wollen wir das Dreieck BED wählen, welches in der Tat D zum Eckpunkt, C zum Nullpunkt hat. Das Dreieck, welches diesem Dreieck einbeschrieben ist, ist ACG; von dem einbeschriebenen Punktpaarsystem ist also in der Tat G Eckpunkt, F zugehöriger Nullpunkt, womit unser Satz bewiesen ist.

VIII.

Ein curventheoretisches Problem.

Anmerkung. Statt von „umschriebenen und einbeschriebenen Nullsystembüscheln" zu sprechen, werden wir im folgenden auch die Ausdrücke: „Ueber- und Unterordnung" gebrauchen. Es soll folgendes Problem in Angriff genommen werden: wenn wir von einem beliebigen Punkte P oder C_3 die vier Tangenten an dieselbe legen, von jedem der vier Berührungspunkte aus den Process wiederholen und so fortfahren in infinitum, bekommen wir schliesslich alle Tangenten der Curve oder nur eine directe Mannigfaltigkeit?

Wir construiren zu P einen seiner drei conjugirten Punkte P_1 und zeichnen wir ein beliebiges Dreieck mit P als Eckpunkt und P_1 als gegenüberliegenden Nullpunkt; bei einem solchen conjugirten

Digitized by Google

Dreiecke artet bekanntlich das einbeschriebene Dreieck in eine gerade Linie aus. Weiter geht also die „Unterordnung" nicht. Ziehen wir von P aus die vier Tangenten t_1, t_2, t_3, t_4, deren Berührungspunkte resp. Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 sein mögen, ziehen P_1Q_1, P_1Q_2, P_1Q_3, P_1Q_4, welche Geraden die C_3 noch einmal in P_1', P_2', P_3', P_4' schneiden mögen, so sind nach dem vorhergehenden P_1P_1', P_1P_2', P_1P_3', P_1P_4' Punktpaare der vier übergeordneten Netze. Ziehen wir von P_1', P_2', P_3', P_4' wieder die Tangenten und wiederholen den eben angestellten Process, so ergiebt jeder einzelne Berührungspunkt ein neues Berührungspunktquadrupel. Es ist bei beliebiger Fortsetzung des Processes nie möglich, dass ein Berührungspunkt $P^{(n)}$ mit einem früher schon gefundenen Punkte $P^{(m)}$ zusammenfalle, denn wäre es möglich, dann würde man also von einem Netze $P_1P^{(n)}$ aus durch fortgesetztes Ueberordnen zu einem Netze $P_1P^{(m)}$ kommen, das mit dem ersteren entweder identisch ist oder ihm reciprok wäre. Ginge man also von $P_1P^{(m)}$ aus und ordnete fortgesetzt unter, so müsste man schliesslich auch zu $P_1P^{(n)}$ kommen, und weil reciproke Netze auch reciproke Unterordnungen haben, man also keine von einander verschiedenen Punktpaarsysteme bekommt, wenn man von zwei reciproken Systemen die Unterordnungen bildet, so müsste man nun, wenn man das Unterordnen fortsetzte, schliesslich wieder zu dem Punktpaarsystem $P_1P^{(m)}$ oder $P_1P^{(n)}$ kommen, würde sich also in einem Cirkel bewegen, der weder beim Ueberordnen noch beim Unterordnen verlassen würde. Nun haben wir aber doch zum Ausgangspunkt unseres Ueberordnungsprocesses die gerade Linie genommen; wenn wir also von einem der erreichten Punktpaare, $P_1P^{(m)}$, den Rückweg einschlagen, dann müssen wir auch wieder auf die gerade Linie zurückkommen. Dann ist aber ein solcher Cirkel nicht möglich, da mit der geraden Linie das Unterordnen aufhört. Mit dieser Annahme widerlegt sich auch die Annahme, dass wir schliesslich alle Punkte der Curve erhalten werden. Denn wählen wir zum Ausgangspunkt statt des Punktes P einen anderen der zu P_1 conjugirten Punkte, P', und unterziehen das Punktpaar P_1P' dem Process fortgesetzter Ueberordnung, so kann in dieser Reihe der Berührungspunkte keiner mit einem Punkte der anderen Reihe zusammenfallen; denn würde das der Fall sein, dann hätten ja die beiden Reihen ein gemeinsames Punktpaar. Wäre das der Fall, dann müsste man aus der einen Reihe durch fortgesetztes Ueberordnen in die andere Reihe hineinkommen; das ist aber unmöglich; denn jedes Dreieck der einen Reihe führt durch fortgesetztes Unterordnen schliesslich auf die gerade Linie, die durch Ueberordnen aus der anderen Reihe nicht erhalten werden kann, weil der Process der Ueberordnung bei einem Dreieck überhaupt nicht zu einer geraden Linie führen kann. Es ist möglich, dass die

Digitized by Google

Ueberordnungen eines Dreiecks alle vier imaginär werden. Nicht aber ist möglich, dass eine Ueberordnung in eine gerade Linie ausartet. Es giebt also, weil ein Punkt P_1 drei conjugirte Punkte P, P', P'' hat, jedenfalls drei solche Berührungspunktgruppen, die keine gemeinsamen Punkte haben können. Es lassen sich aber ohne Schwierigkeit solcher Gruppen unendlich viele aufstellen. Die Reihe der auf einander folgenden Punkte der einen conjugirten Gruppe sei P, P', P'', . . . $P^{(n)}$ und zwar sei das die Reihe in absteigender Linie, so dass $P^{(n)}$, P_1 conjugirt ist; die anderen zwei conjugirten Punkte seien $P_1^{(n)}$, $P_2^{(n)}$. Die auf einander folgenden Punktpaare sind dann also PP_1, $P'P_1$, $P''P_1$, . . . $P^{(n)}P_1$.

Greifen wir nun ein Punktpaar $P_1P^{(x)}$ heraus und bestimmen zu $P^{(x)}$ den Punkt, der ihm entspricht in dem Punktpaarsystem gegeben durch $P_1P^{(y)}$, so zwar, dass $P^{(y)}P^{(x)}$ und $P_1P_x^{(y)}$ sich in einem Punkte der Curven schneiden. — Dann sind auch $P_1^{(x)}$ und $P_x^{(y)}P^{(y)}$ Punktpaare eines Systems. — Unterziehen wir nun das Punktepaar $P_x^{(y)}P^{(x)}$ dem Process der Unterordnung unter Beibehaltung von $P_x^{(y)}$ als festem Centrum, dann wäre es denkbar, dass auch alle folgenden Berührungspunkte $P^{(x)}'$, $P^{(x)}''$. $P^{(x)\,(n)}$ mit Punkten aus der Ueber- und Unterordnungsreihe von $P_1^{(y)}$ coincidiren würden; dann würde diese neue Reihe also keine Punkte ergeben, die nicht auch schon in der ersten Reihe enthalten sind. Nur die Aufeinanderfolge der Punkte wäre eine andere. Nun ist $P_x^{(y)}$ letzter Punkt der Reihe $P_x^{(y)}P^{(y)}$; sollten die Reihen dieselben Punkte ergeben, so müsste $P_x^{(y)}$, also auch von $P_1^{(y)}$ aus erreicht werden können. Ganz analog der Construction des Punktes $P_x^{(y)}$ hätten wir aber auch einen Punkt $P_\mu^{(y)}$, $P_\nu^{(y)}$ construiren können, und weil diese Punkte den Punkten der Reihe $PP'P''$ eindeutig entsprechen, so müssten diese neuen Punkte schliesslich alle Punkte der ersten Reihe ergeben. Nun war aber das Punktpaar $P_1P^{(y)}$ aus seiner Reihe ganz willkürlich gewählt worden, wir konnten auch irgend ein anderes Punktpaar $P_1P^{(k)}$ nehmen; dann wären wir analog zu einer Punktreihe $P_x^{(k)}$, $P_\mu^{(k)}$, $P_\nu^{(k)}$ gekommen, von der wir dann ebenfalls Uebereinstimmung mit der ersten Punktreihe und damit auch mit der zweiten annehmen müssten. Nun ist es nicht denkbar, dass eine Punktreihe sich decken kann mit einer anderen Reihe von Punkten, die im Vergleich zu der ersteren eine höhere unendliche Mannigfaltigkeit darstellt. Die Unhaltbarkeit dieser Annahme lässt sich aber auch noch unmittelbarer zeigen.

Ordnen wir unter und über von $P^{(y)}P_x^{(y)}$ aus, das eine Mal mit $P^{(y)}$ als festem Centrum, das andere Mal mit $P_x^{(y)}$, so müssten wir, wenn unsere Annahme richtig wäre, beide Male dieselben Punkte

Digitized by Google

bekommen. Wäre also z B. P_x ein Punkt, der von $P^{(g)}$ aus erreicht wird, so müsste derselbe Punkt, vielleicht allerdings nach einer grösseren oder kleineren Zahl von Ueber- oder Unterordnungen, oder überhaupt das eine Mal durch Ueberordnung, das andere Mal durch Unterordnung, auch von $P_x^{(g)}$ aus erhalten werden können. Sei nun aber der nächste Punkt, den wir beim Unterordnen mit $P_x^{(g)}$ als Centrum nach $P^{(g)}$ bekommen, $P^{(g)'}$; dann kann $P^{(g)'}$ nicht auch von $P^{(g)}$ aus erreicht werden. Denn $P^{(g)}P_1^{(g)}$ und $P^{(g)}P^{(g)'}$ sind Punktpaare desselben Punktpaarsystems. Entspricht $P^{(g)}$ als Eckpunkt $P_x^{(g)}$ als Nullpunkt, so entspricht ihm als Nullpunkt der Punkt $P^{(g)'}$ als Eckpunkt oder umgekehrt.

Damit ist aber nachgewiesen, dass von der Punktreihe $P^{(g)}$, $P^{(g)'}$ höchstens eine endliche Anzahl mit der Punktreihe P, P^1 zusammenfallen kann. Indem wir von der unendlichen Anzahl der übrigen Punkte einen beliebigen mit P_1 verbinden, erhalten wir eine Ueber- und Unterordnungsreihe, die mit keiner der drei conjugirten Reihen identisch sein kann (der Beweis, dass diese Reihe auch nicht mit den andern beiden conjugirten Reihen übereinstimmen kann, ist dem eben geführten analog). Auch die Unterordnung kommt also bei einer solchen Reihe niemals zu einem Abschluss. Solcher Reihen können wir also beliebig viele construiren. Bei einem beliebigen Dreiecke, das man einer Curve dritter Ordnung einbeschreibt, führt also weder die Ueber- noch die Unterordnung je zu einem Abschluss.

Nun haben wir zwar bewiesen, dass eine bestimmte Folge von Tangenten der C_3, wie sie sich aus dem Process der Unter- und Ueberordnung ergiebt, nicht alle Tangenten der C_3 liefert, aber das am Beginn von VIII. gestellte Problem ist damit noch nicht explicite bewiesen. Implicite dürfte aber dieser Beweis mit dem anderen auch gegeben sein. Wenn man durch irgend einen constructiven Vorgang eine Reihe von Punkten erhält, so wird es von einem beliebigen Punkte nicht selbstverständlich sein, dass er dieser Reihe angehört, das muss erst bewiesen werden. Ebenso ist es in unserem Falle, nachdem wir von einem ganz analogen Processe den Beweis geliefert haben, dass er nicht alle Punkte liefert, das a priori gegebene, dass ein beliebiger Punkt nicht erhalten wird; die gegenteilige Annahme würde eines Beweises bedürfen, der sicher nicht geliefert werden kann.

Denn beginnen wir mit irgend einem Punkte P den Ueber- und Unterordnungsprocess in Bezug auf ein beliebiges Centrum P_1 und gleichzeitig mit P den fraglichen Process, bei dem wir also analog

Digitized by Google

dem Unterordnen zu P den Tangentialpunkt P', zu P' wieder den Tangentialpunkt P'' construiren, analog dem Ueberordnen zu P, das Tangentenquadrupel construiren, von jedem Berührungspunkt aus wieder das Tangentenquadrupel u. s. w.

Dann erhalten wir, wenn wir den Vorgang des Ueberordnens bei beiden Processen n mal fortsetzen, beide Male dieselbe Zahl von Punkten, wie gross auch n sein möge. Wächst nun n in infinitum, dann müsste der Fall eintreten, dass der zu untersuchende Process keine neuen Punkte mehr liefert, weil er bereits sämtliche Punkte der Curve ergeben hat, der andere Process aber immer noch neue Punkte liefert. Wir würden so also zu dem absurden Schlusse kommen, dass das Ganze weniger Punkte enthält, als einer seiner Teile; in der Tat ergeben sich also nicht alle Punkte. Und zwar giebt es bei diesen Processen nicht etwa einen Grenzpunkt. Wir müssen vielmehr annehmen, dass jede solche Reihe eine unendliche Anzahl von Grenzstrecken ergiebt, innerhalb deren keine Punkte erreicht werden.

Wir haben soeben den Nachweis geführt, dass sich unendlich viele Punkte angeben lassen, von denen aus die Unterordnung in Bezug auf ein festes Centrum nicht aufhört. Dabei drängt sich folgende Frage auf: wenn wir P_1 zum Centrum wählen und die Unter- und Ueberordnung mit P beginnen, wird der dritte Schnittpunkt von PP_1 mit der Curve, P_2, auch der Reihe angehören? Es lässt sich zeigen, dass das nicht der Fall sein kann. Ein beliebiger Punkt x der Curve wird ja überhaupt einer gegebenen Reihe nicht angehören. P_2 ist aber kein beliebiger Punkt, sondern mit P_1 und P als dritter Schnittpunkt ihrer Verbindungslinie gegeben. Es wäre also wol möglich, dass diese Bedingung ganz oder teilweise darin zum Ausdruck kommen würde, dass P_2 der Ueber- und Unterordnungsreihe von P, gebildet in Bezug auf das feste Centrum P_1 angehörte. Dann müsste diese Eigentümlichkeit immer da bestehen, wo diese Bedingung gegeben ist. Anderseits, wenn wir von irgend einem Punkt P, der auch eine ganz specielle Lage zu P_1 annehmen kann, nachweisen können, der dritte Schnittpunkt der Verbindungslinie gehört der Reihe nicht an, dann ist diese Eigenschaft des dritten Schnittpunktes, der Reihe anzugehören, da wo sie auftritt, eine zufällige, die mit der Bedingung des dritten Schnittpunkts nichts zu tun hat. Dann wird also im allgemeinen dieser dritte Schnittpunkt der Reihe nicht angehören.

Wir nehmen zur Prüfung der Frage zu P_1 einen seiner conjugirten Punkte P. P_2 sei der dritte Schnittpunkt von PP_1. Der

Digitized by Google

gemeinsame Tangentialpunkt von P und P_1 sei P_3; dann ist dieser Punkt P_3 conjugirt. Der Ergänzungspunkt zu P_2P_3 sei P_4; P_4 ist also, wenn wir von P an mit P_2 als festem Centrum unterordnen, der auf P folgende Punkt. Nun erhalten wir ein Punktpaar desselben Punktpaarsystems, wenn wir die Punkte P_2, P_4 vertauschen und statt von P_4 an mit P_2, von P_2 an mit P_4 unterordnen.

Nun ist P_1P eine Tangente der Cayley'schen Curve. Das Centrum der Unterordnung war der Ergänzungspunkt, der Ausgangspunkt einer von den beiden conjugirten Punkten. Der nächstfolgende Unterordnungsstrahl P_2P_3 ist wiederum eine Tangente der Cayley'schen Curve. Unser Tausch hat zur Folge, dass wieder der Ergänzungspunkt Centrum, ein conjugirter Punkt Ausgangspunkt wird, wir werden also wieder eine Tangente der Cayley'schen Curve erhalten u. s. w. Nur in einem Falle wäre es nun möglich, dass dieser Process aufhörte, wenn es einmal vorkäme, dass der Ergänzungspunkt mit einem der conjugirten Punkte zusammenfiele. Eine solche Tangente ist aber eine gemeinsame Tangente der Cayley'schen Curve und der Curve dritter Ordnung. Da es deren im ganzen neun giebt, so deckt sich die Frage nach der Zugehörigkeit einer solchen Tangente zu unserer Tangentenreihe mit der Frage, ob diese alle Tangenten enthält oder nur eine discrete Mannigfaltigkeit. Nehmen wir nun irgend ein anderes conjugirtes Punktpaar $P_1'P'$ mit dem dritten Schnittpunkt P_3' und verfahren genau in derselben Weise wie oben; dann werden wir auch hier lauter Tangenten der Cayley'schen Curve erhalten. In der neuen Ueber- und Unterordnungsreihe muss es auch eine Tangente geben, deren Punktpaar mit P_2P coordinirt ist, wenn unsere Annahme richtig sein sollte. Wenn wir von diesen beiden coordinirten Gliedern aus die Entwicklung der beiden Reihen betrachten, so wird es uns klar, dass wir stets coordinirte Tangenten erhalten werden, die niemals in eine zusammenfallen können, und von denen überhaupt nie eine mit irgend einer der andern Reihe zusammenfallen kann. Damit ist diese Annahme der principiellen Zugehörigkeit des dritten Schnittpunktes zu einer von den zwei Reihen der beiden anderen Punkte widerlegt. Gleichzeitig ersehen wir daraus: „Wenn man zu einem conjugirten Punktpaar den Ergänzungspunkt construirt, zu diesem seinen conjugirten Punkt, zu dem neuen Punktpaar wieder den Ergänzungspunkt und so fortfährt, dann erhält man nur eine discrete Mannigfaltigkeit von Tangenten."

Digitized by Google

IX.

Reciproke und conjugirte Netze.

Ist ein Nullsystembüschel, der einer C_3 einbeschrieben ist, gegeben, so lassen sich mit Hilfe dieses einen Büschels in folgender Weise sämtliche Büschel des reciproken Netzes construiren. Der Nullsystembüschel, von dem wir ausgehen, heisse A. Von jedem Punkte P einer beliebigen Geraden p der Ebene gehen an die zu A gehörige C^3 drei Tangenten t_1, t_2, t_3, die ihre Nullpunkte, resp. T_1, T_2, T_3 auf der C_3 haben; alle Dreicke T_1, T_2, T_3, die in dieser Weise mit Hilfe der Punkte einer und derselben Geraden p construirbar sind, ergeben einen zu A reciproken Nullsystembüschel. Dass wir eine einfach unendliche Mannigfaltigkeit erster Ordnung von Dreiecken bekommen, liegt auf der Hand: so viel Dreiecke, als die Gerade p Punkte hat. Dass diese Dreiecke eine Curve dritter Classe umhüllen, ist ebenfalls leicht nachzuweisen. Ein solches Punkttripel T_1, T_2, T_3, veranlasst durch P, liegt mit einem Doppelpunkttripel A z. B. RST auf einem Kegelschnitt, dem Nullpunktskegelschnitt zu dem Punkte P in Bezug auf irgend eines der Dreiecke als Dopppeldreieck, P liegt also auch auf demselben. Der dritte Schnittpunkt von T_1T_2 mit der C_3 sei T_4. Das Punkttripel, von dem T_4 ein Punkt ist, erhalten wir, wenn wir zu T_4 die Nullgerade t_4 in Bezug auf A construiren, die p in einem Punkte P_1 treffen möge. P_1 ist der P analoge Punkt; die zwei weiteren Tangenten, t_5, t_6, die er an die C^3 schickt, ergeben die zu T_4 gehörigen zwei weiteren Punkte T_5, T_6. Von T_4 gehen also an die zu untersuchende Enveloppe T_1T_2, T_4T_5, T_4T_6. T_4 ist beigeordneter Rest zu R, S, T, T_3. Man kann sich leicht klar machen, dass irgend ein Punkt Tx zwei Tangenten $TxTy$ und $TxTz$ liefert, wo $TxTyTz$ ein Punkttripel bilden, und noch eine weitere Tangente $TxTzTv$, wo $TzTv$ zusammengehörige Punkte eines Tripels sind. Wir haben es also in der Tat mit einer Curve dritter Classe zu tun, und diese Dreiecke Tx, Ty, Tz sind einander coordinirt. Nun hat p drei Schnittpunkte mit der C_3. P', P'', P'''.

Die Nullgerade zu P' sei p'; dann gehen an die C^3 des Büschels A noch zwei weitere Tangenten p_1' und p_2', die also zusammengehörige Doppelseiten desselben sind. Dieselben zwei Tangenten sind aber auch zusammengehörige Doppelseiten des neuen Büschels, wie aus seiner Entstehung aus dem Büschel A sich ergiebt. Damit ist aber der reciproke Charakter der beiden Büschel festgestellt und

Digitized by Google

gleichzeitig eine merkwürdige Beziehung zwischen zwei reciproken Büscheln gewonnen.

„Construirt man in den Doppelpunkttripeln eines Nullsystembüschels, der einer C_3 einbeschrieben ist, die Tangenten an die C^3 eines reciproken Nullsystembüschels, so hat jedes solche Tangententripel einen gemeinsamen Schnittpunkt und alle diese Schnittpunkte erfüllen eine Gerade. Vertauscht man in dieser Construction die Functionen der beiden Nullsysteme, so bekommt man dieselbe Gerade." Man kann also mit Hilfe eines Nullsystembüschels und sämtlicher Geraden der Ebene sämtliche Nullsystembüschel des reciproken Netzes construiren. Zu interessanten Beziehungen führen diese Betrachtungen, wenn wir sie auf ein specielles Nullsystemnetz anwenden, nämlich auf eines von den drei conjugirten Netzen. Ein solches Netz hat die Eigenschaft, dass es mit seinem reciproken Netz zusammenfällt. Denn greift man einen beliebigen Nullsystembüschel heraus, aus diesem ein Doppelpunkttripel ABC und zwei conjugirte Punkte D, E, so ist sowol E beigeordnet den vier Punkten A, B, C, D, als auch D den vier Punkten A, B, C, E.

Wir kommen so auf folgenden Satz: Aus jedem Nullsystembüschel eines conjugirten Nullsystemnetzes lassen sich sämtliche andere mit Hilfe sämtlicher Geraden der Ebene construiren. Nun kann man aber auch einen conjugirten Nullsystembüschel als reciprok zu sich selbst betrachten. Unsere früheren Betrachtungen führen uns dann zu folgender Beziehung: Construirt man in den Doppelpunkttripeln eines conjugirten Nullsystembüschels die Nullgeraden, so haben diese Geradentripel je einen gemeinsamen Schnittpunkt, und alle diese Schnittpunkte erfüllen eine Gerade. Die Gerade sei „die dem Nullsystembüschel zugehörige" Gerade, einer ihrer Punkte heisse zugeordnet demjenigen Doppelpunkttripel, dessen drei Nullgeraden sich in ihm schneiden. Nun wissen wir aus der Theorie dieser Punkttripel, dass die drei Nullpunkte eines conjugirten Doppeldreiecks auf einer Geraden liegen. Offenbar ist diese Gerade reciprok dem zugeordneten Punkte. Wie also die zugeordneten Punkte in der zugehörigen Geraden sich schneiden, so werden die zugeordneten Geraden in einem zugehörigen Punkte sich treffen. Wir kommen so zu folgender Construction eines conjugirten Nullsystembüschels: alle Strahlen eines Strahlenbüschels treffen eine C_3 in drei Punkten. Die drei conjugirten Punkte bilden die Doppelpunktstripel eines conjugirten Nullsytembüschels. Die zu den Doppelpunktstripeln gehörigen Nullgeradentripel liefern in ihren gemeinsamen Schnittpunkten die Punkte der „zugehörigen Geraden". Durch Betrachtung derjenigen drei Strahlen des Strahlenbüschels, die Tan-

Digitized by Google

genten der Caley'schen Curve sind, kommt man zu der Erkenntniss, dass zugehöriger Punkt und zugehörige Gerade eines conjugirten Nullsystembüschels Pol und Polare in Bezug auf eine von den drei Curven sind, von denen die gegebene die Hesse'sche ist.

Anm. Mit Hilfe dieser Beziehung zwischen Pol und Polare einer Curve dritter Ordnung lassen sich manche Sätze aus der Polarentheorie einer Curve dritter Ordnung besonders einfach beweisen. Wir wollen hier nur ein Beispiel anführen:

Nehmen wir irgend zwei Punkte Q und Q_1 der Ebene, so geben sie Anlass zu zwei verschiedenen conjugirten Nullsystembüscheln C_1^3 und C_2^3. Die beiden Büschel haben, weil ein und demselben Netze angehörig, ein Doppeldreieck gemeinsam, dasjenige, dessen drei Ecken A_1, B_1, C_1 conjugirt sind resp. den drei Durchschnittspunkten der Verbindungslinie QQ_1. Jedem Nullsystembüschel gehört eine besondere Gerade zu, resp. g und g_1. Dem Doppeldreieck $A_1 B_1 C_1$ gehört ein bestimmter Punkt P_1 auf g_1 und ein bestimmter Punkt P_2 auf g_1 zu. Legen wir durch A_1, B_1, C_1, P_1, P_2 den Kegelschnitt, so muss dieser die C_3 in einem weiteren conjugirten Dreiecke schneiden. Denn es ist eine fundamentale Eigenschaft dieser conjugirten Dreiecke, die sich aber auch von unsern Betrachtungen aus ohne Mühe beweisen lässt, dass ein beliebiger Kegelschnitt, der einem solchen Dreieck umschrieben ist, noch ein zweites Dreieck enthält. Nun können aber zwei Nullsystembüschel, wenn sie nicht ganz zusammenfallen sollen, nur ein Dreieck gemeinsam haben; dieser Kegelschnitt wird also das Punkttripel $A_1 B_1 C_1$ doppelt mit der C_3 gemeinsam haben, d. h. sie in diesen drei Punkten berühren. Daraus folgt gleichzeitig, dass dieser Kegelschnitt auch g_1 und g_2 berühren wird. Denn jeder andere Punkt P_1' auf g_1 oder P_2' auf g_2 gehört einem anderen von $A_1 B_6 C_1$ verschiedenen Dreieck zu, während ja doch ein Kegelschnitt, der zwei Dreiecke eines conjugirten Nullsystemnetzes enthält, zugleich auch die zwei Punkte enthält, die den beiden Dreiecken in dem Nullsystembüschel zugehören, das sie mit einander bilden. Seien z. B. $A_1 B_1 C_1$ und $A_2 B_2 C_2$ die zwei Doppelpunkttripel die auf K liegen, P_1 und P_2 die den Dreiecken zugeordneten Punkte, so schneiden sich also die drei für alle Systeme des Büschels gemeinsamen Nullgeraden, die durch A_2, B_2, C_2 gehen, in P_2, und wenn wir $A_1 B_1 C_1$ zum Doppeldreieck wählen, so geht also der Nullpunktskegelschnitt zu P_2 durch beide Doppelpunktstripel, ebenso der Nullpunktskegelschnitt zu P_1; die beiden Kegelschnitte müssen also in einen zusammenfallen.

Würde also der fragliche Kegelschnitt noch einen Punkt P_1' auf g' enthalten, so müsste er auch dem Dreieck umschrieben sein,

Digitized by Google

das zu diesem Punkte gehört. Nehmen wir nun andere und andere Punkte Q_1, Q_2 auf der Verbindungslinie $Q_1 Q_2$, so erhalten wir andere und andere Polaren g_1, g_2 und andere und andere zugehörige Nullsysteme; aber das Punkttripel $A_1 B_1 C_1$ bleibt bestehen und ebenso dieser Kegelschnitt. Wir haben damit den bekannten Satz von der Polokonik abgeleitet: „Die Polokonik einer Geraden berührt die Hesse'sche Curve in dem der Geraden conjugirten Punkttripel."

Zusatz. Lässt sich der conjugirte Nullsystembüschel B aus dem conjugirten Nullsystembüschel A mittelst der Geraden p erzeugen, und sind die Schnittpunkte von p P_1, P_2, P_3, so erhalten wir aus dem Doppeldreieck von $A_1 P_1 Q_1 R_1$, das Doppeldreieck zu B, indem wir die Nullpunkte Q_1', R_1', von $P_1 Q$, $P_1 R$ mit einander verbinden, also das Doppeldreieck $P_1 Q_1' R_1'$; $Q_1' R_1'$ ist die zugeordnete Gerade zu $P_1 Q_1 R_1$; ebenso können wir die Dreiecke $P_2 Q_2' R_2'$, $P_3 Q_3' R_3'$ construiren.

Nun sind die zugeordneten Geraden dieser drei Doppeldreiecke von B resp. $Q_1 R_1$, $Q_2 R_2$, $Q_3 R_3$. Aber: alle zugeordneten Geraden eines conjugirten Nullsystembüschels schneiden sich in einem Punkte, dem zugehörigen Punkte dieses Systems. Daraus ergibt sich folgender Satz: Die den drei Durchschnittspunkten einer beliebigen Geraden gegenüberliegenden Doppelseiten eines conjugirten Systembüschels schneiden sich in einem Punkte. In dieser Weise gibt ein conjugirtes Nullsystemnetz Anlass zu einem Netze von reciproken Systemen.

X.

Beziehungen zwischen der C_3 und einer Curve C^3.

Die Punkte, die die C_3 mit einer Curve C^3 gemeinsam hat, lassen sich in folgender Weise bestimmen. Die C^3 sei gebildet von irgend einem Nullsystembüschel M. Greifen wir aus der Zahl der Doppeldreiecke ein beliebiges, ABC, heraus, wo den drei Ecken A, B, C resp. die drei Seiten a, b, c gegenüberliegen, so entspricht jedem Strahlenbüschelcentrum Q auf a als Ort der Nullpunkte der durch Q gehenden Strahlen eine Gerade s_q durch A. Durch Q gehen zwei weitere Tangenten Qx_1 und Qx_2 an die C^5, und ihre beiden Nullpunkte x_1 und x_2 sind die zwei weitereren Schnittpunkte, die s_q mit der C_3 gemeinsam hat. Wird nun eine solche Tangente der C^3 gleichzeitig die C_3 in ihrem Nullpunkte x_1 berühren, so wird x_1 ein Berührungspunkt der beiden Curven sein.

Digitized by Google

Das geht, wenn es überhaupt einer weiteren Erwägung bedarf, daraus hervor, dass, wenn wir zum Punkte x_1 in Bezug auf ein beliebiges Doppeldreieck ABC den Nullpunktskegelschnitt feststellen, dieser Qx_1, also auch die C_3 in x_1 berührt. Weil dieser Kegelschnitt ausser x_1, A, B, C, also nur noch einen Punkt mit der C_3 gemeinsam hat, so geht also an die C^3 von x_1 nur noch eine weitere Tangente. x_1 wird also auch ein Punkt der C^3 sein. Nehmen wir nun zu jedem Q der Seite Q die konische Polare, so gehen bekanntlich alle die Kegelschnitte durch die vier Pole von a in Bezug auf die C_3. Nun ist das Strahlenbüschel der s_q projectivisch der Punktreihe der Q, und diese ist wiederum projectivisch dem Büschel ihrer konischen Polaren. Also wird auch das Strahlenbüschel der s_q projectivisch dem Büschel der konischen Polaren sein, ihr Erzeugniss also eine Curve dritter Ordnung, die mit der gegebenen C_3 9 Punkte gemeinsam hat. Unter diesen 9 werden aber auch die Punkte A, B, C sein: A als Centrum des erzeugenden Strahlenbüschels der s_q, B und C als gleichzeitige Punkte der C_3 und Eckpunkte des Doppeldreiecks, durch die also sowol ihr Strahl s_q (resp. AC und AB), als auch ihre konische Polare geht. Die andern sechs Durchschnittspunkte aber werden solche Punkte X_1 sein, in welchen sich die beiden Curven berühren. Also:

„Eine C_3 hat mit einer Nullgeradenenveloppe C^3 sechs Berührungspunkte und sechs Durchschnittspunkte gemeinsam."

Nehmen wir irgend einen der sechs Durchschnittspunkte A', dessen Nullgerade a' sei, so sind die beiden anderen Tangenten, welche von A' an die C^3 gehen, $A'B'$ und $A'C'$, unendlich benachbart.

Das Doppeldreieck $A'B'C'$ ist also ausgeartet, indem zwei Seiten $A'B'$, $A'C'$, also auch die zwei Ecken B' und C' zusammengefallen sind. Die Gerade $B'C'$, die A' gegenüberliegende Doppelseite, ist also eine weitere gemeinsame Tangente der Curven. Diese Beziehung können wir so aussprechen:

„Unter den Nullgeraden der Punkte einer C_3 in Bezug auf ein ihr einbeschriebenes Nullsystembüschel sind 12 Tangenten der C_3, 6 davon haben ihren Nullpunkt im Berührungspunkt, die andern sechs im Tangentialpunkt; die diesen letzteren gegenüberliegenden Doppelpunkte sind die sechs Durchschnittspunkte der C_3 und der Nullgeradenenveloppe."

Digitized by Google

Unsere Construction der sechs Berührungspunkte ergibt gleichzeitig den Satz, dass dieselben mit irgend einem Doppelpunktstripel des Nullsystems neun associirte Punkte ergeben.

Nun sind sämtliche Doppelpunktstripel, gebildet von den Doppeldreiecken eines Nullsystemnetzes, einander beigeordnet. Denn zwei beliebige solche Doppeldreiecke $A_x B_x C^x$ und $A_\mu B_\mu C_\mu$ sind einander coordinirt. Wir kommen so zu folgendem Satze:

„Sämtliche Berührungspunktgruppen eines Nullsystemnetzes sind einander beigeordnet."

Digitized by Google

XVI.

Eigenschaften der imaginären Brennpunkte der Centralkegelschnitte.

Von

Franz Rogel.

Centralkegelschnitte haben bekanntlich vier Brennpunkte, von welchen zwei imaginär sind und auf der Nebenaxe liegen.

Die Untersuchung der Eigenschaften der Letzteren ist Zweck und Ziel dieser Zeilen.

Derselben liegt jene von Dr. Ernst Wilhelm Fiedler[1]) durch Einführung complexer Elemente in die Geometrie des Maasses in's Werk gesetzte Erweiterung der geometrischen Begriffsbildung zu Grunde.

Sie besteht darin, dass die analytischen Ausdrücke für Beziehungen und Eigenschaften reeller Elemente, wie Abstand, Winkel, Richtungscoefficient, Teilungsverhältniss, als Definitionen fortbestehend auch für imaginäre Elemente giltig angenommen werden.

Unter dieser Voraussetzung werden die Sätze über Doppelelemente von Involutionen und über Pole und Polaren von Kegelschnitten in dem Falle imaginärer Punkte und Geraden als richtig anzusehen sein.

---

1) Analytische Geometrie der Kegelschnitte v. Salmon-Fiedler, 5. Aufl. I. 21, 63, 93, ff.

Digitized by Google

Als Folgerungen erscheinen ferner die später zur Verwendung kommenden Hilfssätze:

Wenn in einem Dreiecke ABC die Seiten AC und BC imaginär und gleich gross sind, so halbirt

(α) die Verbindungslinie der Spitze C mit dem Halbirungspunkt M der reellen oder imaginären Grundlinie den Winkel an der Spitze und umgekehrt

(β) die Halbirende des Winkels an der Spitze halbirt auch die Grundlinie und steht auf ihr senkrecht.

Der Beweis stützt sich auf die Tatsache, dass die Spitze S in der Aequidistanten CM liegt, welche als Normalstrahl einer elliptischen Strahlen-Involution aufgefasst werden kann, welche die Seiten AC und BC zu (imaginären) Doppelstrahlen hat, deren Winkel nach Obigem von CM halbirt wird.

Nach diesen vorbereitenden Sätzen bietet die Aufsuchung der Eigenschaften der imaginären Brennpunkte keine nennenswerten Schwierigkeiten mehr dar.

In erster Linie soll nun der Beziehungen gedacht werden, in welchen sie zu den reellen Brennpunkten stehen.

Beide Paare sind Doppelpunkte von Involutionen, welche durch den Schnitt eines und desselben Paares von Parallelstrahlenbüscheln mit den Axen AA' und BB' entstehen.

Ist nämlich p die Polare eines beliebigen Punktes P in der Ebene eines Centralkegelschnittes, $\pi = PM$ das von P auf p gefällte Lot und Q der Schnittpunkt von p mit dem conjugirten Diameter PO, so sind P und Q in Bezug auf den Kegelschnitt conjugirt und bilden Punktreihen, welche mit den durch die Polaren p und die Lote π gebildeten Parallelstrahlenbüscheln bzhw. perspectivisch liegen.

Letztere schneiden nun auf AA_1 eine hyperbolische Involution mit den reellen Brennpunkten $F_1 F_2$ als Doppelpunkte und auf BB_1 eine elliptische mit den imaginären Brennpunkten J_1. J_2, dem Centralpunkt O und den entsprechenden Punkten U, V ab. Fällt P in die Curve, so sind die Schnittpunkte von Tangente und Normale mit der Nebenaxe ebenfalls entsprechend und ihre Abstände von O bzhw.

Digitized by Google

$$\frac{b^2}{y}, \quad -\frac{ye^2}{b^2}$$

somit $-e^2$ die Potenz, und

$$(0, \quad \pm ic)$$

die Coordinaten der imaginären Brennpunkte.

Ihre mit AA' parallel laufenden Polaren treffen BB' in den Punkten

$$\left(0, \quad \mp\frac{b^2}{e}i\right)$$

Die durch J gehende Parallele a zu AA' ist conjugirt und normal zu BB', a und BB' können daher als Normalstrahlen einer durch conjugirte Gerade gebildeten Involution mit dem Scheitel J angesehen werden. Ein anderes Paar conjugirter Geraden ist J_1F_1 und J_1F_2, denn es geht J_1F_2 durch den Pol

$$M\left(\frac{a^2}{e}, \quad \frac{b^2}{ei}\right) \text{ von } J_1F_1.$$

Ihre Gleichungen sind

$$ix+y-ei=0, \quad ix+y+ei=0$$

das Product ihrer Richtungscoefficienten

$$i^2=-1=\operatorname{tang}\overline{F_2J_1}\,.\,a\,.\,\operatorname{tang}\overline{F_1J_1}\,.\,a$$

daher auch

$$\operatorname{tang}\overline{ga}\,.\,\operatorname{tang}\overline{g'a}=-1$$

unter g, g' zwei beliebige conjugirte durch J_1 gehende Gerade verstanden.

Wenn nun durch letztere Gleichung auch bei complex conjugirten Geraden der Begriff des Senkrechtstehens definirt wird, so lässt sich behaupten:

(1). „Alle durch einen imaginären Brennpunkt gehenden Paare „conjugirter Geraden stehen aufeinander senkrecht".

Der über XY als Durchmesser construirte Kreis hat mit BB' die Punkte J_1, J_2 gemein; denn es ist

$$0x\,.\,0y=\overline{0F}=-(ie)^2$$

Wird nun in diesem Kreise ein beliebiger Punkt Z angenommen und werden die Normalstrahlen der, aus den in Bezug auf die Curve

Digitized by Google

conjugirten Geraden gebildeten Involution mit dem Scheitel in Z bestimmt, so gehen dieselben durch X, Y. Denn werden die durch Z gehenden Normalstrahlen ermittelt und ein Kreis durch die Schnittpunkte mit AA' mit dem Mittelpunkt in AA' gelegt, so geht derselbe nach Obigem auch durch J_1, J_2, muss daher mit dem durch X, Y gehenden Kreise identisch sein, da beide die Punkte Z, J_1, J_2 gemein haben:

(2). „Die Verbindungslinien der in der Hauptaxe liegenden „Punkte irgend eines durch die beiden imaginären Brennpunkte „gehenden Kreises mit einem beliebigen Punkte desselben sind die „Normalstrahlen jener durch die conjugirten Geraden gebildeten „Involution."

Da irgend eine Tangente eines Kegelschnittes mit jeder durch den Berührungspunkt gehenden Geraden, also auch mit der Normalen conjugirt ist, so gilt:

(3). „Tangente und Normale irgend eines Punktes Z eines Cen„tral-Kegelschnittes wird erhalten, wenn die Schnittpunkte des durch „Z und die imaginären Brennpunkte gehenden Kreises und der „Nebenaxe mit Z verbunden werden".

Bei der Construction des Kreises können die imaginären Punkte leicht durch reelle ersetzt werden. Es ist dabei nur nötig O und Z zu verbinden und in dieser Linie einen Punkt Z' so zu bestimmen, dass

$$OZ \,.\, OZ' = a^2$$

wird, dann sind Z' und der bezüglich AA' symmetrisch liegende Punkt Z'' ebenfalls Punkte des Kreises.

Da der Pol irgend einer Focalsehne auf der Leitlinie des imaginären Brennpunktes liegt, so folgt:

(4). „Die Verbindungslinien eines imaginären Brennpunktes „mit dem Berührungspunkte einer beliebigen Tangente und ihrem „Schnittpunkte mit der entsprechenden Leitlinie stehen aufeinader „senkrecht".

Irgend ein ausserhalb oder innerhalb der Curve gelegener Punkt kann als Mittelpunkt einer Strahleninvolution betrachtet werden, deren Doppelstrahlen die reellen resp. imaginären Tangenten an die Curve sind; die Normalstrahlen halbiren den von ihnen ein-

Digitized by Google

schlossenen Winkel, zufolge (2) aber auch den von den Verbindungslinien dieses Punktes mit den Brennpunkten J_1, J_2 gebildeten Winkel:

(5). „Die Halbirungslinien der von zwei beliebigen reellen „oder imaginären Tangenten eines Centralkegelschnittes gebildeten „Winkel halbirt auch den von den Verbindungslinien des Schnitt„punktes der Tangenten mit den imaginären Brennpunkten einge„schlossenen Winkel".

Hieraus folgt:

(6). „Die Halbirungslinien der Winkel, welche die imaginären „Brennstrahlen eines Punktes mit der Nebenaxe einschliessen und „die Tangente der Curve in diesem Punkte schneiden sich in der „Nebenscheiteltangente".

Zu einer gegebenen reellen oder imaginären Tangente lässt sich demnach, wenn die imaginären Punkte gegeben sind; eine beliebige zweite Tangente finden, oder:

(7). „Ein Centralkegelschnitt ist unzweideutig bestimmt, wenn „eine Tangente und die imaginären Brennpunkte gegeben sind".

Ist statt der Tangente ein Curvenpunkt P gegeben, und wird derselbe mit J_1, J_2 verbunden, so ist es unbestimmt, welche von den Halbirungslinien des Winkels $J_1 P J_2$ Tangente, und welche Normale ist, daher:

(8). „Durch die imaginären Brennpunkte und einen Punkt des „Kegelschnitts ist letzterer nicht bestimmt; den Bedingungen ent„sprechen zwei sich rechtwinklig schneidende Kegelschnitte".

Durch Verbindung des als ganz beliebig aufzufassenden Schnittpunktes K von p und π mit Punkten der Involution (U, O, V, ∞) entsteht eine Strahleninvolution mit den Normalstrahlen KU, KV und den Doppelstrahlen KJ_1, KJ_2:

(9). „Der von den Verbindungslinien irgend eines Punktes K „der Ebene eines Centralkegelschnittes mit den imaginären Brenn„punkten eingeschlossene Winkel wird durch die Normalstrahlen „jener Involution halbirt, welche durch die durch K gehenden con„jugirten Geraden gebildet wird".

Digitized by Google

Liegt K auf der Curve selbst, so gilt:

(10). „Tangenten und Normalen für irgend einen Punkt eines „Centralkegelschnittes halbiren die von den imaginären Brennstrahlen „eingeschlossenen Winkel".

Ist $M(x, y)$ ein Curvenpunkt und N der Schnittpunkt der Normalen und der kleinen Axe, so ist

$$J_1N = ie + \frac{c^2}{b^2}y, \quad J_1M = b - i\frac{ey}{b}$$

$$J_2N = ie - \frac{c^2}{b^2}y, \quad J_2M = b + i\frac{ey}{b}$$

(worin für die Hyperbel ib statt b zu nehmen ist)
folglich

$$\frac{J_1M}{J_2M} = \frac{J_1N}{J_2N};$$

(11). „Die Normale teilt die Entfernung der imaginären Brenn„punkte in zwei den Brennstrahlen proportiale Abschnitte".

Fig. 2[1]). Sind T_1, T_2 Berührungspunkte zweier sich in P schneidenden reellen oder imaginären Tangenten, so sind T_1, T_2 Doppelpunkte einer auf T_1T_3 liegenden durch conjugirte Punkte gebildeten Involution. Ist ferner J_1 der Scheitel einer zu derselben perspectivisch liegenden Strahleninvolution, so sind J_1T_1, J_1T_2 ihre Doppelstrahlen; zwei entsprechende Punkte sind die Schnittpunkte Z von T_1T_2 mit der Polaren von J_1 und E von J_1P mit T_1T_2; nun sind J_1Z und J_1P conjugirt, folglich stehen sie aufeinander senkrecht (1) und halbiren als Normalstrahlen die von den Doppelstrahlen J_1T_1, J_1T_2 gebildeten Winkel:

(12). „Die Verbindungslinie eines imaginären Brennpunktes mit „dem reellen Schnittpunkte zweier reeller oder imaginärer Tan„genten halbirt den von den Verbindungslinien dieses Brennpunktes „mit den Berührungspunkten der Tangenten gebildeten Winkel".

Schneidet die Tangenten PT_1 und PT_2 eine beliebige dritte mit dem Berührungspunkte X in A und B, und werden Schnitt- und Berührungspunkte mit einem imaginären Brennpunkte J verbunden, so ist (12)

---

1) Beim Lesen der Figur ist einfach J_1, J_2 statt F_1, F_2 zu denken.

Digitized by Google

$$\overline{AJX} = \tfrac{1}{2}\overline{T_1JX}$$
$$\overline{BJX} = \tfrac{1}{2}\overline{T_2JX}$$

$$\overline{AJX} + \overline{XJB} = \tfrac{1}{2}(\overline{T_1JX} + \overline{T_2JX})$$

oder

$$\overline{AJB} = \tfrac{1}{2}\overline{T_1JT_2} = \text{const.}$$

(13). „Werden zwei feste Tangenten t_1, t_2 eines Centralkegel-„schnittes von einer dritten veränderlichen in den Punkten A, B „geschnitten, so ist der von den Verbindungslinien derselben mit „einem imaginären Brennpunkte eingeschlossene Winkel constant „und zwar halb so gross als der von den Verbindungslinien dieses „Brennpunktes mit den Berührungspunkten der festen Tangenten „gebildete Winkel".

Wird durch J_1 eine beliebige die Centralcurve in M, N schneidende Focalsehne, ferner MJ_2, NJ_3 gezogen, und der Schnittpunkt P der Tangenten in M, N mit J_2 verbunden, so entsteht ein aus Brennstrahlen gebildetes Dreieck MNJ_3, dessen Winkel durch die Normalen in M, N und durch J_2P halbirt werden.

Da aber auch die Winkelhalbirenden eines aus imaginären Seiten gebildeten Dreieckes sich in einem Punkte schneiden, so gilt:

(14). „Die Verbindungslinie des Schnittpunktes der Tangenten „in den Endpunkten einer imaginären Focalsehne mit dem Schnitt-„punkte der entsprechenden Normalen geht durch den anderen ima-„ginären Brennpunkt und ist die Halbirungslinie des Winkels der „Brennstrahlen der Sehnen-Endpunkte".

Die algebraische Summe der imaginären Brennstrahlen eines Curvenpunktes (x, y) drückt sich aus durch:

$$\sqrt{x^2+(y+ie)^2} \pm \sqrt{x^2+(y-ie)^2}$$
$$= \left(b + i\frac{e}{b}y\right) + \left(b - i\frac{e}{b}\right) \text{ bei der Ellipse}$$

$(e = \sqrt{a^2-b^2})$ und $= \left(ib + \frac{e}{b}y\right) - \left(ib + \frac{e}{b}y\right)$,

$(e = \sqrt{a^2+b^2})$ bei der Hyperbel daher:

(15). „Bei der Ellipse ist die Summe der imaginären Brenn-„strahlen eines Punktes gleich der kleinen Axe, bei der Hyperbel

Digitized by Google

„ist die Differenz derselben gleich der mit der imaginären Einheit „multiplicirten kleinen Axe.

Mit Hilfe dieses Satzes und der bekannten Roberval'schen Ueberlegungen lässt sich der Satz (10) noch auf eine zweite Art beweisen.

Bei der Bewegung eines Curvenpunktes M zu dem unendlich nahen N wird der zugehörige imaginäre Brennstrahl r_1 zufolge (15) um eine unendlich kleine Grösse δ zunehmen, wenn der zweite r_2 um dieselbe Grösse — bei der Ellipse ab- — und bei der Hyperbel zunimmt. Die Verlängerungen r_1, r_2 über M, N hinaus bilden demnach ein unendlich kleines imaginäres Viereck $MNPQ$, dessen Seiten sich nur um eine unendlich kleine Grösse zweiter Ordnung von δ unterscheiden und daher als gleich gross angenommen werden können. Da nun M, N von P, Q gleich weit abstehen, so ist $MN \perp PQ$; zufolge des Hilfssatzes (α) halbiren diese mit der Tangenten- und Normalenrichtung coincidirenden Diagonalen aber die Winkel an ihren Endpunkten, d. h. die von den Brennstrahlen eingeschlossenen Winkel.

Das Product der genannten Brennstrahlen ist

$$\left(-b+i\frac{e}{b}y\right)\left(-b-i\frac{e}{b}y\right)=b^2+\frac{e^2}{b^2}y^2$$
$$=\frac{a^2}{b^2}y^2+\frac{b^2}{a^2}x^2:$$

(16). „Das Rechteck der imaginären Brennstrahlen eines Punktes „ist gleich dem Quadrate des dem seinen conjugirten Diameters".

Nach Einführung von Polarcoordinaten, die von einem imaginären Brennpunkte J_1 und der Nebenaxe aus gezählt worden ist, wenn mit r_2, θ, Brennstrahl und Anomalie bezeichnet wird

$$y=r\cos t+ie$$

und wegen

$$r=b-i\frac{e}{b}y$$

$$r_1=\frac{q}{1+i\frac{e}{b}\cos\theta} \quad \text{bzhw.} \quad r_2=\frac{q}{1-i\frac{e}{b}\cos\theta}$$

wo

Digitized by Google

$q = \frac{a^2}{b}$ bei der Ellipse und $q = \frac{a^2}{b} i$ bei der Hyperbel

die Länge des zur Nebenaxe senkrechten imaginären Brennstrahles, also den sich auf imaginäre Brennpunkte beziehenden Parameter bezeichnet. Hieraus folgt

$$\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} = \frac{2}{q}$$

(17). „Das harmonische Mittel zwischen den Abschnitten einer „imaginären Focalsehne ist unveränderlich und dem Parameter „$\left(\frac{a^2}{b}\right)$ gleich."

Durch Vergleich des Productes mit der Summe imaginärer Brennstrahlen

$$r_1 r_2 = \frac{q^2}{1 + \frac{e^2}{b^2}\cos^2\theta}, \quad r_1 + r_2 = \frac{2q}{1 + \frac{e^2}{b^2}\cos^2\theta}$$

ergiebt sich:

(18). „Das Rechteck aus den Abschnitten einer imaginären „Focalsehne steht zur ganzen Sehne in einem unveränderlichen Ver- „hältnisse."

Da das Quadrat des Halbmessers, der mit der Nebenaxe den Winkel θ bildet,

$$d^2 = \frac{\pm a^2}{1 + \frac{e^2}{b^2}\cos^2\theta}$$

und die parallele Focalsehne (18)

$$\frac{2q}{1 + \frac{e^2}{b^2}\cos^2\theta} = \frac{2}{b} d^2$$

ist, so folgt:

(19). Das Rechteck aus einer imaginären Folalsehne und der „Nebenaxe giebt das Quadrat des zu ihr parallelen Durchmessers".

Hieraus geht mit Rücksicht auf die bekannte Tatsache, dass die Summe zweier conjugirten Diameter constant ist, noch hervor:

Digitized by Google

(20). „Die Summe der zu zwei conjugirten Diametern parallelen „imaginären Focalsehnen ist constant".

Die Längen zweier zu einander rechtwinkligen imaginären Focalsehnen sind, wie aus obigem bekannt,

$$\frac{2q}{1+\frac{e^2}{b^2}\cos^2\theta}, \quad \frac{2q}{1+\frac{e^2}{b^2}\sin^2\theta}$$

daher:

(21) „Die Summe der Reciproken zweier aufeinander senkrecht „stehenden imaginären Focalsehnen ist constant."

Liegen auf der verlängerten J_2T_1 (Fig. 2) zwei Punkte H in Abständen

$$HT_1 = T_1J_1$$

von T_1, so ist zufolge (15) HJ_2 bei der Ellipse $= 2b$ und bei der Hyperbel $= i2b$, wenn das eine mal H ausserhalb, das andre mal innerhalb der Curve genommen wird. Es entsteht hiebei das gleichschenklige Dreieck J_1HT_1, dessen Winkel an der Spitze T_1 durch die Tangente resp. Normale halbirt wird (10); zufolge des Hilfssatzes (β) halbiren letztere dann aber auch die Grundlinie HJ_1 in M. Da nun M und 0 die anstossenden Seiten J_1H und J_1J_2 des Dreieckes HJ_1J_2 halbiren, so muss

$$M0 = \tfrac{1}{2}HJ_2 \text{ sein:}$$

(22). „Die Fusspunkte der aus den imaginären Brennpunkten „auf ihre Tangenten gefällten Lote liegen bei der Ellipse auf dem „einbeschriebenen Kreise und bei der Hyperbel auf einem concen„trischen imaginären Kreise mit dem Radius $= ib$".

Wenn aus den Brennpunkten J_1. J_2 Lote auf eine beliebige Tangente gefällt werden, deren Fusspunkte P_1, P_2 heissen mögen, so liegen dieselben auf einem concentrischen Kreise mit dem Radius

$$r = b \text{ resp. } = ib$$

Trifft J_1P_1 diesen Kreis in dem zweiten Schnittpunkte Q, dann ist zufolge der symmetrischen Lage

Digitized by Google

$$J_1 Q = J_2 P_2$$

ist ferner R der Fusspunkt des vom Centrum 0 auf $P_1 Q$ gefällten Lotes

$$0R = d$$

so ist

$$P_1 J_1 \cdot J_1 Q = P_1 R + RJ_1)(P_1 R - RJ_1) =$$
$$= (\sqrt{r^2 - d^2} + \sqrt{-e^2 - d^2})\,(\sqrt{r^2 - d^2} - \sqrt{-e^2 - d^2}) = r^2 + e^2 = a^2$$

(23). „Das Product der aus den beiden imaginären Brenn-„punkten eines Centralkegelschnittes auf irgend eine Tangente des-„selben gefällten Lote ist gleich dem Quadrate der Hauptaxe".

Werden in dem Vierecke $J_1 J_2 P_1 P_2$ die sich in M schneidenden Diagonalen $J_1 P_2$, $J_2 P_1$ und durch M eine (Fig. 3) [1]) Senkrechte zur Tangente $P_1 P_2$ gezogen, welche dieselbe in T und BB' in N schneidet, so liegen die Punkte $TMN\infty$ harmonisch, daher

$$MT = MN$$

Wird ferner J_1 und J_2 mit T verbunden und beide Gerade bis zum Schnittpunkte U mit $J_1 P_1$ verlängert, so sind die Punktreihen $TMN\infty$ und $UP_1 J_1 \infty$ perspectivisch, daher

$$UP_1 = P_1 J_1$$

Das die letzteren Punkte aus T projicirende Strahlenbüschel ist somit auch harmonisch, daher halbirt TN den Winkel $J_1 TJ_2$ der dem Punkte T entsprechenden Brennstrahlen, folglich ist T ein Punkt der Curve und TN eine Normale:

(24). „Die Geraden, welche je einen imaginären Brennpunkt „mit dem Fusspunkte der Normale vom andern Brennpunkt auf eine „Tangente verbindet, schneiden einander in der entsprechenden Nor-„male des Centralkegelschnittes und halbiren sie".

Ist M ein beliebiger Punkt, $MM' \parallel DE$ L_1, L_2 die Leitlinien der imaginären Brennpunkte, welche von MM' in H, H' geschnitten werden, ferner HJ_1 senkr. a. $J_1 H'$, so sind HJ_1, $H'J_1$ conjugirt (1), hal-

1) Siehe Anmerkung zu Fig. 2.

biren als Normalstrahlen einer Involution daher den von ihren Doppelstrahlen J_1M, J_1M' eingeschlossenen Winkel; zufolge (11) ist dann

$$\frac{MJ_1}{MH} = \frac{M'J_1}{M'H}$$

Nun ist bei der Ellipse

$$M'J_1 = MJ_2 = BB' - J_1M$$
$$M'H = DE - HM$$

daher

$$\frac{MJ_1}{MH} = \frac{BB' - J_1M}{DD - HM} = \frac{0B}{0D}$$

und wegen

$$0D = \frac{\overline{0B}^2}{\overline{0J_1}}$$

auch

$$-\frac{0J}{0B} = i\frac{e}{b}$$

Bei der Hyperbel ist

$$M'J_1 = MJ_1 = BB' + J_1M$$
$$M'H = DE + HM$$

daher

$$\frac{MJ_1}{MH} = \frac{BB' + J_1M}{DE + HM} = \frac{0J_1}{0B} = i\frac{e}{b}$$

(25). „Das Verhältniss der Abstände eines jeden Punktes eines „Centralkegelschnittes von einem der imaginären Brennpunkte und „seiner Polaren ist unveränderlich und zwar $= i\frac{e}{b}$; bei der Ellipse „ist dieses Verhältniss kleiner, bei der Hyperbel grösser als „die imaginäre Einheit".

Die Gleichung der Tangente am Ende einer Brennpunkts-Abscisse ist

$$bx + iey = b^2$$

woraus

$$x = b - i\frac{c}{b}y$$

also gleich dem Brennstrahl des Punktes (x, y):

(26). „In einem Centralkegelschnitte ist der imaginäre Brenn„strahl eines jeden Punktes gleich der bis zum Schnitte mit der

Digitized by Google

„Tangente am Endpunkt der Brennpunktsabscisse verlängerten Ab-„scisse des Punktes".

Bei allen diesen Sätzen, welchen sich noch eine grosse Anzal minder einfacher anreihen lassen, tritt die Analogie mit jenen über reelle Brennpunkte deutlich zu Tage.

Der Schlüssel um aus den Eigenschaften reeller die entsprechenden imaginärer Brennpunkte zu finden, ergiebt sich aus folgender Betrachtung.

Jede Eigenschaft reeller Brennpunkte lässt sich, wenn von der Abhängigkeit von Coordinaten gegebener Punkte und Geraden als nicht in Betracht kommend abgesehen wird, ausdrücken durch

$$f(a, b, \pm e) = 0 \qquad (\gamma)$$

Um auf imaginäre Brennpunkte überzugehen, ist es nun nur notwendig, a mit b zu vertauschen, wenn sich diese Gleichung auf eine Ellipse bezieht.

Es verwandelt sich dann

$$\pm e = \pm\sqrt{a^2-b^2} \text{ in } \pm\sqrt{b^2-a^2} = \pm ie$$

d. h. die Abscissen der imaginären Brennpunkte, welche auf der in die Abscissenaxe fallenden kleinen Axe liegen.

Die correspondirenden Eigenschaften der Hyperbel gehen hieraus offenbar durch Vertauschung von b mit ib hervor.

Es lässt sich demnach aussprechen:

(27). „Um von einem Satze über reelle auf den entsprechen-„den der imaginären Brennpunkte überzugehen, ist bei der „Ellipse a mit b [1]), und bei der Hyperbel a mit ib zu vertauschen".

Besondere Erwähnung verdient der Fall, wo in der Gleichung (γ) weder a noch b explicit auftritt. Die durch dieselbe ausgedrückte

---

1) Es sind hierunter auch die Richtungen von a und b zu verstehen, daher kommt in (26) statt „Ordinate" „Abscisse" zu stehen.

Digitized by Google

Eigenschaft wird daher wörtlich auch für imaginäre Brennpunkte Geltung haben. (Vergl. die Sätze 1, 4, 5 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 18, 20, 21, 24, [25]).

Schliesslich möge noch ein, keines Beweises bedürfender umkehrbarer Folgesatz (15) Platz finden.

(28). „Bei Centralrotationsflächen 2. Ordnung ist die Summe „oder Differenz der Entfernungen irgend eines ihrer Punkte von „zwei fixen, reellen oder imaginären Punkten der Rotationsaxe „constant u. zw. gleich der in der Rotationsaxe liegenden Axe „der Fläche, welche beim einschaligen Rotationshyperboloid noch „mit der imaginären Einheit zu multipliciren ist".

Digitized by Google

XVII.

Zur fünften Form der Integrabilitätsbedingungen einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung.

Von

Ernst Schultz.

Bezeichnen wir $p = \frac{\partial z}{\partial x}$:

$$p_1 = \varphi_1(x_1 \ldots x_n, a_1, p_2 \ldots p_n)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$p_m = \varphi_m(x_1 \ldots x_n, a_1 \ldots a_m \ldots, p_{m+1}, p_{m+2}, \ldots p_n)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$p_n = \varphi_n(x_1 \ldots x_n, a_1 \ldots a_n)$$

Ferner

$$p_1 = \psi_1(x_1 \ldots x_n, a_1 \ldots a_m, p_{m+1} \ldots p_n)$$
$$p_2 = \psi_2(x_1 \ldots x_n, a_1 \ldots a_m, p_{m+1} \ldots p_n)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$p_m = \psi_m(x_1 \ldots x_n, a_1 \ldots a_m, p_{m+1} \ldots p_n)$$

Bestehen die Gleichungen:

$$(p_1 - \varphi_1, p_{m+1} - \varphi_{m+1}) = \Phi_1 = 0$$
$$(p_2 - \varphi_2, p_{m+2} - \varphi_{m+1}) = \Phi_2 = 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(p_m - \varphi_m, p_{m+1} - \varphi_{m+1}) = \Phi_m = 0$$

so bestehen auch die Gleichungen

Digitized by Google

$$(p_1 - \psi_1,\ p_{m+1} - \varphi_{m+1}) = \Psi_1 = 0$$
$$(p_2 - \psi_2,\ p_{m+1} - \varphi_{m+1}) = \Psi_2 = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(p_m - \psi_m,\ p_{m+2} - \varphi_{m+1}) = \Psi_m = 0$$

Die Ableitung dieses Satzes ist in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung von Paul Mansion nicht ganz correct, und bei den schliesslich erhaltenen Relationen hat eine Verwechselung der φ und ψ stattgefunden. Es soll hier der richtige Beweis geliefert werden.

Es ist klar, dass $\varphi_m = \psi_m$ identisch sind. Es wird ψ_{m-1} identisch φ_{m-1}, wenn wir in φ_{m-1} für p_m ψ_m setzen. Wir erhalten also die Identität:

$$\psi_{m-1} = \varphi_{m-1}(x_1 \ldots x_n,\ a_1 \ldots a_{m-1},\ \psi_m,\ p_{m+1} \ldots p_n)$$

Es kommt also hierin p_m nur insofern vor, als es in ψ_m enthalten ist. Differentiiren wir partiell nach x, so besteht die Relation

$$\frac{\partial(p_{m-1} - \psi_{m-1})}{\partial x} = \frac{\partial(p_{m-1} - \varphi_{m-1})}{\partial x} + \frac{\partial(p_{m-1} - \varphi_{m-1})}{\partial \psi_m}\,\frac{\partial \psi_m}{\partial x}$$

Diese besteht für alle x. Anders wird es jedoch, wenn wir nach den p differentiiren. Wir erhalten

$$\frac{\partial \psi_{m-1}}{\partial p} = \frac{\partial \varphi_{m-1}}{\partial p} + \frac{\partial \varphi_{m-1}}{\partial \psi_m}\,\frac{\partial \psi_m}{\partial p}$$

Diese Gleichung besteht für alle p bis auf p_m. Es enthält nämlich φ_{m-1}, p_m explicit. Das φ_{m-1}, welches nach Substitution von ψ_m für p_m identisch ψ_{m-1} wird, enthält p_m nicht explicit. Es wird also

$$\frac{\partial \psi_{m-1}}{\partial p_m} = \frac{\partial \varphi_{m-1}}{\partial p_m}\,\frac{\partial \psi_m}{\partial p_m}$$

Hiefür können wir auch schreiben

$$\frac{\partial \psi_{m-1}}{\partial p_m} = \frac{\partial \varphi_{m-1}}{\partial p_m} - \frac{\partial \varphi_{m-1}}{\partial p_m} + \frac{\partial \varphi_{m-1}}{\partial \psi_m}\,\frac{\partial \psi_m}{\partial p_m}$$

$$\frac{\partial(p_{m-1} - \psi_{m-1})}{\partial p_1} = \frac{\partial(p_{m-1} - \varphi_{m-1})}{\partial p_1} + \frac{\partial(p_{m-1} - \varphi_{m-1})}{\partial p_1}\,\frac{\partial \psi_m}{\partial p_1}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial(p_{m-1} - \psi_{m-1})}{\partial p_{m-1}} = \frac{\partial(p_{m-1} - \varphi_{m-1})}{\partial p_{m-1}} + \frac{\partial(p_{m-1} - \varphi_{m-1})}{\partial p_{m-1}}\,\frac{\partial \psi_m}{\partial p_{m-1}}$$

Digitized by Google

$$\frac{\partial(p_{m-1}-\psi_{m-2})}{\partial p_m} = \frac{\partial(p_{m-1}-\varphi_{m-1})}{\partial p_m} + \frac{\partial\varphi_{m-1}}{\partial p_m} + \frac{\partial(p_{m-1}-\varphi_{m-1})}{\partial p_m}\frac{\partial\psi_m}{\partial p_m}$$

$$\frac{\partial(p_{m-1}-\psi_{m-2})}{\partial p_{m+1}} = \frac{\partial(p_{m-1}-\varphi_{m-1})}{\partial p_{m+3}} + \frac{\partial(p_{m-1}-\varphi_{m-1})}{\partial p_m}\frac{\partial\psi_m}{\partial p_m}$$

. . . . . .

Dementsprechend ergiebt sich

$$(p_{m-1}-\psi_{m-2},\ p_{m+1}-\varphi_{m+1}) = (p_{m-1}-\varphi_{m-1},\ p_{m+1}-\varphi_{m+1}) + \frac{\partial(p_{m-1}-\varphi_{m-1})}{\partial p_m}(\psi_m,\ p_{m+1}-\varphi_{m+1}) - \frac{\partial\varphi_{m-1}}{\partial p_m}\frac{\partial(p_{m+1}-\varphi_{m+1})}{\partial x_m}$$

Es ist

$$(\psi_m,\ p_{m+1}-\varphi_{m+1}) + \frac{\partial(p_{m+1}-\varphi_{m+1})}{\partial x_m} = (\psi_m-p_m,\ p_{m+1}-\varphi_{m+1})$$

Also erhalten wir

$$(p_{m-1}-\psi_{m-1},\ p_{m+1}-\varphi_{m+1}) = (p_{m-1}\varphi_{m-1},\ p_{m+1}-\varphi_{m+1}) + \frac{\partial(p_{m-1}-\varphi_{m-1})}{\partial p_m}(\psi_m-p_m,\ p_{m+1}-\varphi_{m+1})$$

oder

$$= (p_{m-1}-\varphi_{m-1},\ p_{m+1}-\varphi_{m+1}) + \frac{\partial\varphi_{m-1}}{\partial p_m}\psi_m$$

Wollen wir jetzt die entsprechende Gleichung für ψ_{m-2} ableiten, so haben wir zu beachten, dass φ_{m-2} identisch ψ_{m-2} wird, wenn wir in φ_{m-2} für $p_m\,\psi_m$, und für $p_{m-1}\,\psi_{m-1}$ einsetzen. Wir erhalten also:

$$\psi_{m-2} = \varphi_{m-2}(x_1 \ldots x_n,\ a_1 \ldots a_{m-2},\ \psi_{m-1},\ \psi_m,\ p_{m+1} \ldots p_n)$$

Es ist hiebei zu beachten, dass in diesem φ_{m-2}

$$p_{m-1} \text{ und } p_m$$

explicit nicht mehr vorkommen. Es wird folgende Relation für alle x bestehen:

$$\frac{\partial(p_{m-2}-\psi_{m-2})}{\partial x} = \frac{\partial(p_{m-2}-\varphi_{m-2})}{\partial x} + \frac{\partial(p_{m-2}-\varphi_{m-2})}{\partial p_{m-1}}\frac{d\psi_{m-1}}{\partial x} + \frac{\partial(p_{m-2}-\varphi_{m-2})}{\partial p_m}\frac{\partial\psi_m}{\partial x}$$

Wenn wir nun nach den verschiedenen p differentiiren, so erhalten wir folgendes Gleichungssystem:

Digitized by Google

$$\frac{\partial(p_{m-2}-\psi_{m-2})}{\partial p_1} = \frac{\partial(p_{m-2}-\varphi_{m-2})}{\partial p_1} + \frac{\partial(p_{m-1}-q_{m-2})}{\partial p_{m-1}}\frac{\partial\psi_{m-1}}{\partial p_1} + \frac{\partial(p_{m-2}-q_{m-2})}{\partial p_m}\frac{\partial\varphi_m}{\partial p_1}$$

. . . . . .

$$\frac{\partial(p_{m-2}-\psi_{m-2})}{\partial p_{m-2}} = \frac{\partial(p_{m-2}-\varphi_{m-2})}{\partial p_{m-2}} + \frac{\partial(p_{m-2}-\varphi_{m-2})}{\partial p_{m-1}}\frac{\partial\psi_{m-1}}{\partial p_{m-2}} + \frac{\partial(p_{m-2}-\varphi_{m-2})}{\partial p_m}\frac{\partial p_m}{\partial p_{m-2}}$$

$$\frac{\partial(p_{m-2}-\psi_{m-2})}{\partial p_{m-1}} = \frac{\partial(p_{m-2}-\varphi_{m-2})}{\partial p_{m-1}} + \frac{\partial q_{m-2}}{\partial p_{m-1}} + \frac{\partial(p_{m-2}-\varphi_{m-2})}{\partial p_{m-1}}\frac{\partial\psi_{m-1}}{\partial p_{m-1}} + \frac{\partial(p_{m-2}-\varphi_{m-2})}{\partial p_m}\frac{\partial\psi_m}{\partial p_{m-1}}$$

$$\frac{\partial(p_{m-2}-\psi_{m-2})}{\partial p_m} = \frac{\partial(p_{m-2}-\varphi_{m-2})}{\partial p_m} + \frac{\partial\varphi_{m-2}}{\partial p_m} + \frac{\partial(p_{m-2}-\varphi_{m-2})}{\partial p_{m-1}}\frac{\partial\psi_{m-1}}{\partial p_m} + \frac{\partial(p_{m-2}-\varphi_{m-2})}{\partial p_m}\frac{\partial\psi_m}{\partial p_m}$$

$$\frac{\partial(p_{m-2}-\psi_{m-2})}{\partial p_{m+1}} = \frac{\partial(p_{m-2}-\varphi_{m-2})}{\partial p_{m+1}} + \frac{\partial(p_{m-2}-\varphi_{m-2})}{\partial p_{m-1}}\frac{\partial\psi_{m-1}}{\partial p_m} + \frac{\partial(p_{m-2}-q_{m-2})}{\partial p_m}\frac{\partial\psi_m}{\partial p_m}$$

. . . . . .

Folglich wird

$$(p_{m-2}-\psi_{m-2},\ p_{m+1}-q_{m+1}) = (p_{m-2}-\varphi_{m-2},\ p_{m+1}-\varphi_{m+1}) + \frac{\partial(p_{m-2}-\varphi_{m-2})}{\partial p_{m-1}}(\psi_{m-1},\ p_{m+1}-\varphi_{m+1}) - \frac{\partial\varphi_{m-2}}{\partial p_{m-1}}\frac{\partial(p_{m+1}-\varphi_{m+1})}{\partial x_{m-1}} + \frac{\partial(p_{m-2}-\varphi_{m-2})}{\partial p_m}(\psi_m,\ p_{m+1}-\varphi_{m+1}) - \frac{\partial\varphi_{m-2}}{\partial p_m}\frac{\partial(p_{m+1}-\varphi_{m+1})}{\partial x_m}$$

Hieraus ergiebt sich:

$$(p_{m-2}-\psi_{m-2},\ p_{m-2}-\varphi_{m-2}) = (p_{m-2}-\varphi_{m-2},\ p_{m+1}-\varphi_{m+1}) + \frac{\partial(p_{m-1}-\varphi_{m-2})}{\partial p_{m-1}}(\psi_{m-1}-p_{m-1},\ p_{m+2}-\varphi_{m+1}) + \frac{\partial(p_{m-2}-\varphi_{m-2})}{\partial p_m}(\psi_m-p_m,\ p_{m+1}-\varphi_{m+1})$$

Führen wir die Φ und Ψ ein, so erhalten wir:

Digitized by Google

$$(p_{m-2} - \psi_{m-2},\ p_{m+1} - \varphi_{m+1}) = \Phi_{m-2} + \frac{\partial \varphi_{m-2}}{\partial p_{m-1}} \Psi_{m-1} + \frac{\partial \varphi_{m-2}}{\partial p_m} \Psi_m$$

Da ψ_m identisch ψ_m ist, so muss auch Ψ_m identisch Φ_m sein. Diese Identität besteht jedoch nicht mehr für

$$\Psi_{m-1} \text{ und } \Phi_{m-1}$$

u. s. w. Wir gelangen also zu folgendem Gleichungssystem:

$$\Psi_{m-1} = \Phi_{m-1} + \frac{\partial \varphi_{m+1}}{\partial p_m} \Phi_m$$

$$\Psi_{m-2} = \Phi_{m-2} + \frac{\partial \varphi_{m-2}}{\partial p_{m-3}} \Psi_{m-1} + \frac{\partial \varphi_{m-2}}{\partial p_m} \Phi_m$$

$$\Psi_{m-3} = \Phi_{m-3} + \frac{\partial \varphi_{m-3}}{\partial p_{m-2}} \Psi_{m-2} + \frac{\partial \varphi_{m-3}}{\partial p_{m-1}} \Psi_{m-1} + \frac{\partial \varphi_{m-3}}{\partial p_m} \Phi_m$$

. . . . . .

$$\Psi_4 = \Phi_1 + \frac{\partial \varphi_1}{\partial p_2} \Psi_2 + \frac{\partial \varphi_1}{\partial p_3} \Psi_3 + \ldots\ldots + \frac{\partial \varphi_1}{\partial p_m} \Phi_m$$

Aus diesen Gleichungen können wir die Ψ als Functionen der Φ darstellen, indem wir die erhaltenen Werte von $\Psi_{m-1} \ldots \Psi_{m-i}$ in das nächst niedrige Ψ_{m-i} einsetzen.

Ferner bemerke ich noch, dass die Determinante dieses Systems den Wert $(-1)^{m-1}$ hat.

Aus diesem Gleichungssystem folgt nun, dass die $\Psi = 0$ werden, sobald die Φ gleich 0 sind, was zu zeigen war.

Stettin, Juli 1894.

Digitized by Google

XVIII.

Zur Bour's Methode der Integration eines Systems simultaner partieller Differentialgleichungen erster Ordnung.

Von

Ernst Schultz.

Ist ein System von m simultanen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung mit n Vartabeln gegeben, so sind nach der Methode von Bour noch weitere $n - m$ Gleichungen zu suchen, sodass der Ausdruck

$$dz = p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \ldots p_n dx_n$$

integrabel wird.

Diese neu zu bestimmenden Gleichungen lassen sich in einzelnen Fällen durch Zerlegung der gegebenen Gleichungen in mehrere leicht finden. Ein vortreffliches Beispiel ist das von Mansion in seiner Theorie der partiellen Differentialgleichungen behandelte System:

$$p_1 p_3 - x_2 x_4 = 0; \quad p_2 p_4 - x_1 x_3 = 0 \tag{1}$$

wo

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} \text{ ist.}$$

Es sind hier noch zwei Gleichungen zu suchen, um $p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + p_3 dx_3 + p_4 dx_4$ zu einem vollständigen Differential zu machen.

Die beiden gegebenen Gleichungen lassen sich in folgende zerlegen:

Digitized by Google

$$(2)\qquad \frac{x_2}{p_3} = f_1;\quad \frac{p_2}{x_1} = f_1;\quad \frac{x_1}{p_4} = f_2;\quad \frac{p_2}{x_3} = f_2$$

Die Grössen f_1 und f_2 können Constanten oder Functionen der Grössen $x_1 \ldots x_4$, $p_1 \ldots p_4$ sein, stets wird sich aus dem System (2) das Gleichungssystem (1) ergeben, und die Lösung von (2) wird eine Lösung von (1) sein. Es kommt nun darauf an, f_1 und f_2 so zu bestimmen, dass die Bedingungsgleichungen erfüllt werden, um

$$dz = p_1\,dx_1 + p_2\,dx_2 + p_3\,dx_3 + p_4\,dx_4$$

integrabel zu machen Bezeichnen wir

$$(3)\qquad \begin{aligned} &H_1 = x_2 - f_1 p_3 = 0;\quad H_2 = p_1 - f_1 x_4 = 0;\\ &H_3 = x_1 - f_2 p_4 = 0;\quad H_4 = p_2 - f_2 x_3 = 0 \end{aligned}$$

so sind f_1 und f_2 so zu bestimmen, dass die Bedingungsgleichungen

$$(H_i,\ H_k) = 0$$

identisch befriedigt werden, wo

$$(H_i,\ H_k) = \frac{\partial H_i}{\partial x_1}\frac{\partial H_k}{\partial p_1} + \ldots + \frac{\partial H_i}{\partial x_n}\frac{\partial H_k}{\partial p_n} - \frac{\partial H_i}{\partial p_1}\frac{\partial H_k}{\partial x_1} - \ldots - \frac{\partial H_i}{\partial p_n}\frac{\partial H_n}{\partial x_n} \quad \text{ist.}$$

Führen wir die Rechnung aus, und sehen wir dabei f_1 und f_2 als Functionen der Grössen $x_1, x_2, x_3, x_4, p_1, p_2, p_3, p_4$, so erhalten wir folgende Bedingungsgleichungen:

$$(H_1,\ H_2) = -x_4\frac{\partial f_1}{\partial p_2} - p_3\frac{\partial f_1}{\partial x_2} - f_1 x_4\frac{\partial f_1}{\partial x_3} - f_1 p_3\frac{\partial f_1}{\partial p_4} + p_3 x_4 (f_1 f_2) = 0$$

$$(H_1,\ H_3) = -p_4\frac{\partial f_2}{\partial p_2} + f_2 p_3\frac{\partial f_1}{\partial x_4} - p_3\frac{\partial f_1}{\partial p_1} - f_1 p_4\frac{\partial f_2}{\partial x_3} + p_3 p_4 (f_1, f_2) = 0$$

$$(H_1,\ H_4) = 1 - f_1 f_2 + p_3 x_3 (f_1,\ f_2) = 0$$

$$(H_2,\ H_4) = -x_4\frac{\partial f_1}{\partial x_2} + f_1 x_3\frac{\partial f_2}{\partial p_4} + x_3\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - f_2 x_4\frac{\partial f_1}{\partial p_3} + x_4 x_3 (f_1,\ f_2) = 0$$

$$(H_2,\ H_3) = f_1 f_2 - 1 + p_4 x_4 (f_1,\ f_2) = 0$$

$$(H_3,\ H_4) = -x_3\frac{\partial f_2}{\partial p_1} - p_4\frac{\partial f_2}{\partial x_2} - f_2 p_4\frac{\partial f_2}{\partial p_3} - f_2 x_3\frac{\partial f_2}{\partial x_4} + p_4 x_3 (f_2,\ f_2) = 0$$

(f_1, f_2) oder (f_1, f_1) ist analog dem Ausdruck (H_i, H_n) gebildet. Damit die beiden Seiten dieser Gleichungen identisch verschwinden, muss zunächst

Digitized by Google

$$1 - f_1 f_2 = 0$$

sein, id. h. f_1 und f_2 müssen reciprok sein. Alsdann verschwinden auch die Ausdrücke (f_1, f_2), mögen f_1 und f_2 Constanten oder Functionen von $x_1, x_2 . x_3, x_4, p_1 \ldots p_4$ sein. Um das letzte zu beweisen, setzen wir

$$f_2 = \frac{1}{f_1}$$

alsdann ist

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = -\frac{1}{f_1^2}\frac{\partial f_1}{\partial x}$$

und

$$\frac{\partial f_2}{\partial p} = -\frac{1}{f_1^2}\frac{\partial f_1}{\partial p}$$

Dementsprechend erhalten wir für

$$(f_1, f_2) = -\frac{1}{f_1^2}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\frac{\partial f_1}{\partial p_1} - \ldots - \frac{1}{f_1^2}\frac{\partial f_1}{\partial x_4}\frac{\partial f_1}{\partial p_4}$$
$$+ \frac{1}{f_1^2}\frac{\partial f_1}{\partial p_1}\frac{\partial f_2}{\partial x_1} + \ldots + \frac{1}{f_1^2}\frac{\partial f_1}{\partial p_4}\frac{\partial f_1}{\partial x_4}$$

d. h.

$$(f_1, f_2) = 0$$

wenn f_1 und f_2 reciprok zu einander sind, und beliebige Functionen der Variabeln $x_1 \ldots x_4, p_3, p_4$ sind. Alsdann erhalten wir zur Bestimmung von f_1 und f_2 folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned}
&x_4\frac{\partial f_1}{\partial p_2} + p_3\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + f_1 x_4\frac{\partial f_1}{\partial x_3} + f_1 p_3\frac{\partial f_1}{\partial p_4} = 0\\
&p_4\frac{\partial f_1}{\partial p_2} + p_3 f_1\frac{\partial f_1}{\partial x_4} - p_3 f_1^2\frac{\partial f_1}{\partial p_1} + p_4 f_1\frac{\partial f_1}{\partial x_3} = 0\\
&x_4 f_1\frac{\partial f_1}{\partial x_2} + x_3 f_1\frac{\partial f_1}{\partial p_4} + x_3\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + x_4 f_1\frac{\partial f_1}{\partial p_3} = 0\\
&x_3 f_1\frac{\partial f_1}{\partial p_1} + p_4 f_1\frac{\partial f_1}{\partial x_2} + p_4\frac{\partial f_1}{\partial p_3} + x_3\frac{\partial f_1}{\partial x_4} = 0
\end{aligned} \tag{4}$$

Man könnte glauben, auf ein schwierigeres Problem gekommen zu sein, da eine Function gsucht werden soll, die 4 Gleichungen zu befriedigen hat. Es ist jedoch $f_1 = \text{const.}$ eine der gesuchten Functionen, was sich ohne weiteres erkennen lässt.

Setzen wir

$$f_1 = a, \quad \text{so ist} \quad f_2 = \frac{1}{a}$$

Digitized by Google

Substituiren wir diese Werte in dem Gleichungssystem (3) für f_1 und f_2, so ist

$$x_2 = ap_3; \quad p_1 = ax_4; \quad x_1 = \frac{p_4}{a}; \quad p_2 = \frac{x_3}{a}$$

Hieraus ergeben sich für p_1, p_2, p_3, p_4 folgende Werte:

$$p_1 = ax_4; \quad p_2 = \frac{x_3}{a}; \quad p_3 = \frac{x_2}{a}; \quad p_4 = ax_1$$

Demnach wird

$$dz = ax_4\,dx_1 + \frac{x_3}{a}\,dx_2 + \frac{x_2}{a} + ax_1\,dy_4$$

oder

$$dz = a\,d(x_1x_4) + \frac{1}{a}d(x_2x_3)$$

mithin erhalten wir durch Integration

$$z + b = ax_1x_4 + \frac{1}{a}x_2x_3$$

Dies ist die eine der von Mansion angegebenen Lösungen.

Die Gleichungen (4) werden auch identisch befriedigt, wenn man

$$f_1 = a(p_3x_3 - p_4x_4)$$

setzt; alsdann muss

$$f_2 = \frac{1}{a(p_3x_3 - p_4x_4)}$$

sein. Nach Substitution dieser Ausdrücke für f_1 und f_2 gehen die Gleichungen (3) über in:

$$x_2 - a\,p_3(p_3x_3 - p_4x_4) = 0$$

$$p_1 - a\,x_4(p_3x_3 - p_4x_4) = 0$$

$$x_1 - \frac{p_4}{a(p_3x_3 - p_4x_4)} = 0$$

$$p_2 - \frac{x_3}{a(p_3x_3 - p_4x_4)} = 0$$

Aus diesen Gleichungen haben wir p_1, p_2, p_3, p_4 als Functionen von x_1, x_2, x_3, x_4 darzustellen. Aus der dritten Gleichung ergiebt sich

$$ax_1(p_3x_3 - p_4x_4) = p_4$$

also

$$p_4(1 + ax_1x_4) = ap_3x_3x_3$$

mithin ist

Digitized by Google

$$p_4 = \frac{ap_3 x_1 x_3}{1 + ax_1 x_4}$$

Mit Substitution dieses Wertes von p_4 geht die erste Gleichung über in

$$x_2 = ap_3^2\left(x_3 - \frac{a x_1 x_3 x_4}{1 + a x_1 x_4}\right)$$

Mithin erhalten wir für p_3:

$$p_3 = \sqrt{\frac{x_2(1 + ax_1 x_4)}{ax_3}}$$

wobei wir das doppelte Zeichen mit $\sqrt{\ }$ verbinden. Für p_1 erhalten wir

$$p_1 = \frac{ax_3 x_4 p_3}{1 + ax_1 x_4}$$

und für p_2

$$p_2 = \frac{1 + ax_1 x_4}{ap_3}$$

Wir erhalten also für dz:

$$dz = \frac{a x_3 x_4}{1 + ax_1 x_4} p_3\, dx_1 + \frac{1 + ax_1 x_4}{ap_3}\, dx_2 + p_3\, dx_3 + \frac{ax_1 x_3}{1 + ax_1 x_4} p_3\, dx_4$$

Setzen wir nun den für p_3 erhaltenen Wert ein, so erhalten wir

$$dz = \sqrt{\frac{ax_2 x_3}{1 + ax_1 x_4}}\, x_4 dx_1 + \sqrt{\frac{a x_2 x_3}{1 + ax_1 x_4}}\, x_1\, dx_4 + \sqrt{\frac{x_3(1 + ax_1 x_4}{ax_2}}\, dx_2 + \sqrt{\frac{x_2(1 + a x_1 x_4)}{ax_3}}\, dx_3$$

Hieraus ergiebt sich:

$$dz = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{ax_2 x_3}{1 + ax_1 x_4}}\, d(1 + ax_1 x_4) + 2\sqrt{\frac{1 + a x_1 x_4}{a}}\, d\sqrt{x_2 x_3}$$

folglich wird

$$dz = 2d\sqrt{\frac{x_2 x_3(1 + ax_1 x_4)}{a}}$$

Wenn wir jetzt integriren, so erhalten wir

$$z + b = 2\sqrt{\frac{x_2 x_3(1 + ax_1 x_4)}{a}}$$

Dies ist eine neue Lösung des Gleichungssystems (1), welche von Mansion nicht angegeben wird.

Digitized by Google

Ausser dem unter (2) angegebenen System können die gegebenen Gleichungen (1) auch in folgendes System zerlegt werden:

$$\frac{x_2}{p_1} = \frac{p_3}{x_4} \quad \text{und} \quad \frac{x_1}{p_2} = \frac{p_4}{x_3}$$

oder, wenn wir die Functionen f_1 und f_2 einführen, so erhalten wir das System:

$$(5) \qquad \frac{x_2}{p_1} = f_1; \quad \frac{p_3}{x_4} = f_1; \quad \frac{x_1}{p_2} = f_2; \quad \frac{p_4}{x_3} = f_2$$

Setzen wir jetzt

$$H_1 = x_2 - p_1 f_1; \quad H_3 = p_3 - x_4 f_1; \quad H_3 = x_1 - p_2 f_2; \quad H_4 = p_4 - x_3 f_2$$

Jetzt sind die Functionen f_1 und f_2 so zu bestimmen, dass die Bedingungsgleichungen

$$(H_i, H_k) = 0$$

identisch erfüllt werden. Führen wir die Rechnung aus, so erhalten wir:

$$(6) \qquad \begin{aligned}
(H_1, H_2) &= -x_4 \frac{\partial f_1}{\partial p_2} - p_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_3} - f_1 x_4 \frac{\partial f_1}{\partial x_1} - f_1 p_3 \frac{\partial f_1}{\partial p_4} \\
&\quad + p_1 x_4 (f_1, f_1) = 0 \\
(H_1, H_3) &= -f_2 + f_1 + p_1 p_2 (f_1, f_2) = 0 \\
(H_1, H_4) &= -x_3 \frac{\partial f_2}{\partial p_2} - p_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_4} - p_1 f_2 \frac{\partial f_1}{\partial p_3} - f_1 x_3 \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \\
&\quad + p_1 x_3 (f_1, f_2) = 0 \\
(H_2, H_3) &= f_2 x_4 \frac{\partial f_1}{\partial x_2} + f_1 p_2 \frac{\partial f_2}{\partial p_1} + x_4 \frac{\partial f_1}{\partial p_1} + p_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\
&\quad + p_2 x_4 (f_1, f_2) = 0 \\
(H_2, H_4) &= -f_1 + f_2 + x_3 x_4 (f_1, f_2) = 0 \\
(H_3, H_4) &= -x_3 \frac{\partial f_2}{\partial p_1} - p_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_4} - p_2 f_2 \frac{\partial f_2}{\partial p_3} - f_2 x_3 \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \\
&\quad + p_2 x_3 (f_2, f_2) = 0
\end{aligned}$$

Damit diese Gleichungen erfüllt werden, muss zunächst $f_1 = f_2$ sein, ferner können wir $f_1 = f_2$ gleich einer Constanten setzen. Es sei

$$f_1 = f_2 = a$$

Alsdann erhalten wir für die Grössen p folgende Werte:

$$p_1 = \frac{x_2}{a}; \quad p_2 = \frac{x_1}{a}; \quad p_3 = a x_4; \quad p_4 = a x_3$$

Digitized by Google

Dementsprechend ist

$$dz = \frac{x_2}{a}\,dx_1 + \frac{x_1}{a}\,dx_2 + a\,x_4\,dx_3 + a\,x_3\,dx_4$$

und durch Integration erhalten wir

$$z + b = \frac{x_1 x_2}{a} + a\,x_3 x_4$$

Dies ist die zweite Lösung, welche Mansion angiebt.

Diese Methode lässt erkennen, dass diese Lösungen Gruppen von Gleichungssystemen angehören. Nehmen wir nämlich den Fall, dass f_1 und f_2 reciprok sind, so gelangen wir zu dem Gleichungssystem:

$$\frac{x_2}{p_3} = \frac{p_4}{x_1} = \frac{x_3}{p_2} = \frac{p_1}{x_4}$$

Hieraus können wir also folgende Gleichungssysteme bilden

(A)
1) $x_2 x_4 = p_1 p_3$ und $x_1 x_3 = p_2 p_4$
2) $x_1 x_2 = p_3 p_4$ und $x_3 x_4 = p_1 p_2$
3) $x_2 p_2 = p_3 x_3$ und $x_1 p_1 = x_4 p_4$

Das erste System ist das gegebene, von welchem wir ausgingen. Lösungen von dieser Gruppe sind:

$$z + b = a x_1 x_4 + \frac{x_2 x_3}{a} \quad \text{und} \quad z + b = 2\sqrt{\frac{x_2 x_3}{a}(1 + a x_1 x_4}$$

Nehmen wir den Fall, wo $f_1 = f_2$ sein muss, um die Bedingungsgleichungen zu erfüllen, so erhalten wir das System

$$\frac{x_2}{p_1} = \frac{p_3}{x_4} = \frac{x_1}{p_2} = \frac{p_4}{x_3}$$

Hieraus ergeben sich folgende Gleichungssysteme:

(B)
1) $x_2 x_4 = p_1 p_3$ und $x_1 x_3 = p_2 p_4$
2) $x_2 p_2 = x_1 p_1$ und $x_3 p_3 = x_4 p_4$
3) $x_2 x_3 = p_1 p_4$ und $x_1 x_4 = p_2 p_3$

Das erste Gleichungssystem dieser Gruppe ist das gegebene Gleichungssystem. Diese Gruppe hat die Lösung:

$$z + b = \frac{x_1 x_2}{a} + a x_3 x_4$$

Digitized by Google

Da die beiden Gruppen (A) und (B) in den ersten Gleichungssystemen übereinstimmen, so wird eine Lösung der Gruppe (A) auch eine Lösung des ersten Gleichungssystems der Gruppe (B) sein, jedoch wird sie keine Lösung des zweiten und dritten Gleichungssystems von (B) sein. Und ebenso umgekehrt wird eine Lösung der Gruppe (B) eine Lösung des ersten Gleichungssystemes von (A) sein, jedoch keine Lösung des zweiten und dritten Gleichungssystems von (A). Von der Richtigkeit kann man sich durch die Ausführung der Rechnung überzeugen.

Stettin, September 1894.

Digitized by Google

XIX.

Miscellen.

1.

Bemerkungen zu den aus einer Curve abgeleiteten Curven.

Anschliessend an den in dieser Zeitschrift erschienenen Aufsatz: ‚Ueber eine allgemeine Eigenschaft der Curve der reciproken Ordinate" sei folgendes bemerkt.

Wenn man statt der Curvenordinate deren Quadrat aufträgt, so ist für dieselbe Abscisse die Subtangente der neuen Curve gleich der halben Subtangente der ursprünglichen Curve.

Der Beweis ergibt sich leicht mittelst der Differentialrechnung, kann aber auch ohne dieselbe durch eine geometrische Betrachtung erbracht werden.

Ist $y = f(x)$ die Gleichung der Urcurve, so ist

$$y = [f(x)]^2$$

jene der abgeleiteten Curve. Dann ist bekanntlich die Subtangente der Urcurve gleich

$$\frac{f(x)}{f'(x)}$$

Für die abgeleitete Curve ist

$$\frac{dy}{dx} = 2f(x)f'(x)$$

daher ihre Subtangente

$$\frac{[f(x)]^2}{2f(x)f'(x)} = \frac{f(x)}{2f'(x)}$$

Digitized by Google

wodurch nach Vergleichung mit der Subtangente der Urcurve die Behauptung, durch die Differentialrechnung erwiesen, folgt.

Soll der Beweis ducrh eine geometrische Betrachtung geliefert werden, so muss zuerst die abgeleitete Curve einer Geraden bekannt sein.

Geht die Gerade durch den Coordinatenursprung, so lautet ihre Gleichung

$$y = a^2 x^2$$

woraus folgt, dass diese eine Parabel ist, deren Scheitel der Coordinatenursprung und deren Achse der positive Teil der Ordinatenachse ist.

Ist P ein Punkt der Urcurve, P' der aus ihm abgeleitete, so findet man die Tangente T in P, wenn man P mit dem unendlich nahen Punkt Q der Urcurve verbindet. Q hat zum abgeleiteten Punkt Q', und die Verbindungslinie $P'Q'$ ist dann auch Tangente an die abgeleitete Curve. Wenn man aber zu allen Punkten der Tangente T die abgeleiteten Punkte bestimmt, so erfüllen diese nach früherem die durch P' und Q' hindurchgeht. Parabel und abgeleitete Curve haben demnach in P' die nämliche Tangente T'. Schneidet T die Abscissenache in M, so ist M der Scheitel der Parabel und die in M auf der Abscissenachse in positiver Richtung errichtete Senkrechte die Achse derselben*). Ist N der Fusspunkt der von P auf die Parabelachse gefällten Senkrechten, und macht man in negativer Richtung

$$MO = NM$$

so ist NO bekanntlich die Subtangente der Parabel und daher OP' die Tangente der abgeleiteten Curve. Diese Tangente schneidet die Abscissenachse in R, und ist S der Fusspunkt der Ordinate von P, so ist zu zeigen, dass

$$MR = RS$$

ist, was unmittelbar aus der Congruenz der Dreiecke MOR und RSP' folgt.

Wird die Wurzel aus der Ordinate statt dieser aufgetragen, so ist für dieselbe Abscisse die Subtangente der abgeleiteten Curve doppelt so gross als die Subtangente der Urcurve.

---

*) Eine Figur wurde hier nicht angebracht, da der geneigte Leser sich dieselbe leicht selbst entwerfen oder vorstellen kann.

Digitized by Google

Beweis mittelst der Differentialrechnung. Ist

$$y = f(x)$$

die Gleichung der Urcurve, so ist

$$y = \sqrt{f(x)}$$

jene der abgeleiteten Curve. Die Subtangente der letzteren ist, da

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$$

gleich

$$\frac{2f(x)}{f'(x)}$$

während jene der Urcurve nur

$$\frac{f(x)}{f'(x)}$$

beträgt.

Beweis durch eine geometrische Betrachtung. Ist

$$y = ax$$

die Gleichung einer Geraden gegeben, so ist

$$y = \sqrt{ax} \quad \text{oder} \quad y^2 = ax$$

die Gleichung der aus ihr abgeleiteten Curve. Also diese eine Parabel, deren Scheitel der Coordinatenursprung und deren Achse die positive Abscissenachse ist.

Es sei P ein Punkt der Urcurve, T die Tangente in demselben, M ihr Schnittpunkt mit der Abscissenaxe. Der aus P abgeleitete Punkt sei P', Q der unendlich nahe Punkt der Urcurve zu P, der auch in T liegen muss. Ist Q' der aus Q abgeleitete Punkt, dann ist die Verbindungslinie $P'Q'$ die Tangente T' in P'. Sie schneide die Abcissenachse in R. Ist S der Fusspunkt der Ordinate von P, so ist

$$RM = MS$$

weil T' auch zugleich Tangente der aus T abgeleiteten Parabel ist.

Wilhelm Ruf.

Digitized by Google

2.

Fundamentalauflösungen der Pell'schen Gleichung.

Die Fundamentalauflösungen der Pell'schen Gleichung

$$t^2 - Du^2 = 1$$

lassen sich zum grossen Teil in Classen einteilen, innerhalb deren die Determinanten sowol wie die Auflösungen T, U arithmetische Reihen bilden. Die erste Classe sei die folgende:

D.	T.	U.
2	3	2
6	5	2
12	7	2
20	9	2
30	11	2
42	13	2

u. s. w.

Die Determinanten bilden hier eine arithmetische Reihe zweiter Ordnung, für welche die Formel

$$x^2 + 3x + 2 \quad (x = 0, 1, 2, \ldots)$$

gilt. Die Auflösungen T sind die ungeraden Zahlen von 3 an und die Auflösungen U sind lauter 2.

Eine andere Classe ist diese:

D.	T.	U.
3	2	1
8	3	1
15	4	1
24	5	1
35	6	1
48	7	1

u. s. w.

Die Determinanten bilden eine arithmetische Reihe zweiter Ordnung, welcher die Formel

$$x^2 + 4x + 3 \quad (x = 0, 1, 2, \ldots)$$

zu Grunde liegt. Die Auflösungen T sind die Zahlen der natürlichen Zahlenreihe von 2 an und die Auflösungen U sind lauter 1.

Digitized by Google

Eine dritte Classe ist diese:

D.	*T.*	*U.*
5	9	4
10	19	6
17	33	8
26	51	10
37	73	12
50	99	14

u. s. w.

Die Determinanten bilden eine arithmetische Reihe zweiter Ordnung mit der Formel

$$x^2+4x+5 \ (x = 0, 1, 2, \ldots)$$

Die Auflösungen T bilden eine arithmetische Reihe zweiter Ordnung mit der Formel

$$2x^2+8x+9 \ (x = 0, 1, 2, \ldots)$$

und die Auflösungen U sind die geraden Zahlen von 4 an.

Die vierte Classe ist die folgende:

D.	*T.*	*U.*
7	8	3
14	15	4
23	24	5
34	35	6
47	48	7
62	63	8

u. s. w.

Die Determinanten bilden eine arithmetische Reihe zweiter Ordnung mit der Formel

$$x^2+6x+7 \ (x = 0, 1, 2, \ldots)$$

Die Auflösungen T bilden eine arithmetische Reihe zweiter Ordnung mit der Formel

$$x^2+6x+8 \ (x = 0, 1, 2, \ldots)$$

und die Auflösungen U sind die Zahlen der natürlichen Zahlenreihe von 3 an.

Digitized by Google

Die fünfte Classe ist diese:

D.	*T.*	*U.*
11	10	3
18	17	4
27	26	5
38	37	6
51	50	7
66	65	8

u. s. w.

Die Determinanten bilden eine arithmetische Reihe zweiter Ordnung mit der Formel

$$x^4 + 6x + 11 \quad (x = 0, 1, 2, \ldots)$$

Die Auflösungen T bilden eine arithmetische Reihe zweiter Ordnung mit der Formel

$$x^2 + 6x + 10 \quad (x = 0, 1, 2, \ldots)$$

und die Auflösungen U sind die Zahlen der natürlichen Zahlenreihe von 3 an.

Für die übrigen Determinanten und Auflösungen der Pell'schen Gleichung scheint die Aufstellung solcher Reihen schwieriger zu sein.

Es darf noch besonders darauf aufmerksam gemacht werden, dass die Quadrate der ungeraden Zahlen immer eine Zerlegung von der Form

$$t^2 - D2^2 = 1$$

zulassen, wo D eine Zahl von der Form

$$x^2 + 3x + 2 \quad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

ist. Ferner sei noch bemerkt, dass bei den Determinanten der Classe 1 die erste Differenzreihe eine Reihe von auf einanderfolgenden geraden Zahlen bildet, und dass bei denjenigen Determinanten oder Auflösungen der Classen 2, 3, 4 und 5, welche arithmetische Reihen zweiter Ordnung sind, die erste Differenzreihe immer aus einer Reihe von auf einanderfolgenden ungeraden Zahlen besteht.

Oldenburg i. Gr.

G. Speckmann.

Digitized by Google

3.

Ueber die Auflösung der Pell'schen Gleichung.

Ist a eine beliebige Zahl, so sind die Zahlen

$$(a^2+1)^2-1 = a^4+2a^2 \quad \text{und} \quad (a^2-1)^2-1 = a^4-2a^2$$

wie leicht ersichtlich, durch a^2 teilbar und der Quotient ist $= a^2 \pm 2$. — Setzt man nun um den Quotienten $a^2 \pm 2$ als Determinante in eine Pell'sche Gleichung

$$T^2 - DU^2 = 1$$

ein, so kann man für die Lösung T die Zahl $a^2 \pm 1$ und für die Lösung U die Zahl a^2 annehmen, denn

1) $$(a^2 \pm 1)^2 - (a^2 \pm 2)\, a^2 = 1$$

Eine grosse Anzahl von Lösungen der Pell'schen Gleichung lässt sich in dieser Weise bestimmen. Erweitert wird die Gleichung 1) sodann dadurch, dass man an a^2 den beliebigen Multiplicator n anfügt. Es erhält die Gleichung dadurch die Form

2) $$(na^2 \pm 1)^2 - (n^2 a^2 \pm 2n)\, a^2 = 1$$

$$(a = 1.\ 2,\ 3,\ .\ .\ .\ \infty;\quad n = 1,\ 2,\ 3,\ .\ .\ .\ \infty)$$

Die Fundamentalauflösungen der Pell'schen Gleichung lassen sich auch in Classen einteilen, innerhalb deren die Determinanten sowol wie auch die Auflösungen T und U arithmetische Reihen bilden. Es mögen einige dieser Classen hier folgen.

Classe 1.

$D.$	$T.$	$U.$
2	3	2
6	5	2
12	7	2
20	9	2

u. s. w.

Die Determinanten bilden eine arithmetische Reihe zweiter Ordnung mit der Formel

$$x^2+3x+2 \quad (x = 0,\ 1,\ 2,\ .\ .\ .)$$

Die Auflösungen T sind die ungeraden Zahlen von 3 an und die Auflösungen U sind lauter 2.

Digitized by Google

2. Classe.

D.	*T.*	*U.*
3	2	1
8	3	1
15	4	1
24	5	1

u. s. w.

Die Determinanten bilden eine arithmetische Reihe zweiter Ordnung mit der Formel

$$x^2+4x+3 \quad (x = 0, 1, 2, \ldots)$$

Die Auflösungen T sind die Zahlen der nat. Zahlenreihe von 2 an und die Auflösungen U sind lauter 1.

3. Classe.

D.	*T.*	*U.*
5	9	4
10	19	6
17	33	8
26	51	10

u. s. w.

Die Determinanten bilden eine arithmetische Reihe zweiter Ordnung mit der Formel

$$x^2+4x+5 \quad (x = 0, 1, 2, \ldots)$$

Die Auflösungen T bilden eine arithmetische Reihe zweiter Ordnung mit der Formel

$$2x^2+8x+9 \quad (x = 0, 1, 2, \ldots)$$

und die Auflösungen U sind die geraden Zahlen von 4 an.

4. Classe.

D.	*T.*	*U.*
7	8	3
14	15	4
23	24	5
34	35	6

u. s. w.

Die Determinanten bilden eine arithmetische Reihe zweiter Ordnung mit der Formel

Digitized by Google

$$x^2+6x+7 \quad (x = 0, 1, 2, \ldots)$$

Die Auflösungen T bilden ebenfalls eine arithmetische Reihe zweiter Ordnung mit der Formel

$$x^2+6x+8 \quad (x = 0, 1, 2, \ldots)$$

und die Auflösungen U sind die Zahlen der nat. Zahlenreihe von 3 an.

5. Classe.

$D.$	$T.$	$U.$
11	10	3
18	17	4
27	26	5
38	37	6

u. s. w.

Die Determinanten bilden eine arithmetische Reihe zweiter Ordnung mit der Formel

$$x^2+6x+11 \quad (x = 0, 1, 2, \ldots)$$

Die Auflösungen T bilden eine arithmetische Reihe zweiter Ordnung mit der Formel

$$x^2+6x+10 \quad (x = 0, 1, 2, \ldots)$$

und die Auflösungen U sind die Zahlen der nat. Zahlenreihe von 3 an.

6. Classe.

$D.$	$T.$	$U.$
12	7	2
32	17	3
60	31	4
96	49	5

Die Determinanten bilden eine arithmetische Reihe zweiter Ordnung mit der Formel

$$4x^2+19x+11 \quad (x = 0, 1, 2, \ldots)$$

und die Auflösungen U sind die Zahlen der nat. Zahlenreihe von 2 an.

Die angegebenen Lösungsformeln

1) $$(a^2 \pm 1)^2 - (a^2 \pm 2)a^2 = 1$$

und

2) $$(na^2 \pm 1)^2 - (n^2 a^2 \pm 2n)a^2 = 1$$

$$n = 1, 2, 3, \ldots \infty$$
$$a = 1, 2, 3, \ldots \infty$$

können dahin erweitert werden, dass sie allgemein für die Lösung einer Gleichung

$$T^2 - DU^2 = m^2$$

anzuwenden sind. Die betreffenden Lösungsformen erhalten dann den Ausdruck

3) $$(a^2 \pm m)^2 - (a^2 \pm 2m)a^2 = m^2$$

und

4) $$(na^2 \pm m)^2 - (n^2 a^2 \pm 2nm)a^2 = m^2$$

$$a, m, n = 1, 2, 3, \ldots \infty$$

Die Fundamentalauflösungen der allgemeinen Gleichung

$$T^2 - DU^2 = m^2$$

können für ein $m > 1$ auch in Classen eingeteilt werden, innerhalb deren die Determinanten sowol wie auch die Auflösungen T, U arithmetische Reihen bilden.

Oldenburg i. Gr.

G. Speckmann.

4.

Ueber die Zerlegung der Zahlen von der Form $4n+1$ in zwei Quadrate.

Erhebt man eine Reihe a von auf einanderfolgenden geraden Zahlen zur 2. Potenz und addirt zu jeder dieser Potenzzahlen das Quadrat b einer ungeraden Zahl, so entsteht eine arithmetische Reihe s von Zahlen von der Form $4n+1$.

Beispiele:

1)

$a =$	4,	16,	36,	64,	100,	144,	196, . . .
$b =$	1,	1,	1,	1,	1,	1,	1, . . .
$s =$	5,	17,	37,	65,	101,	445,	197, . . .

Die Reihe s_1 ist eine arithmetische Reihe zweiter Ordnung, welcher die Formel

$$4x^2 + 8x + 5 \quad (x = 0, 1, 2, \ldots)$$

zu Grunde liegt.

Digitized by Google

2)
$$\begin{array}{llllllll} a = 4, & 16, & 36, & 64, & 100, & 144, & 196, & \ldots \\ b = 9, & 9, & 9, & 9, & 9, & 9, & 9, & \ldots \\ \hline s_2 = 13, & 25, & 45, & 73, & 109, & 153, & 205, & \ldots \end{array}$$

Die Reihe s_2 ist eine arithmetische Reihe zweiter Ordnung mit der Formel

$$4x^2 + 8x + 13 \quad (x = 0, 1, 2, \ldots)$$

Allgemein lautet die Formel für die Verbindungen der geraden Zahlen mit der zweiten Potenz einer ungeraden Zahl z:

$$4x^2 + 8x + (z^2 + 4) \quad (x = 0, 1, 2, \ldots; \quad z = 1, 3, 5, 7, \ldots)$$

Man kann die Reihen s_n auch in leichter Weise dadurch bilden, dass man zu den Zahlen einer jeweiligen Reihe die zwischen der zu dieser Reihe gehörigen ungeraden Quadratzahl und der nächstfolgenden ungeraden Quadratzahl bestehende Differenz hinzu zählt. Es ist z. B.

$$\begin{array}{llllllll} s_1 = & 5, & 17, & 37, & 65, & 101, & 145, & 197, \ldots \\ s_2 = 13, & 25, & 45, & 73, & 109, & 153, & 205, & \ldots \\ s_3 = 29, & 41, & 61, & 89, & 125, & 169, & 221, & \ldots \end{array}$$

u. s. w.

Die Differenz zwischen den Zahlen der Reihen s_1 und s_2 ist

$$= 9 - 1 = 8$$

Die Differenz zwischen den Zahlen der Reihen s_2 und s_3 ist

$$= 25 - 9 = 16$$

Allgemein ist die Differenz zwischen den Zahlen der Reihen s_1, s_2, $\ldots s_n$ gleich $8x$ $(x = 1, 2, 3, \ldots)$ und es gilt für die Bildung der Verticalreihen des Systemes der Reihen s_n die Formel

$$8x + n \quad (x = 0, 1, 2, \ldots; \quad n = 5, 17, 37, \ldots)$$

Für mässig grosse Zahlen könnte man leicht eine Tafel der Reihen s_n anfertigen und daraus die zu einer Zahl $4n+1$ derselben gehörigen Quadrate bequem entnehmen.

G. Speckmann.

5.

Ueber die Reihensysteme, deren Modul ein Vielfaches von 6 ist.

In meinen „Beiträgen zur Zahlenlehre“ [1]) habe ich Pag. 40 den folgenden Satz aufgestellt und begründet:

1) Verlag von Eschen & Fasting zu Oldenburg i. Gr.

Digitized by Google

„Ist eine Zahl Z von der Form $xn \mp 1$ gegeben und hat „ein Primfactor p derselben ebenfalls die Form $xn \mp 1$, „so ist $\frac{Z \pm 1}{x} \mp \frac{p \pm 1}{x}$ durch p teilbar."

Da nun jede Primzahl > 3 die Form $6n \mp 1$ oder $6xn \pm r$ hat, so kann bei denjenigen Zahlen, die aus Factoren von der Form $6n \mp 1$ zusammengesetzt sind, für den anzuwendenden Modul x immer ein Vielfaches der Zahl 6 gesetzt werden. Es dürfte deshalb eine Aufstellung der primitiven Zahlformen für diejenigen Reihensysteme, deren Modul von der Frm $6n$ ist, nicht ohne Nutzen sein. — Es ist nun gleich ersichtlich, dass in einem Reihensystem mit dem Modul $6n$ nur diejenigen Anfangsglieder, die eine Primzahl oder ein ungerades Vielfaches einer Primzahl darstellen, nebst der Zahl 1, relativ prim zum Modul sein können. Es ist deshalb leicht, die betreffenden Zahlformen zu finden. — Praktisch wendet man dazu die folgende Regel an: Man dividire zunächst den Modul $6n$ durch 2 und stelle fest, welche Zahlen von der Form $6n \mp 1$ unter $\frac{6n}{2}$ liegen. Von diesen Zahlen kann man dann diejenigen streichen, die mit $6n$ den gleichen Teiler haben. Setzt man die übrig gebliebenen Zahlen nebst der 1 in die Formel $6xn \pm r$ nach einander für r ein, so erhält man für das betr. System die sämtlichen Formen, in denen Anfangsglied und Differenz zu einander relativ prim sind.

Für die Moduln 6, 12, 18, 24, 30 mögen die betreffenden Formen hier folgen.

Modul:	Zahlformen:
6	$6n \pm 1$
12	$12a \pm 1$
	$12n \pm 5$
18	$18n \pm 1$
	$18n \pm 5$
	$18n \pm 7$
24	$24n \pm 1$
	$24n \pm 5$
	$24n \pm 7$
	$24n \pm 11$

Digitized by Google

Modul:	Zahlformen:
30	$30n \pm 1$
	$30n \pm 7$
	$30n \pm 11$
	$30n + 13$

G. Speckmann.

6.

Lösung der von Loyd in der Londoner „Tit Bits“ gestellten Preisaufgabe.

„Die Zahlen 4 5 6 7 8 9 0 sollen zu einer arithmetischen Reihe geordnet werden, die zusammen gezählt sich so weit als möglich der Zahl 82 nähern muss.“ (Nach „Illustr. Welt“, 12. Heft, 42. Jahrgang, 1894.)

Auflösung:

Man schreibe die Ziffern $4_\alpha\ 5_\beta\ 6_\gamma\ 7_\delta\ 8_\varepsilon\ 9_\zeta\ 0_\eta$ in der folgenden Reihe nach den Indices $\alpha\ \beta\ \gamma$ u. s. w.

$$6_\gamma \cdot 7_\delta + 5_\beta \cdot 8_\varepsilon + 4_\alpha \cdot 9_\zeta \cdot 0_\eta = 82 + 0$$

Luckenwalde.

Benz, Lehrer.

Digitized by Google

XX.

Ueber den Flächen- und Rauminhalt der durch Bewegung von Curven und Flächen erzeugten Flächen- und Raumgrössen.

(Fortsetzung.)

Von

Chr. Nehls,

Wasserbaudirector in Hamburg.

---

§ 5. Parallelverschiebung einer begrenzten Fläche.

Die bewegte Fläche sei F und das von ihr beschriebene Volumen V; es ist also d^3V ein Volumenelement, welches unendlich klein ist in der dritten Ordnung, während die Flächen- und Volumenelemente d^2F, d^2V und dF, dV unendlich klein sind bzhw. in der zweiten und in der ersten Ordnung. An dem Punkte P_1 der Fläche F, dessen Coordinaten x_1, y_1 und z_1 sind, liege das Flächenelement d^2F, welches letztere als eine nach zwei Richtungen hin unendlich kleine ebene Fläche zu betrachten ist; ist ein Teil der Fläche F von endlicher Grösse eben, so kann man nach Seite 242—244 statt d^2F gleich diese ganze endliche Fläche in die Rechnung einführen, wenn man unter $P_1(x_1, y_1, z_1)$ den Schwerpunkt derselben versteht.

Die Fläche verschiebe sich nach der Richtung einer Geraden AA_1, welche mit den Achsen die Winkel α, β, γ bildet. Das Maass der Verschiebung soll mit σ bezeichnet werden; dasselbe kann unendlich klein oder auch von endlicher Grösse sein.

Die Gleichung der Ebene, in welcher d^2F liegt, sei folgende (vergl. Seite 238 u. ff.):

Digitized by Google

1) $$\cos\lambda \cdot x + \cos\mu \cdot y + \cos\nu \cdot z - p = 0 \qquad (d^2F.$$

Dieser Gleichung müssen die Coordinaten des Punktes P_1, d. i. x_1, y_1, z_1 genügen, also ist

2) $$\cos\lambda \cdot x_1 + \cos\mu \cdot y_1 + \cos\nu \cdot z_1 - p = 0 \qquad (P_1.$$

Durch die unendlich kleine Verschiebung σ möge der Punkt P_1 in die Lage P_2 mit den Coordinaten x_2, y_2, z_2 kommen; dann ist

3) $$\left.\begin{aligned} x_2 &= x_1 + \sigma \cdot \cos\alpha \\ y_2 &= y_1 + \sigma \cdot \cos\beta \\ z_2 &= z_1 + \sigma \cdot \cos\gamma \end{aligned}\right\} \qquad (P_2$$

Bezeichnet man wieder, wie auf Seite 243, den Abstand des Punktes P_2' von der Ebene des Elements d^2F mit ds_1, so ist

4) $$ds_1 + \cos\lambda \cdot x_3 + \cos\mu \cdot y_2 + \cos\nu \cdot z_2 - p$$

setzt man hierin die Werte aus den Gleichungen 3) ein und subtrahirt dann die Gleichung 2), so bleibt:

5) $$cd_1 = (\cos\alpha \cdot \cos\lambda + \cos\beta \cdot \cos\mu + \cos\gamma \cdot \cos\nu)\sigma$$

In dieser Gleichung ist der eingeklammerte Factor auf der rechten Seite der cosinus des Winkels, den die Richtung von σ mit der Normalen der Ebene 1) bildet. Bezeichnet man denselben mit ω, so ist

6) $$ds_1 = \cos\omega \cdot \sigma$$

Multiplicirt man ds_1 mit d^2F, so erhält man d^3V, nämlich:

7) $$d^3V = \cos\omega \cdot \sigma \cdot d^2F$$

Integrirt man erst nach σ, so erhält man für eine endliche Länge σ:

8) $$d^2V = \cos\omega \cdot \sigma \cdot d^2F$$

Integrirt man nun zwei Mal in Bezug auf d^2F und bezieht die Integrale auf die ganze Fläche F, so kann man cos ω vor die Integralzeichen setzen, wenn F eben ist, also λ, μ und ν constant sind, und erhält demnach für eine ebene Fläche F und für einen endlichen Wert σ:

9) $$V = (\cos\omega \cdot \sigma)F = \sigma(\cos\omega \cdot F)$$

Beide Formen zeigen V als gleichwertig mit einem normalen Cylinder, dessen Normalquerschnitt und Höhe im ersten Fall bzhw. F und $\cos\omega \cdot \sigma$, im zweiten Fall $\cos\omega \cdot F$ und σ sind.

Digitized by Google

Multiplicirt man Gl. 5) direct mit d^2F, ohne Einführung von ω, so erhält man

10) $$d^3V = (\cos\alpha \,.\, \cos\lambda + \cos\beta \,.\, \cos\mu + \cos\gamma \,.\, \cos\nu) d^2F \,.\, \sigma$$

und für endliche Werte von σ:

11) $$d^2V = (\cos\alpha \,.\, (\cos\lambda \,.\, d^2F) + \cos\beta(\cos\mu \,.\, d^2F) + \cos\gamma(\cos\nu \,.\, d^2F))\,\sigma$$

Nach Seite 240 kann man hierfür schreiben:

12) $$d^2V = (\cos\alpha \,.\, d^2F_{yz} + \cos\beta \,.\, d^2F_{xz} + \cos\gamma \,.\, d^2F_{xy})\,\sigma$$

Integrirt man diese Gleichung zwei Mal, so erhält man

13) $$V = (\cos\alpha \,.\, F_{yz} + \cos\beta \,.\, P_{xz} + \cos\gamma \,.\, F_{xy})\,\sigma$$

In dieser Gleichung sind F_{yz}, F_{xz} und F_{xy} die Projectionen des Randes der Fläche F bzhw. auf die YZ-, XZ- und XY-Ebene. In Worten kann man den Inhalt der Gleichung etwa so aussprechen:

„Bewegt sich eine beliebige Fläche F, deren Randpro-
„jectionen auf die Coordinaten-Ebenen F_{yz}, F_{xz} und F_{xy}
„sind, parallel fortschreitend nach der Richtung σ, die
„mit den Coordinatenachsen die Winkel α, β und γ bildet,
„um eine endliche Strecke σ vorwärts, so ist das beschrie-
„bene Volumen gleich der Summe von drei normalen Cy-
„lindern, als deren Normalquerschnitte und Höhen man
„entweder F_{yz}, F_{xz}, F_{xy} und $\cos\alpha \,.\, \sigma$, $\cos\beta \,.\, \sigma$, $\cos\gamma \,.\, \sigma$,
„oder $\cos\alpha \,.\, F_{yz}$, $\cos\beta \,.\, F_{xz}$, $\cos\gamma \,.\, F_{xy}$ und σ als Höhe
„für alle drei betrachten kann; im letztern Fall kann man
„sich statt dessen auch einen einzigen Cylinder mit dem
„Normalquerschnitt gleich der Summe der Querschnitte
„jener drei und der Höhe σ denken."

Setzt man in Gleichung 13) nach einander

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0$$

so werden in jedem Falle die beiden andern Winkel gleich 90^0 und die Richtung von AA_1 oder σ wird nach einander parallel zur X-, Y-, Z-Achse. Die Gleichung ergiebt für diese einzelnen Fälle

$$\alpha = 0, \quad Y_z = F_{yz} \,.\, \sigma$$
$$\beta = 0, \quad V_y = F_{xz} \,.\, \sigma$$
$$\gamma = 0, \quad V_z = F_{xy} \,.\, \sigma$$

Digitized by Google

Multiplicirt man diese Gleichungen nach einander mit $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ und betrachtet dann die Grössen $\cos\alpha \,.\, \sigma$, $\cos\beta \,.\, \sigma$, $\cos\gamma \,.\, \sigma$ als Verschiebungen von F nach den Richtungen der Achsen, so ergiebt die Addition der 3 Gleichungen wieder die Gleichung 13), und man erkennt in Uebereinstimmung mit § 4., dass die 3 Teilbewegungen von F nach den Richtungen der Achsen in ihrer Wirkung gleichwertig sind mit der angeschriebenen Bewegung nach der Richtung σ. Verfolgt man diesen Weg weiter, so kann man leicht alle die Sätze ableiten, welche § 4. über die Parallelverschiebung von Flächen und die dadurch bestrichenen Räume abgeleitet sind.

§ 6. Drehung einer begrenzten Fläche um eine Achse.

Die im vorigen Paragraphen bezeichnete Fläche F soll sich jetzt um die dort als Richtung der Parallelverschiebung bezeichnete Gerade AA_1, welche wieder mit den Achsen die Winkel α, β, γ bildet, als Achse drehen, und zwar um einen Winkel δ, der unendlich klein oder von endlicher Grösse ist. Alles Uebrige wird hier ebenso wie dort angenommen, und nach Seite 242—244 gilt auch hier, dass man statt des an dem Punkt $P_1\,(x_1\,y_1\,z_1)$ liegenden Flächenelements d^2F eine endliche ebene Fläche einführen kann, wenn man unter P_1 ihren Schwerpunkt versteht.

Die Gleichung der Ebene, in welcher d^2F liegt, sei folgende (vergl. Seite 16 u. ff.);

$$1) \qquad \cos\lambda \,.\, x + \cos\mu \,.\, y + \cos\nu \,.\, z - p = 0 \qquad (d^2F.$$

Dieser Gleichung müssen die Coordinaten des Punktes P_1, d. i. $x_1\,y_1\,z_1$ genügen, also ist auch

$$2) \qquad \cos\lambda \,.\, x_1 + \cos\mu \,.\, y_1 + \cos\nu \,.\, z_1 - p = 0 \qquad (P_1.$$

Es ist nun zunächst zu bestimmen, was aus $x_1\,y_1\,z_1$ nach einer unendlich kleinen Drehung δ um die Achse AA_1 wird. Die allgemeinste Lage der letzteren erhält man, wenn man sie nicht bestimmt durch den Anfangspunkt O, sondern durch einen beliebigen Punkt A, etwa mit den Coordinaten u, v, w gehen lässt. Es ist aber nicht erforderlich, die Rechnung von vornherein für diesen allgemeinsten Fall einzuleiten, denn man, kann wenn man die Achse durch den Anfangspunkt legt, in der Entwicklung sowol wie in den Schlussformeln nur

$$x_1 - u, \quad y_1 - v, \quad z_1 - w \quad \text{statt} \quad x_1\,y_1\,z_1$$

Digitized by Google

setzen, um die Resultate für den allgemeinsten Fall zu erhalten; um das als richtig zu erkennen, braucht man nur das Coordinatensystem parallel nach dem Punkt A verschoben zu denken. Ich nehme also bis auf weiteres an, dass die Achse AA_1 durch den Anfangspunkt gehe *). Dreht sich nun d^2F um diese Achse um den unendlich kleinen Winkel δ, wodurch P_1 nach P_2 mit den Coordinaten $x_2 y_2 z_2$ komme, so wird man setzen können (siehe Figur 14):

$$3) \qquad \left\{ \begin{array}{l} x_2 = x_1 + \delta x \\ y_2 = y_1 + \delta y \\ z_2 = z_1 + \delta z \end{array} \right\} \qquad (P_2.$$

wo δx, δy und δz unendlich kleine, näher zu bestimmenden Grössen sind.

Man lege durch P_1 eine Ebene E normal zu OA_1, welche diese Achse im Punkte A_1 schneide; dann liegt auch P_2 in dieser Ebene, und P_1A_1 und P_2A_1, deren gleiche Länge r den Abstand des Punktes P_1 von der Achse OA_1 bezeichnen, stehen beide normal zu dieser Achse. Ist die Länge

$$\overline{OA_1} = q$$

so ist die Gleichung der Ebene E:

$$4) \qquad \cos\alpha \,.\, x + \cos\beta \,.\, y + \cos\gamma \,.\, z - q = 0 \qquad (E.$$

Dieser Gleichung müssen die Coordinaten von P_1 sowol wie von P_2 genügen, so dass stattfindet:

$$\cos\alpha \,.\, x_1 + \cos\beta \,.\, y_1 + \cos\gamma \,.\, z_1 - q$$
$$= \cos\alpha (x_1 + \delta x) + \cos\beta (y_1 + \delta y) + \cos\gamma (z_1 + \delta z) - q$$

Ferner ist

---

*) Anmerkung. An die Stelle des Punktes A mit den Coordinaten u, v, w kann man auch einen beliebigen andern Punkt der Achse AA_1 treten lassen. Wählt man dafür den Punkt, in welchem eine von dem Anfangspunkt O auf AA_1 gezogene Normale letztere trifft, so sind die Coordinaten dieses Punkts, wenn man die Länge

$$\overline{OA} = u\cos\alpha + v\cos\beta + w\cos\gamma$$

mit s bezeichnet

$$u - s \,.\, \cos\alpha, \quad v - s \,.\, \cos\beta, \quad w - s \,.\, \cos\gamma$$

und sein Abstand vom Anfangspunkt O ist

$$\sqrt{u^2 + v^2 + w^2 - s^2}.$$

Digitized by Google

$$\overline{OP_1} = \overline{OP_2}$$

was die Gleichung liefert:

$$x_1^2+y_1^2+z_1^2 = x_1+\delta x)^2+(y_1+\delta y)^2+(z_1+\delta z)^2$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt:

$$5)\quad \delta y = \frac{z_1 \cdot \cos\alpha - x_1 \cdot \cos\gamma}{y_1 \cdot \cos\gamma - z_1 \cdot \cos\beta} \cdot \delta x$$

$$\delta z = \frac{x_1 \cdot \cos\beta - y_1 \cdot \cos\alpha}{y_1 \cdot \cos\gamma - z_1 \cdot \cos\beta} \cdot \delta x$$

Damit sind δy und δz als Functionen von δx gefunden, und es ist jetzt also eine Beziehung zwischen ϱx und δ zu ermitteln. Man hat:

$$\text{Bogen } P_1P_2 = r \cdot \delta$$

also

$$\delta = \frac{\overline{P_1P_2}}{r}$$

da der Bogen unendlich klein ist. Für seine Länge findet man aus den Coordinaten von P_2 und P_1

$$\overline{P_1P_2} = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$
$$= \sqrt{\delta x^2+\delta y^2+\delta z^2}$$

d. i. in Rücksicht auf die Gleichungen 5):

$$6)\quad \overline{P_1P_2} = \frac{\delta x}{y_1\cos\gamma - z_1\cos\beta}$$
$$\times \sqrt{(y_1\cos\gamma - z_1\cos\beta)^2+(z_1\cos\alpha - x_1\cos\gamma)+(x_1\cos\beta - y_1\cos\alpha)^2}$$
$$= \frac{\delta x}{y_1\cos\gamma - z_1\cos\beta}$$
$$\times \sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2-(x_1\cos\alpha+y_1\cos\beta+z_1\cos\gamma)^2}$$

Ebenso findet man r aus den Coordinaten von A_1 und P_1. Setzt man die Coordinaten x_1, y_1 und z_1 von P_1 in Gleichung 4) ein, so erhält man:

$$\overline{OA_1} = q = \cos\alpha \cdot x_1 + \cos\beta \cdot y_1 + \cos\gamma \cdot z_1$$

so dass die Coordinaten von A_1 nun mit $q \cdot \cos\alpha$, $q \cdot \cos\beta$, $q \cdot \cos\gamma$ bestimmt sind. Man findet also

$$7)\quad \overline{A_1P_1} = \overline{A_1P_2} = r$$
$$= \sqrt{(q\cos\alpha - x_1)^2+(q\cos\beta - y_1)^2+(q\cos\gamma - z_1)^2}$$
$$= \sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2-(x_1\cos\alpha+y_1\cos\beta+z_1\cos\gamma)^2}$$

Digitized by Google

In Rücksicht auf die Gleichungen 5), 6) und 7) geht

$$\delta = \frac{\overline{P_1 P_2}}{r}$$

über in die einfachen Beziehungen:

8) $$\delta = \frac{\delta x}{y_1 \cos\gamma - z_1 \cos\beta} = \frac{\delta y}{z_1 \cos\alpha - x_1 \cos\gamma} = \frac{dz}{x_1 \cos\beta - x_1 \cos\alpha}$$

Bevor ich weiter gehe, möge noch erwähnt werden, dass man

$$\overline{A_1 P_1} = r$$

noch einfacher als vorher so findet: Man setze

$$\overline{OP_1} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} = \varrho$$

dann ist

$$r = \varrho \,.\, \sin \overline{P_1 O A_1}$$

und der Winkel $P_1 O A_1$ ist bestimmt aus den Richtungen OP_1 und OA_1:

$$\cos \overline{P_1 O A_1} = \frac{x_1}{\varrho} \,.\, \cos\alpha + \frac{y_1}{\varrho} \,.\, \cos\beta + \frac{z_1}{\varrho} \cos\gamma$$

Demnach (vergl. Gl. 6)):

7a) $$r = \sqrt{1 - \cos^2 \overline{P_1 O A_1}}$$
$$= \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - (x_1 \cos\alpha + y_1 \cos\beta + z_1 \cos\gamma)^2}$$
$$= \sqrt{(y_1 \cos\gamma - z_1 \cos\beta)^2 + (z_1 \cos\alpha - x_1 \cos\gamma)^2 + (x_1 \cos\beta - y_1 \cos\alpha)^2}$$

Nachdem in Gleichung 8) die Beziehung zwischen δ und δx, δy und δz gefunden, findet man weiter den Abstand des Punktes $P_2(x_2, y_2, z_2)$ von der Ebene F des Flächenelements d^2F (Gleichung 1)) mit

9) $$ds_1 = \cos\lambda \,.\, x_2 + \cos\mu \,.\, y_2 + \cos\gamma \,.\, z_2 - p$$

und wenn man hierin für x_2, y_2, z_2 die Werte aus Gleichung 3) einsetzt und dann Gleichung 2) abzieht:

10) $$ds_1 = \cos\lambda \,.\, \delta x + \cos\mu \,.\, \delta y + \cos\nu \,.\, \delta z$$

d. i. mit Beziehung auf die Gleichungen 8):

Digitized by Google

11) $$ds_1 = ((y_1\cos\gamma - z_1\cos\beta)\cos\lambda + (z_1\cos\alpha - x_1\cos\gamma)\cos\mu + (x_1\cos\beta - y_1\cos\alpha)\cos\nu)\delta$$

Werden diese Gleichungen multiplicirt mit d^2F, so erhält man das Volumen d^3V, nämlich (ohne Indices)

12) $$d^3V = (\cos\lambda \,.\, \delta x + \cos\mu \,.\, \delta y + \cos\nu \,.\, \delta z)\, d^2F$$
$$= ((y \,.\, \cos\gamma - z \,.\, \cos\beta)\cos\lambda + (z \,.\, \cos\alpha - x \,.\, \cos\gamma)\cos\mu + (x \,.\, \cos\beta - y \,.\, \cos\alpha)\cos\nu)\, d^2F \,.\, \delta$$ *)

---

*) **Anmerkung.** Man kann zu diesen Gleichungen auch auf folgendem Wege gelangen:

Legt man durch die Achse OA_3, also durch die Punkte $O(0, 0, 0)$ $A_1(q\cos\alpha, q\cos\beta, q\cos\gamma)$ und durch den Punkt $P_1(x_1 y_1 z_1)$ eine Ebene P, so wird die Gleichung dieser Ebene, weil sie durch den Anfangspunkt geht, von der Form sein

a) $$ax + by + cz = 0 \qquad (P$$

Mit Hülfe der Coordinaten von A_1 (vergl. Seite 343) und P_1, welche beide dieser Gleichung genügen müssen, kann man a, b und c so weit bestimmen, dass man statt der Gleichung a) für die Ebene OA_1P_1 die bestimmte Gleichung

b) $$(y_1\cos\gamma - z_1\cos\beta)x + (z_1\cos\alpha - x_1\cos\gamma)y + (x_1\cos\beta - y_1\cos\alpha)x = 0 \qquad (P$$

erhält. Bildet die Ebene des Flächenelements d^2F (Gleichung 1), Seite 240) mit dieser Ebene einen Winkel φ, so ist

c) $$\cos\varphi \,.\, d^2F = \frac{(y_1\cos\gamma - z_1\cos\beta)\cos\lambda + (z_1\cos\alpha - x_1\cos\gamma)\cos\mu + (x_1\cos\beta - y_1\cos\alpha)\cos\nu}{\sqrt{(y_1\cos\gamma - z_1\cos\beta)^2 + (z_1\cos\alpha - x_1\cos\gamma)^2 + (x_1\cos\beta - y_1\cos\alpha)^2}\ \sqrt{\cos^2\lambda + \cos^2\mu + \cos^2\nu}}\, d^2F$$

Das ist die Fläche des Normal- oder Meridianschnitts des Volumens, welches d^2F bei der Drehung um die Achse OA_1 (vergl. Seite 253) bespricht. In dieser Gleichung ist

$$\sqrt{\cos^2\lambda + \cos^2\mu + \cos^2\nu} = 1$$

und nach Gleichung 7a) ist die andere Wurzelgrösse im Nenner der rechten Seite

$$= \overline{A_1P_1} = r$$

Wird die Fläche des Normalschnitts des Volumenelements, welches man wie einen (schief abgeschnittenen) Cylinder berechnen kann, multiplicirt mit $r \,.\, \delta$, so erhält man für das Volumen selbst genau wieder die obige Gleichung 12). Die Entwicklung gilt auch dann, wenn d^2F eine ebene Fläche von endlicher Grösse ist, falls $x_1 y_1 z_1$ die Coordinaten des Schwerpunkts derselben bezeichnen (vergl. Seite 242—244).

Uebrigens kann man Folgendes bemerken: Dividirt man die Gleichung b)

Digitized by Google

oder, indem man nach δ integrirt, für endliche Werte von δ_1 und indem man die Projectionen von d^2F auf die drei Coordinaten-Ebenen einführt (Seite 240)

$$13)\quad d^2V = ((y\cos\gamma - z\,.\,\cos\beta)\cos\lambda + (z\,.\,\cos\alpha - x\,.\,\cos\gamma)\cos\mu + (x\,.\,\cos\beta - y\,.\,\cos\alpha)\cos\nu)\,d^2F\,.\,\delta$$
$$= ((y\,.\,\cos\gamma - z\,.\,\cos\beta)\,d^2F_{yz} + (z\,.\,\cos\alpha - x\,.\,\cos\gamma)d^2F_{zx} + (x\,.\,\cos\beta - y\,.\,\cos\alpha)d^2F_{xy})\delta$$

Die geometrische Bedeutung dieser Gleichungen wird nun näher zu untersuchen sein, und es möge zunächst der besondere Fall seine Erledigung finden, wo F eine ebene Fläche von endlicher Grösse ist. Dann sind also x_1, y_1 und z_1 die Coordinaten des Schwerpunkts von F, und unter dieser Voraussetzung ist, für endliche Werte des Drehwinkels δ:

$$14)\quad V = ((y_1\cos\gamma - z_1\cos\beta)\cos\lambda + (z_1\cos\alpha - x_1\cos\gamma)\cos\mu + (x_1\cos\beta - y_1\cos\alpha)\cos\nu)F\,.\,\delta$$
$$= ((y_1\cos\gamma - z_1\cos\beta)F_{yz} + (z_1\cos\alpha - x_1\cos\gamma)F_{zx} + (x_1\cos\beta - y_1\cos\alpha)F_{xy})\delta$$

Nach der Anmerkung auf Seite 340 bis 344 ist in der ersten dieser beiden Gleichungen der Ausdruck innerhalb der grossen Klammer gleich $r\cdot\cos\varphi$, wenn φ den Winkel bezeichnet, den die durch den Schwerpunkt P_1 und durch die Drehachse OA_1 gelegte Ebene OA_1P_1 mit der Ebene F bildet.

---

durch r, so nimmt sie die Normalform an. Daraus erkennt man weiter, dass wenn man auf der durch den Anfangspunkt gezogenen Normalen der Ebene OA_1P_1 eine Länge

$$\overline{A_1P_1} = r$$

d. i. gleich dem Abstande des Punktes P_1 von der Drehaehse abträgt, die Projectionen dieser Längen auf die Coordinatenachsen die folgenden Werte haben:

$$y_1\cos\gamma - z_1\cos\beta,\quad z_1\cos\alpha - x_1\cos\gamma,\quad x_1\cos\beta - y_1\cos\alpha$$

Damit ist die Bedeutung dieser in der ganzen Entwicklung vielfach vorkommenden Grössen klargestellt.

Auch die Linie P_1P_2 steht normal zu der Ebene OA_1P_1; die Länge ds_1 ist die Projection von

$$\overline{P_1P_2} = r\delta$$

auf die Normale der Ebene von d^2F, und da der Winkel dieser beiden Normalen ebenso wie der Winkel der zugehörigen Ebenen gleich φ sein muss, so ist auch der Wert ds_1 der Gleichung 10) so zu schreiben:

$$ds_1 = \cos\lambda\,.\,\delta x + \cos\mu\,.\,\delta y + \cos\nu\,.\,\delta z = r\delta\,.\,\cos\varphi$$

Digitized by Google

Man kann also die Gleichung auch so schreiben

15) $$V = r\cos\varphi \,.\, F\delta = F\cos\varphi \,.\, r\delta$$

Dieses Resultat lässt sich in Worten etwa so aussprechen:

„Dreht sich eine ebene Fläche F um eine beliebige Fläche „um einen Winkel δ, so ist das beschriebene Volumen „gleich der Projection von F auf die durch ihren Schwer„punkt und die Drehachse gelegte Ebene, multiplicirt mit „der Länge $r\delta$ des von dem Schwerpunkt zurückgelegten „Weges."

Die zweite Form der Gleichung 14) kann man einfach so deuten:

„Dreht sich eine ebene Fläche F um eine beliebige „Achse um einen Winkel δ, so ist das beschriebene Volu„men gleich dem in Teilen des Halbmessers ausgedrückten „Winkel d, multiplicirt mit der Summe der Inhalte dreier „normaler Cylinder, deren Grundflächen die Projectionen „von F auf die YZ-, XZ- und XY-Ebene, und deren Höhen „die Grössen $y_1\cos\gamma - z_1\cos\beta$, $z_1\cos\alpha - x_1\cos\gamma$, $x_1\cos\beta$ „$- y_1\cos\alpha$ sind, wo x_1, y_1, z_1 die Coordinaten des Schwer„punkts von F und α, β, γ die Winkel der Drehachse „mit den Coordinaten-Achsen sind. — Weiter unten wird „dieser Satz in noch allgemeinerer Form auftreten."

Ist nun weiter die rotirende Fläche F nicht eben, sondern beliebig gekrümmt, so erhält man nach zweimaliger Integration der zweiten Form der Gleichung 13) folgenden Ausdruck, in welchem die Integralzeichen auf sämtliche Elemente von T zu beziehen sind:

16) $$\begin{aligned} V = {} & \delta \int\int (y \,.\, \cos\gamma - z \,.\, \cos\beta)\, dF_{yz} \\ & + \varrho \int\int (z \,.\, \cos\alpha - x \,.\, \cos\gamma)\, dF_{zx} \\ & + \delta \int\int (x \,.\, \cos\beta - y \,.\, \cos\alpha)\, dE_{xy} \end{aligned}$$

Als Beispiel für die Deutung der Doppel-Integrale möge das erste dienen:

Die Grösse unter den Integralzeichen ist das Element eines normalen Cylinders, dessen Basis in der YZ-Ebene die Projection d^2F_{yz} von d^2F ist und demnach die Ordinaten y und z hat, und ersten Höhe $y\cos\gamma - z\cos\beta$ ist, parallel zur Y-Achse zu messen. Setzt man letzteren Ausdruck gleich χ, so ist

Digitized by Google

17) $$\begin{cases} \xi = y\cos\gamma - z\cos\beta & \text{oder} \\ \xi - \cos\gamma \,.\, y \mp \cos\beta \,.\, z = 0 \end{cases}$$

Das ist die Gleichung einer Ebene, welche man durch Division mit

$$\sqrt{1+\cos^2\beta+\cos^2\gamma} = \sqrt{1+\sin^2\alpha}$$

auf die Normalform bringen kann

18) $$\frac{1}{\sqrt{1+\sin^2\alpha}}\xi - \frac{\cos\gamma}{\sqrt{1+\sin^2\alpha}}y + \frac{\cos\beta}{\sqrt{1+\sin^2\alpha}}z = 0$$

Ist τ der Winkel, den die Normale dieser Ebene mit der X-Achse, den die Ebene selbst also mit der YZ-Ebene bildet, so ist demnach:

19) $$\cos\tau = \frac{1}{\sqrt{1+\sin^2\alpha}}, \quad \text{also} \quad \operatorname{tg}\tau = \sin\alpha$$

Setzt man in der Gleichung der Ebene $\xi = 0$, so erhält man ihre Spur in der YZ-Ebene:

$$y\cos\gamma - z\cos\beta = 0 \quad \text{oder}$$

20) $$\frac{y}{z} = \frac{\cos\beta}{\cos\gamma}$$

Für die Drehachse OA_1 gilt die Beziehung

21) $$\frac{x}{\cos\alpha} = \frac{y}{\cos\beta} = \frac{z}{\cos\gamma}$$

also ist ihre Projection auf die YZ-Ebene ausgedrückt durch

22) $$\frac{y}{z} = \frac{\cos\beta}{\cos\gamma}$$

dieselbe Gleichung wie vorhin. Nunmehr kann man also die Ebene so bestimmen, dass sie die YZ-Ebene schneidet in der Projection der Drehachse, und dass sie mit der YZ Ebene einen Winkel τ bildet, für den die Gleichung

$$\operatorname{tg}\tau = \sin\alpha$$

gilt, wenn α der Winkel der Drehachse mit der X-Achse ist. — Das Doppel-Integral stellt nun das Volumen eines normalen schief abgeschnittenen Cylinders dar, dessen Basis F_{yz} ist, und dessen zweite Endfläche in der eben ermittelten Ebene liegt. Man kann also jetzt in Bezug auf das Volumen V folgenden ganz allgemeinen Satz aussprechen:

Digitized by Google

„Dreht sich eine beliebige begrenzte Fläche F um eine „beliebige Drehachse OA_1, welche mit den Coordinaten-„achsen die Winkel α, β, γ bildet, um einen Winkel δ, so „ist das beschriebene Volumen gleich dem in Teilen des „Halbmessers ausgedrückten Winkel δ, multiplicirt mit der „Summe der Inhalte von drei normalen schief abgeschnitte-„nen Cylindern, deren Grundflächen die Projectionen von „F auf die Coordinaten-Ebenen sind; die andern End-„flächen der drei Cylinder liegen in Ebenen, welche die „betreffende Coordinaten-Ebene in der Projection der Dreh-„achse auf diese letztere schneiden und mit der Coordi-„naten-Ebene einen Winkel bilden, dessen Tangente gleich „ist dem sinus des Winkels der Drehachse mit derjenigen „Coordinaten-Achse, welche zu der Coordinaten-Ebene nor-„mal steht. Hierbei ist nicht erforderlich, dass die Dreh-„achse OA_1 durch den Anfangspunkt O gehe, und die ab-„solute Lage des zweiten Coordinatensystems ist vollständig „gleichgültig."

In Bezug auf den letzten Teil dieses allgemeinen Satzes ist noch Folgendes nachzutragen: Steht von vornherein nicht fest, dass die Drehachse durch den Anfangspunkt O gehe, sondern ist vielmehr für dieselbe nur ein beliebiger Punkt $A(u\,v\,w)$ (vergl. Seite 340) und die Richtung durch die Winkel $\alpha\,\beta\,\gamma$ gegeben, so nimmt Gleichung 15) die allgemeinere Form an:

16a)
$$V = \left\{ \begin{array}{l} \delta \int\int ((y-v)\cos\gamma - (z-w)\cos\beta)\, d^2F_{yz} \\ +\delta \int\int ((z-w)\cos\alpha - (x-u)\cos\gamma)\, d^2F_{xz} \\ +\delta \int\int ((x-u)\cos\beta - (y-v)\cos\alpha)\, d^2F_{xy} \end{array} \right\}$$

Für das erste Integral ist dann die Ebene der zweiten Endfläche des Cylinders:

17a)
$$\left\{ \begin{array}{l} \xi = (y-v)\cos\gamma - (z-w)\cos\beta \quad \text{oder} \\ \xi = -(y-v)\cos\gamma + (z-w)\cos\beta \end{array} \right.$$

und nach Division mit

$$\sqrt{1+\cos^2\beta+\cos^2\gamma} = \sqrt{1+\sin^2\alpha}$$

in der Normalform

18a)
$$\frac{1}{\sqrt{1+\sin^2\alpha}} - \xi \frac{\cos\gamma}{\sqrt{1+\sin^2\alpha}}(y-v) + \frac{\cos\beta}{\sqrt{1+\sin^2\alpha}}(z-w) = 0$$

Digitized by Google

Es ist also auch hier

19a) $$\cos\tau = \frac{1}{\sqrt{1+\sin^2\alpha}}, \quad \text{also} \quad \operatorname{tg}\tau = \sin\alpha$$

und wenn man in der Gleichung der Ebene $\xi = 0$ setzt, so erhält man für ihre Spur in der *YZ*-Ebene:

20a) $$\frac{y-v}{z-w} = \frac{\cos\beta}{\cos\gamma}$$

Für die durch Punkt $A(u, v, w)$ gehende Drehachse hat man:

21a) $$\frac{x-u}{\cos\alpha} = \frac{y-v}{\cos\beta} = \frac{z-w}{\cos\gamma}$$

also für die Projection der Achse auf die *YZ*-Ebene:

22a) $$\frac{y-v}{z-w} = \frac{\cos\beta}{\cos\gamma}$$

was wieder gleichlautend ist mit 20a). Die Grössen u, v, w sind also in Bezug auf den Wortlaut des obigen allgemeinen Satzes ganz ohne Einfluss.

Für die Anwendung der gefundenen Regeln ist es nicht unwichtig, zu beachten, dass wenn F eine ebene Fläche ist, die Projectionen des Schwerpunkts von F mit den Schwerpunkten der Projectionen von F zusammenfallen. — Uebrigens kann man die drei Cylinder auch so auffassen: Man verschiebe dieselben in sich selbst parallel ihren Seiten, d. i. parallel ihren Coordinatenachsen, so dass die eine Endfläche jedes Mal in die Fläche F fällt. Als Beispiel diene wieder der Cylinder parallel der *X*-Achse, also das erste Integral in der allgemeinen Gleichung 16a). Dem Punkt $P(x, y, z)$ in der in F liegenden Endfläche des Cylinders entspricht dann in der andern Endfläche ein Punkt, dessen Coordinaten $x - ((y-v)\cos\gamma - (z-w)\cos\beta)$, y und z sind. Nennt man diese Coordinaten ξ, y und z, so ist demnach die Gleichung der zweiten Endfläche:

$$\xi = x - ((y-v)\cos\gamma - (z-w)\cos\beta)$$

aus der man x mit Hülfe der Gleichung von F beseitigen kann, so dass dann eine Gleichung zwischen ξ, y und z übrig bleibt. Ist F eine ebene Fläche von endlicher Grösse mit der Gleichung 1), so ist

$$x = -\left(\frac{\cos\mu}{\cos\lambda}y + \frac{\cos\nu}{\cos\lambda}z - \frac{p}{\cos\lambda}\right)$$

also:

Digitized by Google

$$\cos\lambda \cdot \xi + (\cos\mu + \cos\gamma \cdot \cos\lambda)\, y + (\cos\nu - \cos\beta\cos\lambda)\, z - (p + (w\cos\gamma - v\cos\beta)\cos\lambda) = 0$$

Aehnlich wie früher, kann man auch diese Gleichung weiter verfolgen; so ist es z. B. interessant, dass, wenn u, v und w null sind, also die Drehachse durch den Anfangspunkt geht, die X-Achse von dieser Ebene und von F in demselben Punkt

$$\xi = \frac{p}{\cos\lambda}$$

geschnitten wird; praktisches Interesse hat indessen die weitere Untersuchung nicht.

Setzt man in Gleichung 16a) nach einander

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0$$

so werden in jedem Falle die beiden andern Winkel der Drehachse mit den Coordinatenachsen gleich 90^0 und die Drehachse fällt nach einander zusammen mit der X-, Y-, Z-Achse. Die Gleichung ergiebt für diese einzelnen Fälle:

23)
$\alpha = 0$, Drehachse parallel zur X-Achse

$$V_x = \delta \iint (z-w)\, d^2F_{xz} - \delta \iint (y-v)\, d^2F_{xy}$$

$\beta = 0$, Drehachse parallel zur Y-Achse

$$V_y = \delta \iint (x-u)\, d^2F_{xy} - \delta \iint (z-w)\, d^2F_{yz}$$

$\gamma = 0$, Drehachse parallel zur Z-Achse

$$V_z = \delta \iint (y-v)\, d^2F_{yz} - \delta \iint (x-w)\, d^2F_{zz}$$

Aus diesen Formeln ist der folgende Satz zu entnehmen:

„Dreht sich eine beliebige begrenzte Fläche F um eine „beliebige feste Achse um einen unendlichen Winkel δ, so „ist das beschriebene Volumen gleich der Differenz der„jenigen einzeln nach der einfachen Guldin'schen Regel „zu bestimmenden Volumina, welche die Projectionen von „F auf zwei beliebige durch die Drehachse gelegte und zu „einander normale Ebenen beschrieben, wenn sie dieselbe „Drehung δ ausführen. Welchem Teil hierbei das Vor„zeichen plus zukommt, ist aus den Formeln 23) zu ent„nehmen. Bei Bestimmung des Vorzeichens der einzelnen

Digitized by Google

„Teile kann sich diese Differenz in besonderen Fällen in „eine (positive oder negative) Summe verwandeln."

Nimmt man in den Gleichungen 23) den Drehwinkel δ als unendlich klein an, so hat man statt V_x, V_y, V_z zu setzen: dV_x, dV_y dV_z. Multiplicirt man dann die Gleichungen nach einander mit $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ und fasst die Factoren $\delta\cos\alpha$, $\delta\cos\beta$, $\delta\cos\gamma$ als Drehwinkel für die einzelnen Achsen X, Y, Z auf, für welche die entsprechenden kleinen Drehungen nach einander auszuführen sind, so kann man aus dem Umstand, dass die Summe der drei Gleichungen wieder die Gleichung 16a) für unendlich kleines δ ergiebt, folgenden Satz entnehmen:

„Dreht sich eine beliebige Fläche F um eine beliebige „Achse $AA_1(\alpha\beta\gamma)$ um einen unendlich kleinen Winkel δ, „so kann bezüglich des bei dieser Drehung beschriebenen „Volumens dieselbe ersetzt werden durch die beliebig auf „einander folgenden Drehungen derselben Fläche um drei „parallel zu den Coordinatenachsen X, Y, Z durch einen „beliebigen Punkt A der Achse AA_1 gezogene gerade „Linien, bzhw. um die Winkel $\delta\,.\cos\alpha$, $\delta\,.\cos\beta$, $\delta\,.\cos\gamma$; „letztere sind die Projectionen einer auf der Drehachse „gemessenen Strecke δ auf die Coordinatenachsen."

Das ist offenbar eine Wiederholung der in § 4., Seite 258—260 bezüglich der Drehung um zwei sich schneidende Achsen ermittelten Gesetzes und wesentlich mit dem dort Gesagten gleichbedeutend *).

---

*) Anmerkung. Die Gleichung 16a) lässt sich auf folgende Form bringen, welche beide auch für endliche Werte von δ gelten, wenn man die einzelnen in Frage kommenden Drehungen jedes Mal auf dieselbe Anfangslage der Fläche F und ihrer Projectionen bezieht:

$$\text{a)}\quad V-\left\{\begin{array}{l}\delta\,.\cos\alpha\int\int(z-w)d^2F_{xz}-\delta\,.\cos\alpha\int\int(y-v)\,d^2F_{xy}\\ +\delta\ \cos\beta\int\int(x-u)d^2F_{xy}-\delta\,.\cos\beta\int\int(z-w)d^2F_{yz}\\ +\delta\,.\cos\gamma\int\int(y-v)d^2E_{yz}-\sigma\,.\cos\gamma\int\int(x-u)d^2F_{xz}\end{array}\right\}$$

Digitized by Google

Als besonderer Fall soll nun noch derjenige bezeichnet werden, wo sich eine ebene Fläche F, deren Ebene wie in Gleichung 1)

$$\cos\lambda \,.\, x + \cos\mu \,.\, y + \cos\nu \cdot z - p = 0$$

sei, um eine der Coordinatenachsen, etwa um die Z-Achse dreht. Da für diesen Fall

$$\gamma = 0, \quad \alpha = \beta = 90^0$$

so ist, wenn wieder $x_1 y_1 z_1$ die Coordinaten des Schwerpunkts von F sind, nach Gleichung 14)

24)
$$\begin{aligned} V &= \delta(y_1 \,.\, \cos\lambda - x_1 \,.\, \cos\mu) F \\ &= \delta\,(y \,.\, F_{yz} - x_1 \,.\, F_{zz} \end{aligned}$$

---

b)
$$V = \left\{ \begin{aligned} &\delta \,.\, \sin\alpha \int\int \frac{(y-v)\cos\gamma - (z-w)\cos\beta}{\sin\alpha} \,.\, d^2F_{yz} \\ +&\delta \,.\, \sin\beta \int\int \frac{(z-w)\cos\alpha - (x-u)\cos\gamma}{\sin\beta} \,.\, d^2F_{zx} \\ +&\delta \,.\, \sin\gamma \int\int \frac{(x-u)\cos\beta - (y-v)\cos\alpha}{\sin\gamma} \,.\, d^2F_{xy} \end{aligned} \right\}$$

Die Bedeutung dieser Gleichungen ist folgende:

In Gleichung a) sind

$$\delta \,.\, \cos\alpha, \quad \delta \,.\, \cos\beta \quad \text{und} \quad \delta \,.\, \cos\gamma$$

die Projectionen einer auf der Drehachse AA_1 abgetragenen Länge δ auf die drei Coordinaten-Achsen, bzhw. auf drei gerade Linien, welche parallel zu denselben durch den Punkt $A(u,\ v,\ w)$ gezogen sind. Ferner sind beispielsweise d^2F_{xz} und d^2F_{xy} die Projectionen von d^2F auf zwei durch den Punkt A parallel zur XZ- und XY-Ebene gelegte Ebenen, und

$$\delta \,.\, \cos\alpha\,(z-w)\,d^2F_{xz} - \delta \,.\, \cos\alpha\,(y-v)\,d^2F_{xy}$$

ist die Differenz der Voluming, welche beschrieben werden, wenn sich dieselbe beiden Projectionen um einen Winkel $\delta \,.\, \cos\alpha$ drehen um einen durch den Punkt A parallel zur X-Achse gezogene gerade Linie als Drehachse. Die Doppel-Integrale beziehen sich auf die Integrationen der ganzen Fläche F, und man kann die einzelnen Summanden der Gleichung a) offenbar nach der einfachen Guldin'schen Regel (auf graphischem Wege) bestimmen.

In Gleichung b) sind

$$\delta \,.\, \sin\alpha, \quad \delta \,.\, \sin\beta, \quad \delta \,.\, \sin\gamma$$

die Projectionen einer auf der Drehachse AA_1 abgetragenen Länge δ auf die drei Coordinaten-Ebenen YZ: XZ und XY. Die Gleichungen der Projectionen der Drehachse auf die Coordinaten-Ebenen, bzhw. die Gleichungen der entsprechenden projicirenden Ebenen sind:

Digitized by Google

Die drei auf Seite 345—347 und auf Seite 350—351 abgeleiteten allgemeinen Sätze gelten natürlich auch in diesem besondern Falle und bedürfen keiner neuen Begründung. — Giebt man der Ebene F eine solche Lage, dass sie normal steht zu einer der beiden Coordinaten-Ebenen XZ und YZ, z. B. zu XZ, dann ist ihre Gleichung:

25) $$\cos\lambda \,.\, x\cos\mu \,.\, y + \cos\nu \,.\, z - p = 0$$

d. h. es ist

$$\cos\mu = 0, \quad \text{weil} \quad \mu = 90^0, \quad \text{also auch} \quad F_{xz} = 0$$

Unter diesen Umständen geht Gleichung 24) über in

$$\frac{x-u}{\cos\alpha} = \frac{y-v}{\cos\beta} = \frac{z-w}{\cos\gamma}$$

Hieraus folgt also beispielsweise für die Projection der Drehachse auf die YZ-Ebene und für die entsprechende projicirende Ebene die Gleichung

$$(y-v)\cos\gamma - (z-w)\cos\beta = 0$$

oder, indem man durch

$$\sqrt{\cos^2\beta + \cos^2\gamma} = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sin\alpha$$

teilt:

$$(y-v)\frac{\cos\gamma}{\sin\alpha} - (z-w)\frac{\cos\beta}{\sin\alpha} = 0$$

Als Gleichung der projicirenden Ebene aufgefasst, ist das die Normalform dieser Gleichung Sind nun x_1, y_1, z_1 die Coordinaten des Punktes P_1, an dem das Flächenelement d^2F liegt, so ist

$$\frac{(y_1-v)\cos\gamma - (z_1-w)\cos\beta}{\sin\alpha}$$

der Abstand des Punktes P_1 von jener Ebene, mithin auch der Abstand der Projection d^2F_{yz} von der Projection der Drehachse auf die YZ-Ebene. Hieraus ergiebt sich nun, dass in Gleichung b) der Ausdruck

$$\delta \,.\, \sin\alpha \left(\frac{(y-v)\cos\gamma - (z-w)\cos\beta}{\sin\alpha}\right) d^2F_{yz}$$

dasjenige Volumen ist, welches die Projection d^2F_{yz} des Flächenelements d^2F (mit den Coordinaten x, y, z) beschreibt, wenn es sich um einen Winkel $\delta \,.\, \sin\alpha$ dreht um die Projection der ursprünglichen Drehachse AA_1 auf die YZ-Ebene als neuer Drehachse. Die Doppel-Integrale beziehen sich auf die Projectionen der ganzen Fläche F, und man kann die einzelnen Summanden der Gleichung b) auch hier nach der einfachen Guldin'schen Regel bestimmen.

Die beiden Formeln a) und b) zeigen also wie die allgemeinste Form der Drehung einer beliebigen Fläche F um eine beliebige Achse bezüglich der Bestimmung des beschriebenen Volumens behandelt werden kann durch wiederholte Anwendung der einfachen Guldin'schen Regel für die Projectionen der Fläche F.

Digitized by Google

26) $$V = \delta \,.\, \cos\lambda \,.\, y_1 F = \delta \,.\, y_1 \,.\, F\cos\lambda$$

Hierin ist $y_1 \,.\, F$ das Moment ersten Grades der ebenen Fläche F in Bezug auf die Gerade, in der ihre Ebene diejenige Coordinaten-Ebene schneidet, zu der sie normal steht. Jede Verschiebung oder Drehung der Fläche F in ihrer Ebene, die an diesem Momente nichts ändert, d. h. also so, dass der Schwerpunkt sich auf einer ursprünglich zur XZ-Ebene parallelen Geraden bewegt, ist auf das Volumen V ohne Einfluss; natürlich darf diese Verschiebung des Schwerpunkts auf der vorgezeichneten Linie auch während der Drehung δ erfolgen.

Giebt man der Ebene F der rotirenden Fläche F eine solche Lage, dass sie parallel wird zur Drehachse Z, so ist ihre Gleichung

27) $$\cos\lambda \,.\, x + \cos\mu \,.\, y - p = 0$$

d. h. es ist $\cos\nu = 0$, weil $\nu = 90^0$ ist. Da aber ν in Gleichung 24) nicht vorkommt, so wird diese Gleichung dadurch nicht beeinflusst; man kann indessen diesem Falle in folgender Weise eine interessante Seite abgewinnen. Legt man auch hier, wie im vorigen Falle, die Ebene F normal zur XZ-Ebene, so wird ihre Gleichung

27) $$\cos\lambda \,.\, x - p = 0$$

d. h. es wird auch $\cos\mu = 0$, weil $\mu = 90^0$, und da ausserdem schon $\cos\nu = 0$, so muss $\cos\lambda = 1$ sein, so dass

28) $$x - p = 0$$

Aus Gleichung 24) wird nun:

29) $$V = \delta \,.\, y_1 \,.\, F = \delta \,.\, y_1 \,.\, F_{yz}$$

offenbar sind auch F und F_{yz} jetzt congruent. An dem Resultat fällt auf, dass die Grösse p ganz ohne Einfluss ist, also beliebig gross oder klein und auch null sein kann, und man sieht, dass man es mit einer Wiederholung des auf Seite 250 bereits abgeleiteten Satzes zu tun hat. Derselbe gestattet nun aber auf Grund der bisherigen Betrachtungen eine erhebliche Erweiterung. Nach Gleichung 26) ist nämlich das Volumen V als Product aus den Factoren δ, y_1, F und $\cos\lambda$. Jede Verschiebung oder Drehung, welche man mit der Fläche F im Raume vor ihrer Rotation vornimmt, ändert an dem Wert von V nichts, sofern die Grössen y_1, F und $\cos\lambda$ dadurch nicht geändert werden; auch eine Formänderung von F ist gestattet, wenn nur ihre Flächengrösse und die Lage ihres Schwerpunkts dadurch nicht verändert werden. Man hat also folgenden Satz:

Digitized by Google

„Eine beliebig geformte und belegene ebene Fläche F „drehe sich um eine feste Achse um einen endlichen „Winkel δ: legt man dann durch die Drehachse eine Ebene „E normal zu F und durch den Schwerpunkt der Fläche „eine Ebene E_1 parallel zu E, so kann man dem Schwer„punkt in dieser Ebene E_1 vor der Drehung um die feste „Achse eine beliebige Lage anweisen, auch die Fläche um „ihren Schwerpunkt drehen oder, unter Wahrung ihrer „Grösse, ihre Form ändern, ohne dass dadurch das bei der „Rotation um die feste Achse beschriebene Volumen be„einflusst wird, vorausgesetzt, dass die Ebene von F stets „zu der ursprünglich gegebenen Lage parallel bleibt. Auch „während der Drehung können, unter Aufrechthaltung der „Bedingungen, Verschiebungen der Fläche F in ihrer Ebene „erfolgen. — Eine fernere Erweiterung, unter entsprechen„der Abänderung dieser Bedingungen, ist noch nach der „Richtung hin möglich, dass die Fläche F während ihrer „Drehung um die feste Achse auch noch Drehungen er„leiden darf um Achsen, die der festen parallel sind und „durch den Schwerpunkt der Fläche gehen, da bei diesen „letzteren Drehungen algebraisch ein Volumen gleich null „beschrieben wird (Formel 26)".

Es bleibt mir nun noch übrig, einige Betrachtungen anzustellen über den Meridianschnitt der von der Randcurve L der Fläche E bei der Drehung der letzteren beschriebenen Ringfläche, die ich indessen bei der Hauptsache auf den Fall beschränken will, wo eine der Coordinaten-Achsen, etwa die Z-Achse, Drehachse ist.

Man kann sich den Meridianschnitt in zweierlei Weise entstanden denken:

1) Eine durch die Drehachse gelegte Ebene drehe sich um diese Achse, bis sie alle Punkte der ruhenden Fläche F getroffen hat; dann bilden die Spuren der einzelnen Punkte der Randcurve L den Meridianschnitt M der Ringfläche, denn alle ausserhalb dieser Curve liegenden Teile der Ebene, welche etwa getroffen werden, werden ebenso oft von positiven wie von negativen Flächenteilen getroffen und fallen daher aus, während alle innerhalb der Curve M liegenden Teile der Ebene ein Mal mehr von $\left\{\begin{matrix}\text{positiven}\\\text{negativen}\end{matrix}\right\}$ als von $\left\{\begin{matrix}\text{negativen}\\\text{positiven}\end{matrix}\right\}$ Teilen der Ebene F getroffen und dementsprechend in der Fläche von M mit dem Vorzeichen $\pm$ zur Geltung kommen.

Digitized by Google

2) Man lege durch die einzelnen Punkte der Fläche F Kreise, deren Ebenen zur Z-Achse normal stehen. Die der Randcurve L entsprechenden Kreise legen in ihren Schnittpunkten mit einer durch die Z-Achse gelegten Ebene in dieser den Meridianschnitt M der Ringfläche fest. Alle ausserhalb M die Ebene treffenden Kreise treffen die Fläche F eben so oft in positiven und negativen Teilen und fallen daher aus, sodass nur die innerhalb M liegenden Teile mit dem Vorzeichen plus oder minus für die Fläche von M übrig bleiben.

Bezeichnet nun in Fig. 15 die Linie OR die zur XY-Ebene senkrechte Ebene des Meridianschnitts, und sind x, y, z die Coordinaten eines beliebigen Punktes P der Fläche F (oder der Randcurve L), r und z die im System RZ genommenen Coordinaten des entsprechenden Punktes P_m des Meridianschnittes, so ist

30) $$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad z = z$$

Sind nun

31) $$x = \varphi(z), \quad y = \psi(z) \qquad \text{(L.}$$

wo φ und ψ Functionsbezeichnungen sind, die Gleichungen von L, so ist

32) $$r = \sqrt{(\varphi(z))^2 + (\psi(z))^2} \qquad \text{(M.}$$

die Gleichung des Meridianschnitts M im System RZ.

Für das Volumen V, berechnet aus dem Meridianschnitt, hat man einfach:

33) $$V = \delta \int\int r \,.\, dr \,.\, dz$$

Als Flächenelement von M steht hierin das elementare Rechteck $dr \,.\, dz$, dessen Seiten dr und dz man sich in beliebigem Verhältniss zu einander stehend denken kann; die Integrale, für deren Lösung die Gleichung 32) erforderlich ist, sind über die ganze Fläche M auszudehnen. Man kann statt dessen auch das Integral zerlegen in zwei andere und sich für deren Lösung der Gleichungen 31) bedienen. Das setzt dann voraus, dass dr der Gleichung 30) genüge, aus der man durch Differentiiren erhält:

34) $$dr = \frac{x}{r} \,.\, dx + \frac{y}{r} \,.\, dy$$

wodurch Gleichung 33) übergeht in

Digitized by Google

35) $$V = \delta \int\int y \,.\, dy \,.\, dz + \delta \int\int x \,.\, dx \,.\, dz$$

Diese Formel scheint in einem gewissen Widerspruch zu stehen mit den Formeln 23); dort tritt V als eine Differenz auf, hier ist es eine Summe. Ein wesentlicher Unterschied kann natürlich nicht vorhanden sein, und jener scheinbare Widerspruch ist auch leicht aufzuklären.

Legt man durch die ersten drei von den vier Punkten, welche folgende Coordinaten haben (vergl. Fig. 15):

P)	x,	y.	z
P')	$x+\Delta x$,	y,	$x+\Delta z_x$
P'')	x,	$y+\Delta y$,	$z+\Delta z_y$
P''')	$x+\Delta x$,	$y+\Delta y$,	$z+\Delta z_x+\Delta z_y$

eine Ebene, so liegt auch der vierte Punkt in dieser Ebene. Liegen die ersten drei Punkte ausserdem in der Fläche F, so wird das im allgemeinen für den 4ten Punkt nicht zutreffen; er rückt ihr aber, wenn man Δx in dx, Δy in dy übergehen lässt*), so nahe, dass er höchstens um eine unendlich kleine Strecke 2ter Ordnung von ihr entfernt ist, also für den vorliegenden Zweck ebenfalls als in die Fläche F fallend betrachtet werden darf. Dementsprechend bedient man sich denn auch des Inhalts des durch jene vier Punkte bestimmten, geradlinig begrenzten Vierecks als Flächenelement d^2F für $$\Delta x = dx \quad \text{und} \quad \Delta y = dy$$

Der Inhalt des Elements ist der Grenzwert des Ausdrucks:

36) $$\sqrt{(\Delta x \,.\, \Delta y)^2 + (\Delta y \,.\, \Delta z_x)^2 + (\Delta x \,.\, \Delta z_y)^2}$$

also:

$$d^2F = dx\, dy \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$$

und seine Projectionen auf die Coordinatenebenen sind (vergl. Seite 239, Gleichung 8):

---

*) Unter dieser Voraussetzung wird die durch P, P', und P'' gelegte Ebene zur Berührungsebene an die Fläche F für den Punkt P; ihre Gleichung ist bekanntlich:

$$\frac{\partial z}{\partial x}(\xi - x) + \frac{\partial z}{\partial y}(\eta - y) - (\zeta - z) = 0$$

In besonderen Fällen tritt diese Gleichung an die Stelle der Gleichung 2).

Digitized by Google

$$37) \quad \begin{cases} d^2F_{xy} = dx \,.\, dy \\ d^2F_{xz} = dx \,.\, dy \,.\, \dfrac{\partial z}{\partial y} \\ d^2F_{yz} = dx \,.\, dy \,.\, \dfrac{\partial z}{\partial x} \end{cases}$$

Legt man nun, entsprechend der unter 1) bezeichneten Entstehungsart des Meridianschnitts, durch die Z-Achse und den Punkt P eine Ebene, so projiciren sich die oben genannten vier Punkte auf diese Ebene mit folgenden Coordinaten

P_n)	r,	z
P_n')	$r + \Delta x \,.\, \cos\psi$,	$z + \Delta z_x$
P_n'')	$r + \Delta y \,.\, \sin\psi$,	$z + \Delta z_y$
P_n''')	$r + \Delta x \,.\, \cos\psi + \Delta y \,.\, \sin\psi$.	$z + \Delta z_x + \Delta z_y$

Der Inhalt des Vierecks mit diesen vier Eckpunkten ist:

$$\Delta^2 F_n = \Delta y \,.\, \Delta z_x \,.\, \sin\psi - \Delta x \,.\, \Delta z_y \,.\, \cos\psi$$
$$= \Delta y \,.\, \Delta z_x \,.\, \frac{y}{r} - \Delta x \,.\, \Delta z_x \,.\, \frac{xr}{r}$$

Macht man nun

$$\Delta x = dx \quad \text{und} \quad \Delta y = dy$$

so wird hieraus das dem Flächenelement d^2F der Fläche F entsprechende Element der Fläche des Meridianschnitts M:

$$33) \quad d^2F_m = \frac{y}{r} \,.\, dx \,.\, dy \,.\, \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{x}{r} \,.\, dx \,.\, dy \,.\, \frac{\partial z}{\partial y}$$
$$= \frac{y}{r} \,.\, d^2F_{yz} - \frac{x}{r} \,.\, d^2F_{xz} \quad \text{(vergl. Gleichung 37)}$$

Wird das mit $r\delta$ multiplicirt und dann integrirt, so erhält man wie früher:

$$39) \quad V = \delta \int\int r \,.\, d^2F_m = \delta \int\int y \,.\, d^2F_{yz}$$
$$- \delta \int\int x \,.\, d^2F_{xz} \,^*)$$

---

*) Anmerkung. Man hätte von vornherein auch der hier benutzten Ableitung der Gleichung 39) beginnen und aus ihr mit Benutzung des Satzes über die Zusammensetzung von Drehungen um sich schneidende Achsen (Seite 258—259) die allgemeine Gleichung 15) entwickeln können (vergl. Seite 351).

Der Unterschied gegen Gleichung 35) liegt also lediglich in der Wahl des Flächenelements der Fläche M, welches man an und für sich beliebig geformt denken kann, wenn man nur Sorge trägt, dass die Integrationen sich wirklich auf die ganze Fläche erstrecken.

Uebrigens wurde schon in dem Satze auf Seite 350—351 erwähnt, dass die Differenzen in Gleichung 23) in besondern Fällen sich in Summen verwandeln könnten; hierzu ein Beispiel:

Die positive Richtung der Normalen der Tangentialebene an die Fläche F bilde innerhalb einer gewissen Begrenzung der letzteren mit der positiven X-Achse einen stumpfen, mit den beiden andern Achsen einen spitzen Winkel, dann ist in der Tangential-Ebene für F, d. h. also in der Gleichung (vergl. die Anmerkung Seite 357)

40) $$\cos\lambda \,.\, x + \cos\mu \,.\, y + \cos\nu \,.\, z - p = 0 \qquad (\mathrm{d}^2\mathrm{F}.$$

für den fraglichen Teil von F:

41) $$\cos\lambda < 0, \quad \cos\mu > 0, \quad \cos\nu > 0$$

Aus Gleichung 40) folgt nun:

42) $$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{\cos\lambda}{\cos\nu} > 0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{\cos\mu}{\cos\nu} < 0 \end{cases}$$

also:

43) $$d^2F_m = -\frac{\cos\lambda}{\cos\nu} \cdot \frac{y}{r} \,.\, dx\,dy + \frac{\cos\mu}{\cos\nu} \cdot \frac{x}{r} \,.\, dx\,dy$$

Für den in Rede stehenden Teil von F ist also:

44) $$V = -\frac{\cos\lambda}{\cos\nu} \,.\, \delta \int\int y \,.\, dx\,dy + \frac{\cos\mu}{\cos\nu}\,\delta \int\int x \,.\, dx\,dy$$

und in dieser Gleichung sind rechts beide Summanden positiv. Beide würden negativ sein mit $\cos\lambda > 0$, $\cos\mu < 0$.

Anhang. Auf Seite 252 wurde bereits erwähnt, dass die Grösse des Volumens V unabhängig ist von der Form der Fläche F, welche die Randcurve L schliesst, dass man also F durch eine beliebige andere Fläche ersetzen kann, und dass die einfachste Ersatzfläche eine Regelfläche sei. Letztere kann man zu noch weiterer Vereinfachung stets so construirt denken, dass ihre geraden Seiten normal zur Drehachse sind, und das legt dann die Frage nahe nach der Gleichung dieser Fläche, deren Kenntniss unter Umständen er-

wünscht sein kann. Ich werde diese Gleichung deshalb hier noch ableiten.

Die fragliche Regelfläche wird dadurch erzeugt, dass eine zur Drehachse normale Gerade auf der Leitcurve L in der Weise gleitet, dass sie diese Curve beständig in zwei Punkten $P_1(x_1 y_1 z_1)$ und $P_2(x_2 y_2 z_2)$ schneidet. Die Gleichungen der entsprechenden Teile von L seien

1) $\quad x = \varphi_1(z), \qquad y = \psi_1(z) \qquad (L_1.$

2) $\quad x = \varphi_2(z), \qquad y = \psi_2(z) \qquad (L_2.$

Die gleitende Gerade kann man sich denken als die Durchschnittslinie zweier Ebenen, von denen die eine normal steht zur Drehachse, während man der andern eine beliebige Lage geben kann, vorbehältlich dessen, dass sie, wie auch die andere Ebene, durch die beiden Punkte P_1 und P_2 gehen muss; das einfachste wird sein, die zweite Ebene normal zu einer der Coordinaten-Ebenen, z. B. normal zur Ebene XY zu legen. Tut man letzteres, so sind die Bestimmungsgleichungen der gleitenden Geraden von folgender Form:

3) $\quad \cos\alpha \,.\, x + \cos\beta \,.\, y + \cos\gamma \,.\, z - q = 0$

4) $\quad m \,.\, x + n \,.\, y + 1 = 0$

In diesen Gleichungen sind q, m und n allgemeine Parameter, zwischen denen allgemeine Beziehungen vorhanden sind, welche man so findet:

Die Curvenstücke L_1 und L_2 gehen bzhw. durch P_1 und P_2, also muss stattfinden:

5) $\quad x_1 = \varphi_1(z_1(, \qquad y_1 = \psi_1(z_1)$

6) $\quad x_2 = \varphi_2(z_2), \qquad y_2 \times \psi_2(z_2)$

Die Ebenen 3) und 4) gehen beide durch beide Punkte P_1 und P_2, also muss sein:

7) $\quad \cos\alpha \,.\, x_1 + \cos\beta \,.\, y_1 + \cos\gamma \,.\, z_1 - q = 0$

8) $\quad \cos\alpha \,.\, x_2 + \cos\beta \,.\, y_2 + \cos\gamma \,.\, z_2 - q = 0$

9) $\quad m \,.\, x_1 + n \,.\, y_1 + 1 = 0$

10) $\quad m \,.\, x_2 + n \,.\, y_2 + 1 = 0$

Aus den 8 Gleichungen 5) bis 10) kann man die 6 Coordinaten x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2 entfernen; dann bleiben zwei Gleichungen, welche ausser α, β und γ nur die Parameter q, m und n enthalten und aus denen etwa folgt:

11) $$m = f_1(q)$$

12) $$n = f_2(q)$$

Aus diesen beiden Gleichungen und aus den Gleichungen 1) und 2) erhält man die Gleichung der Regelfläche durch Entfernung von q, m und n, nämlich:

13) $$x f_1(\cos\alpha \,.\, x + \cos\beta \,.\, y + \cos\gamma \,.\, z) + y f_2(\cos\alpha \,.\, x + \cos\beta \,.\, y + \cos\gamma \,.\, z) + 1 = 0$$

Hätte man die zweite Ebene (2) durch den Anfangspunkt O gelegt, so hätte man eine Gleichung von folgender Form erhalten (in der natürlich die Zeichen f_1 und f_2 nun andere Functionen bezeichnen):

14) $$x f_1(\cos\alpha \,.\, x + \cos\beta \,.\, y + \cos\gamma \,.\, z) + y f_2(\cos\alpha \,.\, x + \cos\beta \,.\, y + \cos\gamma \,.\, z) + z f_3(\cos\alpha \,.\, x + \cos\beta \,.\, y + \cos\gamma \,.\, z) = 0$$

Ist die Z-Achse Drehachse, so ist

$$\alpha = \beta = 90^0, \quad \gamma = 0$$

und dann erhält man einfacher:

13a) $$x f_1(z) + y \,.\, f_2(z) + 1 = 0$$

und

14a) $$x f_1(z) + y \,.\, f_2(z) + z \cdot f_3(z) = 0$$

Nicht immer werden die Gleichungen der Raumcurve L als unmittelbar gegeben betrachtet werden dürfen; das ist z. B. dann nicht der Fall, wenn gefragt wird nach dem Volumen innerhalb einer Ringfläche, welche eine gegebene Fläche F von aussen umhüllt. An die Stelle der Randcurve tritt dann die Berührunglinie zwischen der Fläche F und der Ringfläche; um ihre Gleichungen zu finden, ist die Ableitung der allgemeinen Gleichung der Ringfläche erforderlich für den Fall, dass die Randcurve gegeben ist. Die Gleichungen der letzteren seien dargestellt durch die beiden Gleichungen:

15) $$F_1(x, y, z) = 0, \quad F_2(x, y, z) = 0$$ (L.

was auch die frühere einfachere Annahme

$$x = \varphi_1(z), \quad y = \psi_1(z)$$

(Seite 356, Gleichung 31) in sich schliesst. Die Drehachse gehe allgemein durch den Punkt $A(u, v, w)$ und bilde mit den Coordinaten-Achsen die Winkel α, β, γ; dann sind ihre Gleichungen:

16) $$\frac{x-u}{\cos\alpha} = \frac{z-w}{\cos\gamma}, \quad \frac{y-v}{\cos\beta} = \frac{z-w}{\cos\gamma}$$

Jeder Punkt von L beschreibt bei der Drehung um die Achse einen Kreis, den man ansehen kann als den Durchschnitt einer zur Drehachse normalen Ebene mit einer Kugelfläche, deren Mittelpunkt auf der Drehachse im Punkte A liegt. Die Gleichungen dieser beiden Flächen sind von der Form

17) $$\cos\alpha \cdot x + \cos\beta \cdot y + \cos\gamma(z) - q = 0$$

18) $$(x-u)^2 + (y-v)^2 + (z-w)^2 = \varrho^2$$

die Grössen q und ϱ^2 sind Parameter. Sind $x_1 y_1 z_1$ die Coordinaten eines Punktes P_1 von L, so müssen die 4 Gleichungen 15), 17) und 18) richtig bleiben, wenn man in denselben

$$x = x_1, \quad y = y_1, \quad z = z_1$$

setzt. Geschieht das, so erhält man 4 Gleichungen, in denen ausser x_1, y_1, z_1, q und ϱ^2 nur die constanten Grössen u, v, w und α, β, γ vorkommen. Entfernt man aus denselben x_1, y_1 und z_1, so bleibt eine Beziehung übrig zwischen q und ϱ^2 (und jenen Constanten), etwa:

19) $$q = f(\varrho^2)$$

Diese Gleichung schreibt die Bedingung vor, welche die Gleichungen 17) und 18) erfüllen müssen, wenn ihr Schnittkreis die Randcurve L treffen, also auch in der fraglichen Ringfläche liegen soll. Entfernt man demnach aus den Gleichungen 17), 18) und 19) die Grössen q und ϱ^2, so erhält man als Gleichung der Ringfläche:

20) $$\cos\alpha \cdot x + \cos\beta \quad y + \cos\gamma \cdot z = f((x-u)^2 + (y-v)^2 + (z-w)^2)$$

Ist die Z-Achse Drehachse, also

$$\alpha = \beta = 90^0, \quad \gamma = 0 \quad \text{und} \quad u = v = w = 0$$

so erhält man einfacher:

21) $$z = f(x^2 + y^2 + z^2)$$

Für diesen Fall kann man aber eine noch einfachere Form finden, indem man an die Stelle der Gleichungen 17) und 18) die folgenden setzt:

17a) $$z = q = 0$$

18a) $$x^2 + y^2 = \varrho^2$$

durch welche der von irgend einem Punkt von L beschriebene Kreis in diesem Fall ebenfalls festgelegt wird; 17a) stellt eine zur XY-Ebene parallele Ebene, 17b) einen zu ihr normalen Kreiscylinder dar. Aus den 4 Gleichungen 15), 17a) und 18a) folge jetzt in der oben durchgeführten Weise, indem man überall

$$x = x_1, \quad y = y_1 \quad \text{und} \quad z = z_1$$

setzt und dann diese Grössen ausscheidet:

19a) $$q = f_1(\varrho^2)$$

Diese Gleichung liefert dann mit den beiden vorigen durch Ausscheidung von q und ϱ^2 die einfachere Form:

21a) $$z = f_1(x^2+y^2)$$

Die Gleichungen 20), 21) und 21a) stellen natürlich auch die allgemeine Gleichung einer Umdrehungsfläche, nicht nur diejenige einer Ringfläche dar, d. h. es ist nicht erforderlich, dass die Curve L (Gleichung 15)) geschlossen sei, wenn es sich nicht um die Randcurve L einer Fläche F handelt.

Aus der Gleichung 20) kann man mit Hülfe von Differential-Operationen die allgemein nicht näher zu bezeichnende Function f ausscheiden und dadurch zu einer charakteristischen Gleichung für alle Umdrehungsflächen gelangen. Differentiirt man nämlich die Gleichung 20) teilweise, erst nach x und z, dann nach y und z, so erhält man:

$$\cos\alpha + \cos\gamma \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = \left(2(x-u) + 2(z-w)\frac{\partial z}{\partial x}\right) f^1((x-u)^2+(y-v)^2 + (z-w)^2)$$

$$\cos\beta + \cos\gamma \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \left(2(y-v) + 2(z-w)\frac{\partial z}{\partial y}\right) f^1((x-u)^2+(y-v)^2 + (z-w)^2)$$

Teilt man diese beiden Gleichungen durch einander, so erhält man nach einer einfachen Umformung:

22) $$((y-v)\cos\gamma-(z-w)\cos\beta)-\frac{\partial z}{\partial x}+((z-w)\cos\alpha-(x-u)\cos\gamma)\frac{\partial z}{\partial x} -(x-u)\cos\beta-(y-v)\cos\alpha) = 0$$

Dieser Gleichung, in der x, y, z die Coordinaten eines beliebigen Punkts der Fläche sind, muss jede Umdrehungsfläche genügen, deren Achse durch den Punkt $A(u, v, w)$ geht und mit den Coordinaten-Achsen die Winkel α, β, γ bildet.

Nun soll weiter

23 $$F(x, y, z) = 0$$ (F.

die Gleichung einer Fläche F sein, welche von der zu bestimmenden Ringfläche umhüllt wird. Für alle Punkte der Curve L auf der Fläche F, in denen diese umhüllende Fläche die Fläche F trifft, d. h. für den Fall einer stetig gekrümmten Fläche F dieselbe berührt, müssen F und die Ringfläche dieselbe Berührungsebene haben. Sind x_1, y_1, z_1 die Coordinaten eines Punktes von L, so muss natürlich die Berührungsebene für beide Flächen durch diesen Punkt gehen, und ausserdem müssen — das folgt aus der Form der Gleichung der Berührungsebene (vergl. Seite 357, Anmerkung) — für

$$x = x_1, \quad y = y_1, \quad z = z_1$$

für beide die Differential-Quotienten $\frac{\partial z}{\partial x}$ und $\frac{\partial z}{\partial y}$ denselben Wert haben, d. h. die letzteren müssen für beide Flächen der Gleichung 22) genügen. Nun folgt aber aus Gleichung 23):

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{dx}}{\frac{\partial F}{\partial z}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

und wenn man das in Gleichung 22) einsetzt, so erhält man

24) $$((y-v)\cos\gamma - (z-w)\cos\beta)\frac{\partial F}{\partial x} + ((z-w)\cos\alpha - (x-u)\cos\gamma)\frac{\partial F}{\partial y} + ((x-u)\cos\beta - (y-v)\cos\alpha)\frac{\partial F}{\partial z} = 0$$

Diese Gleichung legt zusammen mit der Gleichung 23) die Berührungslinie L mit der Ringfläche fest.

Ist die Z-Achse Drehachse, also

$$\alpha = \beta = 90^0, \quad \gamma = 0 \quad \text{und} \quad u = v = w = 0$$

so wird aus der für alle Umdrehungsflächen geltenden Gleichung 22) einfach:

22a) $$y \cdot \frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{dy} = 0$$

und die Gleichung 24) geht über in

24a) $$y\frac{\partial F}{\partial x} - x\frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

Mithin wird die Berührungslinie L der Ringfläche mit der Fläche F (Gleichung 23)), für die Z-Achse als Drehachse, festgelegt durch diese Gleichung 23) und durch die oben gefundene Gleichung 24a).

§ 7. Cylindrische Schraubenbewegung einer begrenzten Fläche.

Es würde keine Schwierigkeit haben, aus den Formeln der §§ 5. und 6. für das durch eine Parallelverschiebung oder Drehung einer Fläche F beschriebene Volumen unmittelbar alle diejenigen Sätze abzuleiten, welche im § 4. auf Seite 255—257 über die Zusammensetzung und Zerlegung beliebiger Verschiebungen und Drehungen bereits entwickelt sind, sowie auch den Nachweis zu führen dass sich eine beliebige endliche Bewegung von F zurückführen lässt auf eine Folge von unendlich vielen, einzeln unendlich kleinen cylindrischen Schraubenbewegungen, für welche selbstverständlich die bestimmenden Elemente den Bedingungen der jeweilig vorliegenden Aufgabe zu ermitteln sind. Indessen bedarf es hier dieser Wiederholung nicht, um so weniger, als dieselbe nur die früheren Resultate auf einem minder einfachen Wege liefern würde, und es wird genügen, nur die Ergebnisse der beiden letzten Paragraphen für eine einfache cylindrische Schraubenbewegung zusammenzustellen. Für eine solche unendlich kleine Bewegung mögen die beiden bislang mit δ und σ bezeichneten Grössen, welche das Maass für die beiden Elementarbewegungen sind, die Gleichförmigkeit mit der übrigen Bezeichnung wegen durch $d\delta$ und $d\sigma$ ersetzt werden. Es bewegt sich also die Fläche F ohne Drehung nach der Richtung einer gegebenen Achse um eine Länge $d\varrho$ während derselben Zeit, während der sie sich um diese Achse dreht um einen Winkel $d\delta$. Ein Punkt der Fläche F, dessen Abstand von der Drehachse gleich r ist, beschreibt bei dieser Bewegung das Element ds einer Schraubenlinie, für welches die Gleichung gilt:

1) $$ds^2 = d\sigma^2 + (r \,.\, d\delta)^2$$

Ist η der Steigungswinkel dieser Schraubenlinie, also $90^0 - \eta$ ihr Winkel mit der Drehachse, und h ihre Grenzhöhe, so ist η bestimmt durch die Gleichung:

2) $$\operatorname{tg}\eta = \frac{d\sigma}{r \,.\, d\delta} = \frac{h}{2r \,.\, \pi}$$

Auf Seite 256 und 257 wurde erläutert, dass man die beiden gleichzeitigen Elementarbewegungen auch als in beliebiger Folge

Digitized by Google

nach einander stattfindend in die Rechnung einführen kann; daraus ergiebt sich dann, wenn die Drehachse AA_1 wieder durch einen beliebigen Pnnkt $A(u, v, w)$ geht und mit den Coordinaten-Achsen die Winkel α, β, γ bildet, für das von d^2F beschriebene Volumen (vergl. § 4, Gl. 10) und 12) und § 6., Gleichung 13), auch Gleichung 16a)):

$$3)\quad d^3V = \begin{cases} (\cos\alpha \,.\, \cos\lambda + \cos\beta \,.\, \cos\mu + \cos\gamma \,.\, \cos\nu) d^2F \,.\, d\sigma \\ +(((y-v)\cos\gamma - (z-w)\cos\beta\ \cos\lambda \\ +((z-w)\cos\alpha - (x-u)\cos\gamma)\cos\mu \\ +((x-u)\cos\beta - (y-v)\cos\alpha)\cos\nu) d^2F d\delta \end{cases}$$

oder, indem man die Projectionen von d^2F auf die Coordinatenebenen einführt:

$$4)\quad d^3V = \begin{cases} (\cos\alpha \,.\, d^2F_{yz} + \cos\beta \,.\, d^2F_{xz} + \cos\gamma \,.\, d^2F_{xy})\, d\sigma \\ +(((y-v)\cos\gamma - (z-w)\cos\beta)\, d^2F_{yz} \\ +((z-w)\cos\alpha - (x-u)\cos\gamma)\, d^2F_{yz} \\ +((x-u)\cos\beta - (y-v)\cos\alpha)\, d^2F_{xy})\, d^2F \end{cases}$$

In diesen Formeln sind x, y, z die Coordinaten des Flächenelements d^2F; ist F eben, so kann man wie früher statt d^2F gleich die ganze Fläche F einführen und dementsprechend dV an die Stelle von d^3V treten lassen, wenn man unter x, y, z die Coordinaten des Schwerpunkts von F versteht (Seite 242—244).

Von der Fläche F interessirt in letzter Linie nur ihre Randcurve L, deren Gleichungen auf Seite 356, Gleichung 31), durch

$$x = \varphi(z), \quad y = \psi(z)$$

auf Seite 362, Gleichung 15), durch

$$F_1(x, y, z) = 0, \quad F_2(x, y, z) = 0$$

angedeutet wurden. Diese Gleichungen müssen unter allen Umständen die Grenzen der auf d^2F bezüglichen Schlussintegrale liefern, wenn es sich um eine endliche Gesamtbewegung von F handelt, und $\iiint d^3V$, d. i. das Volumen bestimmt werden soll, welches F von einer gegebenen Anfangslage aus bis zu einer bestimmten Endlage hin beschreibt. Dabei kann man, soweit es erforderlich erscheint und die Vorstellung erleichtert, die Winkel λ, μ und ν auf die in dem Anhange zu § 6. auf Seite 359 bis 361 behandelte Regelfläche oder auf irgend eine Fläche, die man als Schlussfläche der Randcurve L an die Stelle von F setzen will, beziehen.

Die oben angedeuteten Gleichungen der Raumcurve L können während der ganzen Dauer der Bewegung constant sein oder auch sich gesetzmässig ändern, und es wird also im allgemeinen die Aufgabe sein, diese etwaigen Aenderungen sowol wie auch die ganze Bewegung von L in der Volumenformel zum Ausdruck zu bringen. Fasst man diese Aufgabe im weitesten Sinne auf, so müssen für ihre Lösung die Gesetze der rein geometrischen Bewegungslehre, auf die ich schon früher hingewiesen habe, in ihrem vollen Umfange, sowie auch die Theorie der Krümmung von Raumcurven und krummen Flächen zur Anwendung kommen. Es kann hier nicht der Ort sein, die umfassende Ableitung dieser Gesetze zu wiederholen, da es mir wesentlich nur ankam auf die Ableitung der in den §§ 3.—6. gefundenen Resultate, deren Anwendung weiter unten noch an einigen Beispielen gezeigt werden soll. Ich will deshalb nur die folgenden allgemeinen Bemerkungen machen, in Anlehnung an das Seite 230 bis 231 mit Bezugnahme auf die einfache Guldin'sche Regel Gesagte:

Die Bewegung eines Raumgebildes wird bestimmt durch die Bewegung von drei mit demselben fest verbundenen Punkten, welche nicht in einer geraden Linie liegen. Diese drei Punkte legen eine Ebene K fest, welche man sich mit der Curve L fest verbunden denkt. Die Ebene K ist an sich beliebig; sie möge so gewählt sein, dass sie in jedem Augenblick der fraglichen Bewegung zusammenfalle mit der Krümmungsebene derjenigen Curve C, welche als die die Bewegung von F charakterisirende zu betrachten ist und dementsprechend von einem Punkte J der Ebene K beschrieben wird. Man denke sich durch J ein zweites Coordinatensystem gelegt, von dem zwei Achsen in die Ebene K fallen, während die dritte Achse zu K normal stehe; auf dieses System zunächst kann man die Randcurve L, bzhw. die etwaigen Aenderungen von L während der Bewegung beziehen und dasselbe demnach als Vermittlung benutzen für die Bestimmung dieser Aenderungen in dem System der Hauptcoordinaten, so dass man d^2F und seine Projectionen auf die Ebenen dieser Coordinaten in jedem Augenblick zum Ausdruck bringen kann.

Dann kommt es weiter wesentlich darauf an, die Bewegung der Ebene K, und des Punktes J derselben auf die Curve C in die Volumenformel einzuführen. Diese Bewegung kann für die einzelnen Elemente der Bahn von J, d. i. der Curve C, als eine cylindrische Schraubenbewegung behandelt werden, wenn man jene Elemente von Punkt zu Punkt durch die entsprechende Krümmungsschraube ersetzt denkt. Zur Berechnung der von F, bzhw. d^2F bei diesen Elementarbewegungen beschriebenen Volumina ist es also erforder-

lich, die Elemente der Krümmungsschraube zu bestimmen. Solcher Elemente giebt es, wenn man mit rechtwinkligen Coordinaten arbeitet, in dem allgemeinsten Falle nicht weniger als elf; es sind die folgenden:

u, v, w, die Coordinaten eines festen Punkts der Drehachse;

α, β, γ, die Winkel dieser Achse mit den drei Coordinatenachsen ($\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$);

r, der Radius des Cylinders der Krümmungsschraube;

x, y, z, die Coordinaten des betreffenden Punkts der Curve C, der in der Fläche des Cylinders liegen muss;

$d\sigma/r \,.\, d\delta$, die Steigung der Schraubenlinie.

Zur Bestimmung dieser elf Grössen mit der Nebenbedingung bei x, y, z sind zwölf Gleichungen erforderlich, welche sich auch in der Tat ergeben, wenn man Folgendes beachtet:

Jedes beliebige Element einer beliebigen Raumcurve ist, nachdem die in der Rechnung als unabhängig Veränderliche zu betrachtende Grösse, welche hier t heissen möge, festgestellt ist, mit der Differentialgrösse dt vollständig bestimmt durch die Coordinaten x, y, z des Anfangspunkts des Elements, ferner durch die Richtung dieses Elements, durch seine Krümmung und durch seine Torsion oder Windung. Bezeichnet man die Abgeleiteten der einzelnen Grössen x, y, z und s, wo s der Bogen der Curve C ist, genommen nach der bereits erwähnten unabhängig Veränderlichen t, in üblicher Weise mit x', y', z', s' — x'', y'', z'', s'', x''', y''', z''', s''', so wird zunächst die Richtung des Elements bestimmt durch die Grössen x', y', z'. Ist ferner ϱ der Krümmungshalbmesser und $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ die Coordinaten des Krümmungsmittelpunkts, so ist

$$5) \qquad \varrho = \frac{s'^3}{\sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2 - s''^2}}$$

— (entspr. der Bedingung: $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$)

$$6) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \text{worin, da} \quad ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \\ \text{oder} \\ \qquad\qquad s'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 \end{array} \right.$$

$$6a) \qquad s'' = \frac{x'x'' + y'y'' + z'z''}{s'}$$

ferner ist

7) $$\frac{\mathfrak{x}-x}{\left(\frac{x'}{s'}\right)^{i}}=\frac{\mathfrak{y}-y}{\left(\frac{y'}{s'}\right)^{i}}=\frac{\mathfrak{z}-z}{\left(\frac{z'}{s'}\right)}=\frac{\varrho^{2}}{s'}$$

Ist endlich $d\tau$ der Torsionswinkel, so ist:

8) $$\frac{d\tau}{ds}=\frac{\tau'}{s'}=\frac{Ax'''+By'''+Cz'''}{A^{2}+B^{2}+C^{2}}$$

wenn A, B und C zur Abkürzung gesetzt sind für

8a) $$\left\{\begin{array}{l} A=y'z''-z'y'' \\ B=zx''''-x'z'' \\ C=x'y''-y'x'' \end{array}\right\}$$

Hieraus ist ersichtlich, dass zur vollständigen Bestimmung des Curvenelements ds nach Ort, Richtung, Krümmung und Torsion ausser den Coordinaten x, y, z die neun Abgeleiteten x', y', z' — x'', y'', z'' — x''', y''', z''' erforderlich sind, so dass man in der Tat zwölf Bestimmungsgleichungen aus den Gleichungen der Curve C erhält, wenn man die aus diesen Gleichungen entnommenen Werte der genannten zwölf Grössen den entsprechenden Grössen der Schraubenlinie gleich setzt. Dabei ist zunächst zu beachten, dass für beide Curve die Coordinaten x, y, z für das betreffende Element beziehungsweise gleich sind. Ferner ist für die Schraubenlinie:

9) $$\left\{\begin{array}{l} dx=\cos\alpha\,.\,\partial\sigma+((y-v)\cos\gamma-(z-w)\cos\beta)\,d\delta \\ dy=\cos\beta\,.\,d\sigma+((z-w)\cos\alpha-(x-u)\cos\gamma)\,d\delta \\ dv=\cos\gamma\,.\,d\sigma+((x-u)\cos\beta-(y-v)\cos\alpha)\,d\delta \end{array}\right\}$$

Dividirt man diese Gleichungen auf beiden Seiten durch dt, so erhält man x', y', z' für die Schraube, und weiter durch zweimaliges Differentiiren unter Beachtung der Gleichung 1) die Grössen x'', y'', z'', x''', y''', z''' für die Schraube. Beachtet man nun noch, dass nach Gleichung 7a) auf Seite 344 sich folgende Gleichung der Cylinderfläche ergiebt, indem man in jener Gleichung nur $x-u$, $y-v$, $z-w$ statt x, y, z setzt:

10) $$\left\{\begin{array}{l} r^{2}=((y-v)\cos\gamma-(z-w)\cos\beta)^{2} \\ \quad+((z-w)\cos\beta=(y-v)\cos\gamma)^{2} \\ \quad+(x-u)\cos\beta-(y-v)\cos\alpha)^{2} \\ \quad=(x-u)^{2}+(y-v)^{2}+(z-w)^{2}-((x-u)\cos\alpha \\ \quad+(y-v)\cos\beta+(z-w)\cos\gamma)^{2} \end{array}\right\}$$

so erkennt man, dass in der alle elf auf Seite 368 genannten Unbekannten und die Nebenbedingung bei x, y, z für cylindrische Schraubenlinie bestimmt werden können.

Ich will auf den weiteren Verfolg der vorstehenden allgemeinen Betrachtung verzichten und nur noch Folgendes für besondere Fälle hinzufügen:

In manchen einfacheren Fällen wird es möglich sein, die Lage der Cylinderachse für die Krümmungsschraube, d. i. die augenblickliche Drehachse ohne Weiteres oder durch einfache Nebenbetrachtungen zu bestimmen; beispielsweise ist das immer der Fall, wenn eine der Gleichungen der im Vorstehenden mit C bezeichneten Curve, also allgemein derjenigen Curve, welche die Bewegung eines Punktes, der mit F oder L fest verbunden ist, charakterisirt, die Gleichung einer Cylinderfläche ist, da dann die augenblickliche Drehachse den Seiten dieses Cylinders parallel ist. In solchen Fällen sind dann ausser x, y, z auch u, v, w und α, β, γ und nach Gleichung 10) auch r bekannt, und es bleiben dann nur noch $r \,.\, d\delta$ und $d\sigma$ zu bestimmen. Nun müssen für beide Curven ϱ und $d\tau$ für gleiche $d\sigma$ gleiche Werte haben. Für die Schraubenlinie ist

11) $$\varrho = \frac{r}{\cos^2\eta}$$

12) $$\frac{d\sigma}{d\tau} = \frac{r}{\sin\eta \,.\, \cos\eta}$$

Sind nun ϱ und $\frac{ds}{d\tau}$ für die Curve C bestimmt und demnach als bekannt anzusehen, so ergeben diese beiden Gleichungen für die Schraubenlinie:

13) $$\operatorname{tg}\eta = \frac{d\sigma}{r \,.\, d\delta} = \varrho \,.\, \frac{d\tau}{ds}$$

14) $$r = \varrho \,.\, \sin^2\eta$$

Mit diesen beiden Werten ist dann also auch die Steigung der Schraubenlinie und der Radius des Cylinders derselben bekannt; letzteren Wert kann man dann mit Hülfe von Gleichung 10) auf seine Richtigkeit prüfen.

Ist in den Gleichungen 3) und 4) die Drehachse der Z-Achse parallel, also

$$\alpha = \beta = 90^0, \quad \gamma = 0$$

so vereinfachen sich dieselben in

15) $$d^3V = (\cos\nu \,.\, d\sigma + ((y - v)\cos\lambda - (x - u)\cos\mu)\, d\delta)\, d^2F$$

oder

16) $$d^3V = d^2F_{xy} \,.\, d\sigma + ((y - v)\, d^2F_{yz} - (x - u)\, d^2F_{xz})\, d\delta$$

Hierin ist $u = v = 0$, wenn die Achse des Cylinders mit der Z-Achse zusammenfällt.

Ist die Fläche F eben und sind x und y die beiden ersten Coordinaten ihres Schwerpunktes, so ist für die Z-Achse als Drehachse

$$17)\quad dV = F_{xy} \cdot d\sigma + (y \cdot F_{yz} - x \cdot F_{xz})\, d\delta$$
$$= \left(\sqrt{x^2+y^2}\, F_{xy} \cdot \frac{d\sigma}{\sqrt{x^2+y^2}\, d\delta} + y \cdot F_{yz} - x \cdot F_{xz}\right) d\delta$$

Ist nun

$$\frac{d\sigma}{\sqrt{x^2+y^2}\, d\delta} = \operatorname{tg} \eta$$

constant von $\delta = \delta_0$ bis $\delta = \delta$, und bleibt für die Drehung um $\delta - \delta_0$ die Z-Achse Drehachse, so ist

$$18)\quad V_{\delta=\delta_0}^{\delta=\delta} = (\operatorname{tg} \eta \cdot \sqrt{x^2+y^2}\, F_{xy} + y F_{yz} - x \cdot F_{xz})\,(\delta - \delta_0)$$

Das ist also das von der ebenen Fläche F bei einer einfachen cylindrischen Schraubenbewegung beschriebene Volumen für einen Drehwinkel $\delta - \delta_0$, wenn η der Steigungswinkel der von dem Schwerpunkt von F (mit den Coordinaten x, y, z) durchlaufenen Schraubenlinie ist.

Will man für den Fall einer cylindrischen Schraubenbewegung mit der Z-Ache als Achse der Schraube den Meridianschnitt des von der Fläche F beschriebenen Volumens für eine Ebene OR (Fig. 15.) berechnen, so kann das in folgender Weise geschehen. Es sei

$$\operatorname{tg} \eta = \frac{d\sigma}{d\delta}, \quad \text{also} \quad \sigma = \operatorname{tg} \eta \cdot \delta$$

dann ist η der Steigungswinkel der Schraubenlinien, welche von allen Punkten beschrieben werden, deren Abstand von der Drehachse gleich der Längeneinheit ist. Es sei $P(x\,y\,z)$ ein beliebiger Punkt der Randcurve F. Während dieser Punkt den Winkel δ durchläuft, steigt er in der Richtung der Z-Achse um eine Länge σ, und sine Coordinaten im System RZ sind demnach:

$$r = \sqrt{x^2+y^2}$$
$$\zeta = z + \sigma = z + \operatorname{tg} \eta \cdot \delta$$

Nun entnimmt man aus der Figur

$$\delta = w - \psi = w - \operatorname{arc}\left(\operatorname{tg} = \frac{y}{x}\right)$$

statt

$$\operatorname{arc}\left(\operatorname{tg} = \frac{y}{x}\right)$$

kann man auch setzen:

$$\operatorname{arc}\left(\sin = \frac{y}{r}\right) \quad \text{oder} \quad \operatorname{arc}\left(\cos = \frac{x}{r}\right)$$

Dadurch erhält man für ζ den Ausdruck:

$$\zeta = z + \operatorname{tg}\eta \,.\, w - \operatorname{tg}\eta \,.\, \operatorname{arc}\left(\operatorname{tg} = \frac{y}{x}\right)$$

Mit Benutzung der beiden Gleichungen der Curve und der oben für r angegebenen Gleichung kann man hierin x, y und z als Functionen von r ausdrücken und erhält dann eine Gleichung, in der nur die Veränderlichen r und ζ vorkommen.

Setzt man in der Gleichung für ζ den Winkel $w = 0$, so erhält man den Meridianschnitt in der XZ-Ebene

$$\zeta = z - \operatorname{arc}\left(\operatorname{tg} = \frac{y}{x}\right)$$

Ist $\frac{y}{x} = n$ constant, so ist L eine ebene Curve, deren Ebene durch die Drehachse geht. Für diesen Fall ist

$$\zeta = z + \operatorname{tg}\eta \,.\, w - \operatorname{tg}\eta \,.\, \operatorname{arc}\,(\operatorname{tg} = n)$$

d. h. der Meridianschnitt ist der Curve L congruent und nur nach der Richtung der Drehachse gegen dieselbe verschoben.

Setzt man $z = 0$, so ist L eine ebene Curve in der XY-Ebene $z = c$ deutet L als ebene Curve in einer zur XY-Ebene parallelen Ebene an. Die Gleichung des Meridianschnitts ist dann:

$$\zeta = c + \operatorname{tg}\eta \,.\, w - \operatorname{tg}\eta \,.\, \operatorname{arc}\left(\operatorname{tg} = \frac{y}{x}\right)$$

Die Coordinaten x und y kann man auch in diesem Falle mit Benutzung der Gleichungen für L und für den Fahrstrahl r als Functionen von r ausdrücken.

§ 8. Parallelverschiebung einer begrenzten Curve.

Die bewegte Curve sei L und die von ihr beschriebene Fläche F; es ist also d^2F ein Flächenelement, welches unendlich klein zweiter Ordnung, und dF ein solches, welches unendlich klein erster

Ordnung ist. Das Element der Curve L werde bezeichnet durch ds; die Coordinaten dieses als eine gerade Linie zu betrachtenden Elements, bzhw. die Coordinaten seines Anfangspunktes P_1 seien x_1, y_1, z_1, ist ein Teil der Linie L von endlicher Länge gerade, so kann man gleich diese ganze Länge in die Rechnung einführen, wenn man unter $P_1(x_1\ y_1\ z_1)$ den Schwerpunkt derselben versteht. — Die Curve verschiebe sich nach der Richtung einer Geraden AA_1, welche mit den Achsen die Winkel α, β, γ bildet. Das Maass der Verschiebung soll mit σ bezeichnet werden, dasselbe kann unendlich klein oder auch von endlicher Grösse sein. Es seien ferner λ, μ und ν die Winkel, welche das Curvenelement ds mit den Coordinatenachsen bildet, und φ sei der Winkel dieses Elements mit der Richtung der Verschiebung BA_1. Bei dieser Bezeichnung ist (vergl. Seite 244 u. ff.) die von ds beschriebene Fläche bestimmt durch die Gleichungen:

$$1)\qquad \begin{cases} d^2F = \sigma \cdot \sin\varphi \cdot ds, \text{ wenn } \sigma \text{ unendlich klein ist;} \\ dF = \sigma \cdot \sin\varphi \cdot ds, \text{ wänn } \sigma \text{ von von endlicher Länge ist} \end{cases}$$

Es kommt also nur darauf an, $\sin\varphi$ zu bestimmen. Hierfür hat man:

$$2)\qquad \cos\varphi = \cos\alpha \cdot \cos\lambda + \cos\beta \cdot \cos\mu + \cos\gamma \cdot \cos\nu$$

für welche Gleichung die Winkel λ, μ und ν aus den Gleichungen der Curve L, für den Punkt P_1 zu entnehmen sind. Das Element ds ist gleichzeitig als ein Element dieser Curve und der Tangente derselben für den Punkt P_1 zu betrachten. Die Gleichungen der Tangente sind:

$$3)\qquad \begin{cases} x - x_1 = \dfrac{dx}{dz}(z - z_1) \\ y - y_1 = \dfrac{dy}{dz}(z - z_1) \text{ *)} \end{cases}$$

---

*) Sind die Gleichungen der Curve L:

$$x = \varphi(z),\quad y = \psi(z)$$

so ist (für $x = x_1$, $y = y_1$, $z = z_1$) für den Punkt B_9:

$$\frac{dx}{dz} = \varphi'(z);\qquad \frac{dy}{dz} = \psi'(z)$$

Sind die Gleichungen von L dagegen:

$$f(x, y, z) = 0;\quad F(x, y, z) =$$

so ist

Für die Tangentengleichungen hat man ausserdem die Form:

$$4) \qquad \frac{x-x_1}{\cos\lambda} = \frac{y-y_1}{\cos\mu} = \frac{z-z_1}{\cos\nu}$$

woraus durch Vergleich mit Gleichung 3) folgt:

$$5) \qquad \frac{\cos\lambda}{\cos\nu} = \frac{dx}{dz}, \quad \frac{\cos\mu}{\cos\nu} = \frac{dy}{dz}$$

Hieraus und aus der bekannten Beziehung:

$$\cos^2\lambda + \cos^2\mu + \cos^2\nu = 1$$

folgt dann weiter:

$$6) \qquad \begin{cases} \cos\lambda = \dfrac{dx}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}} = \dfrac{dx}{ds} \\ \cos\mu = \dfrac{dy}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}} = \dfrac{dy}{ds} \\ \cos\nu = \dfrac{dz}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}} = \dfrac{dz}{ds} \end{cases}$$

Aus den Gleichungen 1) 2) und 6) erhält man nun für das beschriebene Flächenelement

$$7) \qquad d^2F = \sqrt{1-\left(\cos\alpha \cdot \frac{du}{ds} + \cos\beta \cdot \frac{dy}{ds} + \cos\gamma \cdot \frac{dz}{ds}\right)^2} \cdot \sigma \cdot d\sigma$$

Ist σ eine endliche Länge, so tritt dF an die Stelle von d^2F.

$$\frac{\partial f}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \partial z = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot dz = 0$$

und hieraus folgt (wieder für $x = x_1$, $y = y_1$, $z = z_1$) für den Punkt P_1:

$$\frac{dx}{dz} = \frac{\frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial F}{\partial x}}; \qquad \frac{dy}{dz} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial F}{\partial x}}$$

Unter Umständen kann es möglich sein, aus diesen beiden Gleichungen mit Hülfe der Curvengleichungen allgemein zwei der Grössen x, y, z auszuscheiden.

§ 9. Drehung einer begrenzten Curve um eine feste Achse.

Die im vorigen Paragraphen mit L bezeichnete Curve soll sich jetzt um die dort als Richtung der Verschiebung bezeichnete Gerade AA_1, welche wieder mit den Coordinatenachsen die Winkel α, β, γ bildet, drehen, und zwar um einen Winkel δ, der unendlich klein oder von endlicher Grösse ist. Alles übrige soll hier ebenso wie dort angenommen werden, mit der einen Ausnahme, dass hier nur von einem unendlich kleinen Curvenelement ds die Rede ist. Unter Zugrundelegung der allgemeinen Ableitungen in § 6, welche hier Verwendung finden können, erhält man dann in folgender Weise den Formelausdruck für das Flächenelement d^2F, bzhw. für dF für endliche Werte von δ.

Das Bogenelement, welches für einen unendlich kleinen Drehwinkel δ der Punkt P_1 beschreibt, ist $r\delta$, und zwar ist dieses der Wert, der in Fig. 14. mit P_1P_2 bezeichnet ist. Wenn man die Winkel dieses Elements mit den Coordinatenachsen mit α', β' und γ' bezeichnet, und unter φ den Winkel versteht, den dasselbe mit dem Element ds der gedrehten Curve L bildet: so hat man:

$$1) \qquad d^2F = r\delta \,.\, \sin\varphi \,.\, ds$$

für unendlich kleine δ und ds. Hierfür ist $\sin\varphi$ aus der Gleichung zu entnehmen:

$$2) \quad \sqrt{1-\sin^2\varphi} = \cos\varphi = \cos\alpha' \,.\, \cos\lambda + \cos\beta' \,.\, \cos\mu + \cos\gamma' \,.\, \cos\nu$$

Nach § 6., Anmerkung Seite 344 u. ff. ist hierin zu setzen:

$$3) \quad \begin{cases} \cos\alpha' = \dfrac{y_1 \,.\, \cos\gamma - z' \,.\, \cos\beta}{r} \\ \cos\beta' = \dfrac{z_1 \,.\, \cos\alpha' - x_1 \,.\, \cos\gamma}{r} \\ \cos\gamma' = \dfrac{x_1 \,.\, \cos\beta - y_1 \,.\, \cos\alpha}{r} \end{cases}$$

Führt man diese Werte, und für $\cos\lambda$, $\cos\mu$ und $\cos\nu$ die Werte aus Gleichung 6) des vorigen Paragraphen ein, so erhält man aus den obigen Gleichungen 1) und 2), wenn man die Indices weglässt:

4) $d^2F =$

$$\sqrt{\{(y\cos\gamma - z\cos\beta)^2 + (z\cos\alpha - x\cos\gamma)^2 + (x\cos\beta - y\cos\alpha)^2} - \left((y\cos\gamma - z\cos\beta)\frac{dx}{ds} + (z\cos\alpha - x\cos\gamma)\frac{dy}{ds} + (x\cos\beta - y\cos\alpha)\frac{dz}{ds}\right)^2 \delta \cdot d\sigma\}$$

wofür man auch schreiben kann:

5) $d^2F =$

$$\sqrt{\{x^2 + y^2 + z^2 - (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)^2} - \left((y\cos\gamma - z\cos\beta)\frac{dx}{ds} + (z\cos\alpha - x\cos\gamma\frac{dy}{ds} + (x\cos\beta - y\cos\alpha)\frac{dz}{ds}\right)^2 \delta \cdot ds\}$$

Hierin kann man auch dF an die Stelle von d^2F setzen und δ endliche Werte geben.

Steht es von vornherein nicht fest, dass die Drehachse durch den Anfangspunkt O gehe, sondern ist für dieselbe ausser den Winkeln, die sie mit den Coordinatenachsen bildet, nur ein beliebiger Punkt $A(u, v, w)$ gegeben, so hat man in vorstehenden Formeln $x - u$, $y - v$, $z - w$ an die Stelle von x, y, z zu setzen.

Aus der Formel 7) des vorigen Paragraphen und mehr noch aus den Formeln 4) und 5) dieses Paragraphen erkennt man, dass man wegen der in ihnen enthaltenen Wurzelgrössen aus diesen Formeln nicht so allgemeine Resultate ableiten kann, wie es in den §§ 5. und 6. für das durch eine bewegte Fläche beschriebene Volumen geschehen ist. Noch weniger ist das der Fall in Bezug auf denjenigen Ausdruck, welcher die von der Curve L beschriebene Fläche misst, wenn dieselbe gleichzeitig eine fortschreitende und eine Drehbewegung, also eine Schraubenbewegung ausführt; ich will deshalb auch auf die Ableitung dieser Formel nicht weiter eingehen.

Etwas einfacher gestalten sich die Formeln, wenn man die durch die Winkel α, β, γ bezeichnete Richtung mit einer der Coordinatenachsen, z. B. mit der Z-Achse zusammenfallen lässt. Es wird dann

$$\alpha = \beta = 90^0, \quad \gamma = 0$$

und die Gleichungen 4) und 5) beispielsweise gehen dann über in

6) $$d^2F = \sqrt{x^2 + y^2 - \left(y\frac{dx}{ds} - x\frac{dy}{ds}\right)^2} \cdot \delta \cdot ds$$

welche man, da

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

ist, auch in die Form bringen kann:

$$7) \quad d^2F = \sqrt{x^2+y^2+\left(x \cdot \frac{dx}{dz} + y \cdot \frac{dy}{dz}\right)^2} \cdot \delta \cdot dz$$

Beiläufig sei bemerkt, dass man diese Formel auch ganz kurz aus dem Normal- oder Meridianschnitt ableiten kann. Setzt man nämlich ebenso wie auf Seite 356):

$$r = \sqrt{x^2+y^2}, \quad z = z$$

so hat man:

$$d^2F = r \cdot \delta \cdot ds = r\sqrt{dr^2+dz^2}\,\delta = \sqrt{\frac{(r \cdot dr)^2}{dz^2} + r^2} \cdot \delta \cdot dz$$

Nun ist

$$r \cdot dr = x \cdot dx + y \cdot dy$$

und dadurch geht diese Gleichung über in die oben gefundene Gleichung 7) in der $x \cdot \frac{dx}{dz}$ und $y \cdot \frac{dy}{dz}$ die Subnormale der Projectionen der sich drehenden Curve auf die XZ- und auf die YZ-Ebene sind für den Punkt xyz der Curve L. Weitere allgemeine Resultate lassen sich auch aus der Gleichung 7) nicht ableiten, wenn man die bereits entwickelten Resultate als bekannt voraussetzt. Vollständigkeit halber will ich indessen noch Folgendes erwähnen.

Die Curve L wird zu einer ebenen Curve, deren Ebene durch die Z-Achse geht, wenn

$$y = nx$$

und hierin n eine constante Grösse ist. Durch diese Beziehung geht Gleichung 6) über in

$$8) \quad d^2F = \sqrt{x^2+y^2}\,\delta \cdot ds = \sqrt{x^2(1+n^2)} \cdot \delta \cdot ds$$

ein Ausdruck, in welchem man nach der Integration unschwer die Guldin'sche Regel des § 2 erkennen wird.

Setzt man in Gleichung 7):

$$ds = 0$$

so geht dieselbe über in

$$d^2F = \sqrt{(x\,dx+y\,dy)^2} \cdot \delta \cdot dz$$

Die Curve L ist dann eine ebene Curve in der XY-Ebene oder in

einer Ebene parallel zu dieser; setzt man den Fahrstrahl eines beliebigen Punktes xy derselben gleich ϱ, so ist

$$\varrho^2 = x^2 + y^2$$

also

$$(\varrho \cdot d\varrho)^2 = (x \cdot dx + y \cdot dy)^2$$

und die obige Gleichung geht über in

$$9) \qquad d^2F = \varrho \cdot \delta \cdot d\varrho$$

Aus dieser Gleichung kann man entnehmen, dass die von der Curve L beschriebene Fläche algebraisch gleich derjenigen Fläche ist, welche die Schlusslinie der Curve beschreibt, wie es früher schon anderweitig abgeleitet ist.

Auch die Gleichungen 6) bis 9) gelten natürlich für endliche Werte von δ, womit dann dF an die Stelle von d^2F tritt.

§ 10. Beispiele zu den §§ 4—7.

Es ist nicht besonders schwierig, die in den §§ 4—7 abgeleiteten Resultate zur Lösung von bestimmten Aufgaben anzuwenden, wenn die für diese gestellten Vorbedingungen nicht allzu verwickelt sind; ich will mich hier deshalb darauf beschränken, nur wenige einfache, an sich nicht uninteressante Beispiele durchzuführen.

Beispiel 1.

In Figur 16. sei die Curve M in der XY-Ebene die Spur eines zur Z-Achse parallelen Cylinders. Auf dem Cylinder wälzt sich eine Ebene F, und in der Ebene bewegt sich eine gesetzmässig veränderliche Figur mit der Fläche F so, dass die Projection der Bahn ihres Schwerpunktes P auf die XY-Ebene die Curve C ist. Es soll der Formelausdruck für das von F zwischen den Lagen F_0 und F_n, entsprechend den Winkeln δ_0 und δ_n mit der X-Achse, beschriebene Volumen angegeben werden.

Die einzelnen von F beschriebenen Volumenelemente dV zwischen je zwei Nachbarlagen F_1 und F_2 der Ebene F können als schiefe Cylinder betrachtet werden, deren unendlich kleine Höhe in der Figur durch ds_1 bezeichnet ist; diese Höhe ds_1 ist zu messen als der Abstand des Schwerpunkts der einen von der Ebene der andern Endfläche. Die Fläche F_2 kann nämlich bei einer Zunahme des Winkels δ um $d\delta$ nur um unendlich wenig von F_1 verschieden sein, und eine etwaige Verschiebung von F_2 gegen F_1 nach der Richtung

der Z-Achse, welche übrigens auch durch jenen Begriff des schiefen Cylinders nicht ausgeschlossen wird, ist für die Volumengrösse dV ohne Einfluss. Berührt F_1 den Cylinder M in T_1, und ist

$$\overline{T_1 P_1} = \varrho, \quad \overline{T_2 P_2} = \varrho + d\varrho$$

so ist

$$ds_1 = (\varrho + d\varrho)\, d\delta = \varrho \cdot d\delta$$

demnach

$$dV = F \cdot ds_1 = F \cdot \varrho \cdot d\delta$$

Ist der Winkel, den die Tangente an die Curve C für den Punkt P_1 mit der X-Achse bildet, gleich τ, so entnimmt man aus der Gleichung der Curve C:

$$\operatorname{tg} \tau = \frac{dy}{dx}$$

Ist ferner der Winkel, den die Tangente für P_1 mit $T_1 P_1$ bildet, gleich ι, so ist

$$\tau = \delta + \iota$$

mithin auch, da

$$ds \cdot \sin \iota = ds_1$$

$$ds \cdot \sin (\tau - \delta) = ds_1$$

und demnach auch

$$dV = F \cdot ds_1 = F \cdot \sin \iota \cdot ds = F \cdot \sin (\tau - \delta)\, ds = F\varrho \cdot ds$$

Ist r der Krümmungshalbmesser, A der Krümmungsmittelpunkt der Curve C für den Punkt T_1, und

$$\overline{A P_1} = R$$

so kann man auch setzen:

$$\varrho = r \cdot \cos \varphi = R \cdot \cos \varphi = \sqrt{R^2 - r^2}$$

und erhält damit noch

$$dV = F \cdot \varrho \cdot d\delta = F \cdot r \cdot \operatorname{cotg} \varphi \cdot d\delta = FR \cos \varphi\, d\delta$$

$$= F\sqrt{R^2 - r^2} \cdot ds$$

Endlich kann man auch noch die Bewegung von F zerlegen nach der Richtung der X- und Y-Achse, um zu erhalten:

$$dV = F \cdot \sin \delta \cdot dx + F \cdot \cos \delta \cdot dy$$

wenn x und y die Coordinaten von P_1, $x + dx$ und $y + dy$ diejenigen von P_2 sind.

Je nach den für einen bestimmten Fall vorliegenden besondern Bestimmungen wird man für die Integration von dV zwischen den gegebenen Grenzen die eine oder die andere dieser Formen wählen

Beispiel 2.

Ein besonderer Fall des ersten Beispiels ist folgender:

In Fig. 17. ist die Curve M ein Kreis vom Radius r, und C ist ebenfalls ein Kreis, vom Radius B; der Mittelpunkt beider ist der Anfangspunkt O. Auch die beschreibende Fläche F soll ein Kreis sein, vom Radius a; in der Figur ist diese Fläche in drei Lagen um 90° in die Zeichenebene gedreht und dann in punktirten Linien gezeichnet.

Nach Beispiel 1. ist

$$dV = F \,.\, \varrho \,.\, d\delta = F \,.\, r \,.\, \operatorname{cotg}\varphi \,.\, d\delta, \quad \text{wo} \quad \sin\varphi = \frac{r}{R}$$

also

$$V = r \,.\, \operatorname{cotg}\varphi \int_{\delta_0}^{\delta_n} F \,.\, d\delta$$

Ist F, also a constant, so ist hiernach

$$V = r \,.\, \operatorname{cotg}\varphi \,.\, F(\delta_n - \delta_0) = r \,.\, \operatorname{cotg} a^2 \,.\, \pi(\delta_n - \delta_0)$$

Ist F veränderlich, so möge beispielsweise die Bedingung gegeben sein:

$$F = F_0 + (F_n - F_0)\frac{\delta - \delta_0}{\delta_n - \delta_0}$$

oder

$$a^2 = a_0^2 + (a_n^2 - a_0^2)\frac{\delta - \delta_0}{\delta_n - \delta_0}$$

das ergiebt:

$$V = r \,.\, \operatorname{cotg}\varphi \,.\, \frac{F_0 + F_n}{2} \,.\, (\delta_n - \delta_0) = r \,.\, \operatorname{cotg}\varphi \,.\, \frac{a_0^2 + a_n^2}{2} \times \pi \,.\, (\delta_n - \delta_0)$$

Ist dagegen in einem andern Falle

$$a = a_0 + a_n - a_0)\frac{\delta - \delta_0}{\delta_n - \delta_0}$$

so erhält man:

$$V = r \,.\, \operatorname{cotg}\varphi \,.\, \frac{a_0^2 + a_0 a_n + a_n^2}{3} \,.\, \pi(\delta_n - \delta_0)$$

Beispiel 3.

In Fig. 18a und 18b ist ein normaler Kegel gezeichnet, dessen kreisförmige Basis (Radius r) in die XZ-Ebene, dessen Achse in die Y-Achse fällt, und dessen Höhe h ist. Auf der X-Achse liegt ein Punkt M, für den

$$\overline{O'M} = l$$

ist; durch diesen Punkt sollen die Schnittebenen MEF normal zur XY-Ebene gelegt und dann die Inhalte der Kegelstumpfe $ABFE$ als Functionen des Winkels δ graphisch dargestellt werden.

Auch diese Aufgabe kann als ein besonderer Fall des ersten Beispiels betrachtet werden; an die Stelle der Curve M (Fig. 16.) tritt jetzt der Punkt M, an die Stelle der Curve C die Curve $O'PD$ als der geometrische Ort des Punktes P_1, welcher die Strecke EF halbirt, da die Ebene MEF den Kegel in einer Ellipse schneidet, deren grosse Achse gleich EF ist, deren Schwerpunkt also in P_1 liegt *).

In Figur 18b entspricht P_1'' dem Punkt P_1 in Fig. 18a; beschreibt man aus O'' einen Kreis mit dem Halbmesser GH und zieht dann durch P_1'' die Sehne JK normal zu X, so ist JK die die kleine Achse der genannten Ellipse. Bezeichnet man die beiden Halbachsen mit a und b, so dass also

$$\overline{EP_1} = \overline{FP_1} = a, \quad \overline{JP_1''} = \overline{KP_1''} = b$$

ist, so ist die Fläche F der Ellipse gleich $ab \,.\, \pi$. Die in Fig. 16. mit r bezeichnete Länge ist jetzt null, also ist

$$\varrho = R = \overline{MP_1}$$

und demnach ist das dem Winkel $d\delta$ entsprechende Element dV des Volumens, $EFUL$, durch folgenden Ausdruck gegeben:

$$dV = a \,.\, b \,.\, \pi \,.\, \varrho \,.\, d\delta = \pi \,.\, a \,.\, b \,.\, \varrho \,.\, d\delta.$$

Construirt man nun:

$$a \,.\, b \,.\, \varrho = \frac{K}{2} \,.\, e^2 = J \,.\, \frac{e^2}{2}$$

wo K eine beliebige constante Länge und e mit δ veränderlich ist, so wird

---

*) Die Curve ist eine Hyperbel der Gleichung

$$\frac{y(h-y)}{x(l-x)} = \frac{h^2}{r^2}$$

deren Asymptoten nicht etwa durch den Punkt M, sondern durch den Punkt Q gehen, welcher die Strecke MD halbirt; die Asymptoten sind parallel zu AD und BD und treten an die Stelle der Curve, wenn $l = r$ wird, also M mit A zusammenfällt.

$$V = K\pi \int_0^{\delta} \frac{e^2}{2} \cdot d\delta$$

Das Integral rechts ist ein Flächenintegral und kann durch graphische Integration gelöst werden. (Vergl. das auf Seite 226) unter 4) genannte Werk; Anhang zum Abschnitt 1)). Wenn man die Länge e abträgt nach MN, so legt der geometrische Ort von N eine Curve $O'NM$ fest, die in Fig. 18a zufällig durch den Punkt O' geht, weil

$$K = r$$

angenommen und zufällig auch

$$l = 2r$$

Das obige Integral stellt den Inhalt der Fläche des Curvenausschnitts $MO'N$ dar. Es ist demnach:

$$\text{Volumen } (ABFE) = r \cdot \pi \cdot \text{Fläche } (MO'NPM)$$

und

$$\text{Volumen } (ABD) = \frac{r^2\pi \cdot h}{3} = r \cdot \pi \cdot \text{Fläche } (MO'NSM)$$

Beispiel 4.

In Fig. 19. ist eine (gemeine Cykloide ICB, deren Grundkreis den Halbmesser a habe, gezeichnet, so dass also stattfindet:

$$\overline{AC} = \overline{2a}, \quad OA = \overline{AB} = \overline{a\pi}, \quad \text{Bogen } OC = \text{Bogen } CB = 4a$$

Die Curven OT_1D und DB, zwei Cykloidenhälften für denselben Halbmesser des Grundkreises, bilden die Evolute der ersten Cykloide. Letztere soll in der XY-Ebene die Spur eines zur Z-Achse parallelen Cylinders sein. In der Cylinderfläche bewegt sich der Schwerpunkt P_1 einer begrenzten ebenen Fläche F so, dass eine mit der Ebene F dieser Fläche fest verbundene Ebene beständig eine ebenfalls zur Z-Achse parallele Cylinderfläche berührt, deren Grundcurve die Evolute ist. Es sollen die Integrale aufgestellt werden für das von der Fläche F beschriebene Volumen, während der Schwerpunkt P_1 (im Grundriss) von O nach C und weiter von C nach B gelangt.

Es genügt die Betrachtung der Bewegung für die erste Cylinderhälfte; was für diese gefunden wird, gilt in umgekehrter Folge unter übrigens gleichen Umständen auch für die zweite Hälfte. Verglichen mit dem ersten Beispiel tritt jetzt die Cykloide OCB an die

Stelle der Curve C in Fig. 16. und ihre Evolute an die Stelle von M. Ein Unterschied gegen jenes Beispiel soll hier darin liegen, dass die Fläche F nicht in die Berührungsebene T_1P_1 des Evoluten-Cylinders fällt, sondern dass die Normale der Ebene F nach der früheren Bezeichnungsweise mit den Coordinatenachsen die Winkel λ, μ und ν bildet, für die Anfangslage von F.

Wird nun das Volumen für die erste Cylinderhälfte OC mit V bezeichnet, so ist nach § 7., Gleichung 17), wenn man $x-u$ und $y-v$ statt x und y schreibt:

$$dV = F_{xy} \,.\, d\sigma + ((y-v)F_{yz} - (x-u)F_{xz})\,d\delta$$

Hierin bezeichnen x und y die Coordinaten eines beliebigen Punktes P_1 der Curve OC, u und v die Coordinaten des zugehörigen Krümmungsmittelpunkts T_1, für welchen der Krümmungshalbmesser

$$\overline{T_1P_1} = \varrho$$

sei, während δ der Winkel ONP_1 ist. Die Formel ist berechnet für rechtläufige Drehung $d\delta$, d. h. für eine Drehung von rechts nach links; sie gilt aber auch unverändert für die hier vorliegende rückläufige Drehung, denn mit $d\delta$ wechseln gleichzeitig F_{yz} und T_{xz} ihre Vorzeichen (vergl. § 4.).

Für die Cykloide ist nun:

die Länge der Normalen $= \overline{NP_1} = \sqrt{2ay}$

die Länge des Krümmungshalbmessers $= \overline{T_1P_1} = \varrho = 2\sqrt{2ay}$

Daraus folgt:

$$\sin\delta = \sqrt{\frac{y}{2a}}, \quad \cos\delta = \sqrt{\frac{2a-y}{2a}}, \quad d\delta = \frac{dy}{2\sqrt{2ay-y^2}}$$

$$\overline{EF} = x-u = -2\sqrt{2ay-y^2}$$

$$y-v = 2y, \text{ da } v \text{ als Ordinate negativ ist.}$$

Bezeichnet man nun weiter den Steigungswinkel der Bewegung mit η, so ist

$$\operatorname{tg}\eta = \frac{d\sigma}{\varrho \,.\, d\delta}$$

Ist η veränderlich, so bleibt $\operatorname{tg}\eta$ in der folgenden Entwicklung unter dem Integralzeichen. Ich will annehmen, dass η constant sei, so dass sich die Bahn des Schwerpunkts P_1 auf der abgewickelten

Cylinderfläche als eine gerade Linie darstellt; dann ist die Gesamtsteigung von O bis C, da der Bogen OC gleich $4a$ ist, gleich $4a \,.\, \operatorname{tg}\eta$.

Werden nun die verschiedenen Werte in die Gleichung für dY eingeführt, so erhält man:

$$dV = \operatorname{tg}\eta \,.\, F_{xz} \sqrt{\frac{2a}{2a-y}} \,.\, dy + F_{yz} \,.\, \sqrt{\frac{y}{2a-y}} \,.\, dy + F_{xz} \,.\, dy$$

man erkennt leicht, dass der Factor von F_{yz} gleich dx ist.

In dieser Gleichung sind nun noch die veränderlichen Projectionen von F durch F, λ, φ und durch δ, bzhw. y auszudrücken. Ist die Gleichung der Ebene von F in der Anfangslage

$$\cos\lambda \,.\, x + \cos\mu \,.\, y + \cos\nu \,.\, z - p = 0$$

so ist sie nach einer rückläufigen Drehung um den Winkel δ um eine Folge von Achsen, welche sämtlich der Z-Achse parallel sind, von folgender Form, für die der Wert von q nicht bestimmt zu werden braucht:

$$\cos\lambda(\cos\delta \,.\, x - \sin\delta \,.\, y) + \cos\mu(\cos\delta \,.\, y + \sin\delta \,.\, x) + \nu \cdot z - q = 0$$

oder:

$$(\cos\lambda\cos\delta + \cos\mu\sin\delta)x - (\cos\lambda \,.\, \sin\delta - \cos\mu \,.\, \cos\delta)y + \cos\nu \,.\, z - q = 0$$

Daraus entnimmt man:

$$F_{xy} = F \,.\, \cos\nu$$
$$F_{yz} = F(\cos\lambda \,.\, \cos\delta + \cos\mu \,.\, \sin\delta)$$
$$F_{xz} = F(-\cos\lambda \,.\, \sin\delta + \cos\mu \,.\, \cos\delta)$$

Wenn man diese Werte in dV einsetzt und reducirt und darauf zwischen den Grenzen $2n$ und O integrirt, so erhält man:

$$V = F(\cos\mu + \cos\nu \,.\, \operatorname{tg}\eta)\sqrt{2a}\int_0^{2a} \frac{dy}{\sqrt{2a-y}}$$
$$= 4F \,.\, a(\cos\mu + \cos\nu \,.\, \operatorname{tg}\eta)$$

Der Winkel λ kommt in dem Resultat nicht vor; es ist also, da

$$\cos\lambda = 1 - \cos^2\mu - \cos^2\nu$$

das Vorzeichen von λ die Grösse des beschriebenen Volumens ohne Einfluss. Da die wälzende Ebene T_1P_1 in ihrer Anfangslage mit

der XZ-Ebene zusammenfällt und demnach mit der fest mit ihr verbundenen Ebene T einen constanten Winkel μ bildet, so hätte man mit Benutzung des allgemeinen Satzes in § 6., Seite 346 (Gleichung 15) dieses Resultat ohne Weiteres niederschreiben können. Nach diesem Satze ist nämlich das bei der Drehung (ohne Steigung) beschriebene Volumen gleich $F\cos\mu \int \varrho \,.\, d\delta$

Wäre die Fläche F an Grösse nicht constant, sondern veränderlich, z. B. so, dass aus dem Anfangswert $F \,.\, \sqrt{1-\frac{y^2}{4a^2}}$ für $y = y$ hervorginge, so würde der veränderliche Factor $\sqrt{1-\frac{y^2}{4a^2}}$ noch mit unter das Integralzeichen zu bringen sein. Man würde in diesem Falle erhalten:

$$V = F(\cos\mu + \cos\nu \,.\, \operatorname{tg}\eta)\,\frac{1}{\sqrt{2a}}\int_0^{2a} \sqrt{2a+y}\,.\,dy$$

$$= \frac{4(\sqrt{8}-1)}{3}\,Fa(\cos\mu + \nu \,.\, \operatorname{tg}\eta)$$

Wenn F beständig seiner Anfangslage parallel bleibt, im übrigen aber dieselbe Bewegung ausführt, so kann man sich diese rein fortschreitende Bewegung rückwärts aus der bisher betrachteten zusammengesetzten Schraubenbewegung dadurch abgeleitet denken, dass F mit der wälzenden Ebene T_1P_1 nicht fest, sondern drehbar verbunden ist, und zwar drehbar um eine zur Z Achse parallele Achse, welche durch den Schwerpunkt P_1 geht. Dreht man F jedes Mal nach der Drehung $d\delta$ um die augenblickliche Drehachse T_1, um jene zweite Achse um denselben Winkel $d\delta$ zurück, so wird bei dieser zweiten Drehung algebraisch ein Volumen null beschrieben, da ihre Achse eben durch den Schwerpunkt geht. Die beiden Drehungen bilden zusammen ein Drehungspaar, welches nach Seite 259 und 262 die Wirkung einer rein fortschreitenden Bewegung von der Grösse $\varrho \,.\, d\delta$ hat. Die für dV entwickelte Formel gilt in diesem Falle unverändert; da aber F der ursprünglichen Lage parallel bleibt, so sind die unveränderlichen F die Projectionen von F constant und können bei der Integration vor die Integralzeichen gesetzt werden. Da

$$F_{yz} = F \,.\, \cos\lambda, \quad F_{zx} = F \,.\, \cos\mu, \quad F_{xy} = F \,.\, \cos\nu$$

so erhält man

$$V = F\left\{\cos\lambda \int_0^{2a} \sqrt{\frac{y}{2a-y}} \, . \, dy + \cos\mu \int_0^{2a} dy \right.$$

$$\left. + \cos\nu \, . \, \operatorname{tg}\eta \int_0^{2a} \sqrt{\frac{2a}{2a-y}} \, dy \right\}$$

$$= Fa\{\pi \, . \, \cos\lambda + 2\cos\mu + 4\operatorname{tg}\eta \, . \, \cos\nu\}$$

Man hätte diesen Wert auch einfach in der Weise ermitteln können, dass man den Schwerpunkt von F erst durch die Strecke

$$\overline{OA} = a\pi$$

dann durch die Strecke

$$\overline{AC} = 2a$$

und endlich in der zur Z-Achse parallelen Cylinderseite C durch die ganze Steigung $4a \, . \, \operatorname{tg}\eta$ führt.

Ist F veränderlich, so hat man auch in diesem letzten Falle den veränderlichen Factor, ebenso wie es oben angedeutet wurde, unter die Integralzeichen zu bringen.

Februar 1889. (Eingesandt Januar 1894.)

Inhalt.

		Seite
	Einleitung	225
§ 1.	Volumen des schief abgeschnittenen Cylinders	227
§ 2.	Die Guldin'schen Regeln	229
§ 3.	Ergänzung in Bezug auf Volumen und Oberfläche des schief abgeschnittenen Cylinders	232
§ 4.	Allgemeine Betrachtungen. (Lage des Coordinatensystems und Richtung der positiven und negativen Drehung. Lage, Richtung und Projection von Linien und Flächen. Vorzeichen der durch die Bewegung von Linien und Flächen beschriebenen Flächen- und Raumgrössen, Allgemeine Resultate in Bezug auf die Grösse der letzteren für parallele Verschiebungen und für Drehbewegungen. Zusammensetzung und Zerlegung von Parallelverschiebungen und Drehungen.)	235
§ 5.	Parallelverschiebung einer begrenzten Fläche	337
§ 6.	Drehung einer begrenzten Fläche um eine Achse	340
§ 7.	Cylindrische Schraubenbewegung einer begrenzten Fläche	365
§ 8.	Parallelverschiebung einer begrenzten Curve	372
§ 9.	Drehung einer begrenzten Curve um eine feste Achse	375
§ 10.	Beispiele zu den §§ 4—7	378—386

XXI.

Mathematisch-Geschichtliches aus dem Codex latinus Monacensis No. 14908[1]).

Herausgegeben durch
M. Curtze in Thorn.

Aus dieser Handschrift hat zuerst *Gerhardt* eine Algebra in deutscher Sprache aus dem Jahre 1461 veröffentlicht.[2]) Ich will mir erlauben einige andere Stücke arithmetischen Inhalts, ebenfalls in deutscher Sprache, hier zum Druck zu bringen, mir vorbehaltend, weitere Stücke von eben solchem Interesse hier oder anderweitig folgen zu lassen.

I.

Clm. 14908, Blt. 32′—34.

| Ain yede zal ist gelich ader vngelich, vnd was gelich ist, 82′
daz ist glich glich als alle zal, dye gewachsen ist mit dup-
lieren an ainnem anzufahn alz: 2, 4, 8, 16, 32, 64 *etcetera*,

---

1) Der fragliche Codex ist ein Band in klein Oktav von 504 Bltt., von welchen etwa die Hälfte mit arithmetischen, die andere Hälfte mit geometrischen Abhandlungen gefüllt ist. Der hauptsächlichste Schreiber war ein *Frater Fridericus ord. S. Benedicti professus Monasterii S. Emerami Ratisb. diocesis.* Auch die unten veröffentlichten Stücke sind von seiner Hand.

2) Gerhardt in den Monatsberichten der Berliner Akademie 1870, S. 141—143. —

3. gerade oder ungerade (*par* oder *impar*). —

wann es gat mit glichen ausz vnz auf ainsz; oder glich vnglich alz alle zal, dye von vngelicher duplierer zal erwachsen ist alz: 6, 10, 14, 18, 22, 26 vnd des glychen, wann alz bald sye ain mal getailt wirt, so ist sye nit mer zetailen in tzwe; oder vnglych glych alz alle zal dye sich taylen lat in glych tail, aber nit ze end ausz alz 24 lat sich taylen in 2 mal 12, vnd 12 in 2 mal 6, aber 6 lat "nit„ sich taylen dann in vnglich tail, daz ist 3 vnd 3, dye paid vnglich sind, vnd wachsen ausz glych glych zal, wann ainer in den andern multipliciert wirt, als da stat:

3	5	7	9	11	13
4	8	16	32	64	128
12	40	112	288	704	1664

oder der erst vngelich in der gelychen ainen vnder im, welchen man wil, also auch mit den andern.

Dye vngelich zal ist auch dreyerlay. dye erst ist vngesamelt ausz ander zal, alz *sine regula*, wann kain ander
33 zal | erzelt dye zal, alz: 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 28, 29, 31, 37. Aber dye ander vngelich zal ist gesamelt ausz ander zal, alz: 9, 15, 21, 27; alz 9 kommet ausz 3 mal 3 vnd 15 ausz 3 mal 5.

Ausz der zal finstu, daz dye gesamelt ist ausz der ersten vnglychen zal, vnd sameln sich selb nit, darumb, wann man 25 scheezt gen 9 oder gen 15 oder 21, so wer sie vngesamelt. Daz ist der drit tail der vnglychen zal.

Von den glychen zal sind etlich gancz gerecht, etlich gebrochend, etlich vberflussig. Die vberflussig, alz 12, 24; wann 12 hat $\frac{1}{2}$ 6, vnd $\frac{1}{3}$ 4, vnd $\frac{1}{4}$ 3, vnd $\frac{1}{6}$ 2, vnd $\frac{1}{12}$ 1, daz macht 16, daz ist 4 zevil. Aber dye gebrechent 8, 14; wann 8 hat $\frac{1}{2}$ 4, vnd $\frac{1}{4}$ 2, vnd $\frac{1}{8}$ 1, daz macht 7, vnd gebricht ains.

4. *par par.* — 6—7 *par impar.* — 10. *impar par.* — 22—23. vngesamelt = Primzahl — 24. gesamelt = zusammengesetzte Zahl. — 27—30. Relative Primzahlen.

Zwichsen den czwayen vnmassen findet man daz gancz gerecht, daz nit zevil noch zewenig, hat alz 6, 28; wann $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}$ von 6 ist 3, 2, 1, dye machen eben 6; von 28 $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{7}, \frac{1}{14}, \frac{1}{28}$ 14, 7, 4, 2, 1, dye machen dan 28. darumb wirt dye zal *perfectus numerus* gehayssen, vnd sind wenig zwichsen ainem vnd 10 ist aine 6, | von 6 zw 100 auch aine 28, 33 zwischen 1000 auch aine 496, zw 10000 auch aine 8128. Wiltu aber finden, wye dye werden, so secz all glych glyche zal alz vil du wilt, an ainem anzefahen also

1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128

tue dye ersten zw der andern, daz macht 3, vnd multiplizir in dye lesten gesamelte zal, daz ist 2, vnd 2 mal 3 ist 6, daz ist dye erst gancz gerechte zal. Darnach samel 1, 2, 4, daz macht 7, multiplicir daz in dye lesczt sumirte zal, daz ist 4 mal 7 ist 28, daz ist dye ander perfecte zal. Wer aber, daz et wann ausz dem sumeren ain zal keme, dye nit *sine regula*, daz ist *primus* vnd *incompositus* were, so behalt dye sum vnd gang furbas, alz 1, 2, 4, 8 macht 15, dye 15 sind nit *sine regula*, darumb sumir dar czw 16, daz macht 31, daz ist *sine regula*, dye multiplicir in 16, so kumpt 496 dye drit gerecht zal; also tue furbas nit den andern glych-glychen zalen, so finstu all gerecht zal ꝛc". 34′

primus numerus perfectus.	*secundus perfectus.*	*tercius perfectus*
6	20	496
3	14	248
2	7	124
1	4	62
	2	31
	1	16
		8
		4
		2
		1

Quartus numerus perfectus.	*5us num. perf.*
8128	33550336
4064	16775168
2032	8387584

Quartus numerus perfectus.	*5ns num. perf.*
1016	4193792
508	2096896
254	1048448
127	524224
64	262112
32	131056
16	65528
8	32764
4	16382
2	8191
1	4096
	2048
	1024
	512
	256
	128
	64
	32
	16
	8
	4
	2
	1

Es ist auch eine lateinische Bearbeitung desselben oder ähnlichen Inhaltes in dem Bande vorhanden[3]). In dieser hat der Verfasser als fünfte und sechste vollkommene Zahl 130916 und 2096128 angegeben, welche bekanntlich keine solchen sind, da weder 511 noch 2047 Primzahlen darstellen. Erstere ist 7.73, letztere 23.89. Unser Autor hat richtig als fünfte vollkommene Zahl 33550336 gefunden.

II.

Clm. 14908. Blt. 124′—127.

124′ | Diuinare.

Item ich wil wissen, wie vil pfenning in dem peutel

3) Blt. 201′—205′: *Diffiniciones numerorum.* Die betreffende Stelle heisst: *Cum numeri ab vnitate continue dupli ad inuicem coaceruati constituant numerum primum, tunc iste numerus primus ductus per multiplicationem in duplum extremum constituit numerum perfectum. Exemplum*: 1, 2, 4 *faciunt* 7, *qui est numerus primus, duc ergo* 7 *in* 4 *et resultant* 28, *qui est numerus perfectus.*

oder im synn hast. Machs also: hays yn dy dn, dy er hat, zelen mit 3, darnach *cum 5, postea cum 7*, vnd alz oft eins vber pleibt mit 3, so merk 70, vnd alz oft 1 vber pleibt mit 5, merk 21, vnd mit 7 merk 15.

Postea adde illos numeros in simul et ab ista summa subtrahe radicem, hoc est, multiplica 3 per 5 et 7, erit 105, alz oft du magst, vnd wz do pleibt, alz vil hat er ym sinn oder in peutel. Item das exempel get nit hoher den alz verr dy radix wirt, daz ist auf 105, vnd man sol dar vber nit nemen.

Du fragst, warumb nymbt man 70 auf 3 vnd 21 auf 5 etc^{a}. Also mags. wildu haben dy zal auf 3, so multiplicir 5 per 7, vnd was kompt, daz dividir per 3, vnd *manet* 1 vber, so ist dy selb zal recht; pleibt aber mer vber dann 1, so duplir dy selben zal, vnd darnach dividir mit 3, vnd pleibt dan aber mer vber dann 1, so addir dyselben zal. 125
daz thu alz lang, bis 1 vber pleibt. Desglichen wiltu haben | dy zal auf 5, so multiplicir 3 per 7, wirt 21, daz dividir per 5, so pleibt 1 vber, dar vmb ist 21 recht auf 5; vnd wildu dy zal haben auf 7, *multiplica 3 per 5, erit 15; illud divide per 7, manet in residuo 1, ideo 15 est verus numerus super 5*, dezglichen dy andern.

70	21	15	15	10	6	40	45	36
3	5	7	2	3	5	3	4	5
	105			30			60	
28	21	36	21	28	36	63	36	28
3	4	7	2	3	7	2	7	9
	84			42			126	
128	175	120	216	225	280	1144	936	1782
5	6	7	5	8	9	9	11	13
	210			360			1287	

Von dreyen dingen.

Item 3 gesellen haben 3 ding. Nu wiltu wissen, welcher daz oder daz hab. So gib ainem ding dy zal 1, vnd dem andern 2, dem dritten 3 | darnach sprich zw it ainem, 125′
czu welchen du wild: duplir dy zal deines dings, vnd der merck gar wol. darnach sprich zu dem andern: multiplicir

Si sequentem queris, fac similiter: 1, 2, 4. 8, 16 faciunt 31, qui est numerus primus; duc ergo 31 in 16, et resultant 496, qui est numerus perfectus. Sequens est 8128, sequens est 130816, sequens est 2096128, et deinceps per eandem artem tot reperientur, quantum placuerit. (202, 13—23).

dy zal deins dings mit 9, den merck auch. darnach sprich zw dem driten: multiplizir dy zal deins dings mit 10. darnach haysz dy drei sumen zesam thun, vnd waz danu komen ist, daz subtrahir ab 60, vnd waz do pleibt, daz merk vnd lueg, wie oft du 8 dauon mugst subtrahiren, vnd magstu 1 mal, so hat der, der sein hat duplirt, daz ding, dem du 1 hast geben; magstu aber zwir, so hat er daz ding, dem du 2 hast geben, dezgleichen mit 3. vnd waz dann pleibt, wenn du 8 dauon zeuchst, daz mustu auch merken. wann pleibt 1 vber, so hat der, der sein ding mit 9 multiplicirt, daz ding mit 1; pleibt 2, so hat er daz ding mit 2, dez gleichen mit 3, vnd wenn man dy czwen waysz, so ist der dritt
126 auch bekannt. |

Item nym dir ein zal fur, wie vil du wild, so wil ichsz wissen. Sprich also zu ym: duplir dy zal, darnach haysz yn addiren 5, darnach haysz in multiplicirn mit 5, darnach haysz yn addiren 10, darnach multiplicirs mit 10, vnd wenn nu daz geschehen ist vnd gemacht ist, so nym von der ganczen zal 350, vnd waz vbrig pleibt, daz tail in 100, so kumpt dy summa.

350 { duplir — zal; Addir. \ Multipl. / 5; addir. \ multipl. / 10 }

Du fragst, war vmb sol man die zall 350 subtrahiren vnd kayne andre nit. wiltu daz wissen, so nym dy clainsten zal fur dich, daz ist 1. Nu duplir, vnd machs nach der regel, so kumpt 450. Nu zeuch von der zal ein zal, daz denn noch 100 pleibt, daz ist 350, *et ideo.*

Wurfel.

Nota des gleichen, wenn ir 3 mit einem wurfel werfen, vnd wild wissen, wie vil ydlicher hat geworffen, sprich zu dem ersten: duplir dy zal deiner augen, dy du geworffen hast: darnach haysz yn addiren 5 vnd multiplicirn mit 5. darnach sprich zw dem andern, daz er addir sein augen, darnach haysz multiplicirn mit 10. darnach sprich zw dem driten, daz er | addir auch sein augen. Darnach nym von der summ 350, vnd waz do pleibt an der ersten stat an der linken hannt, daz hat der erst geworffen.

Du fragst warumb sol man dy zal 350 subtrahiren etc^a. nym dy clainsten zal fur dich, daz ist 1 vnd aber 1; machs nach der regel, komen 461, da von mag kain zal abzyehen, daz 1 vnd 1 vnd 1 pleibt, dann 350.

Fingerlein.

Item einer hat ein fingerlein an dem finger. Nu wiltu wyssen, welche person daz fingerlein hab, vnd an welchen finger, vnd an welchen glid. Machs also: Sprich daz ayner vnter in zel vnd haysz in an heben an den ersten, vnd haysz in zelen vnz auf den, der daz fingerlein hat. Darnach haysz in dupliren dy selben zal; darnach haysz in addiren 5; darnach multiplicirn mit 5; darnach haysz in addiren den finger, vnd sol an heben zw zelen von dem clainsten finger der rechten hand; darnach haysz in 0 fur dy zal seczen, daz ist, haysz in dy zal multiplicirn mit 10, vnd darnach haysz yn addiren daz glid, vnd wenn daz geschehen ist, so subtrahir von der | gemachten zal 250, vnd waz do 127 pleibt, zaigt dir dain mainung. wann dy erst zal gegen der lincken hant bedeut dy person, dy ander zal den finger, dy drit zal daz glid. doch ye merck, wann dy ander zal wirt 0, so nym al mol 1 von der driten figur vnd addirsz zw 0, wirt der 10 finger, vnd dann pleibt darnach bedeut dy person.

Du fragst, war vmb sol man do subtrahirn 250, vnd hot vor subtrahirt 350. wildu daz wissen, so nym dy clainsten zal, daz ist 1 man, 1 finger, 1 glid. Nu machsz nach der regel, kumpt 361. darvon musz man subtrahiren 1 zal, daz 1 . 1 . 1 pleibt, vnd daz ist kaine dann 250.

4	7	2
man	finger	glid
	duplir — zal	
	addir. \	
250	multipl. / 5	
	Addir — finger	
	Multipl. 10	
	Addir	glid.

Was die erste Rechnung anbetrifft, so ist sie unter dem Namen ta yen, die grosse Erweiterung, als alter chinesischer Besitzstand bekannt. Sie ist dann um 1400 etwa in einer geschriebenen griechischen Handschrift aufgefunden worden, dann aber erst aus Christof

Rudolf, Rechenbuch von 1526 nachgewiesen. Dass unser anonymer Verfasser über das Wesen und den Grund des Verfahrens sehr deutliche Vorstellungen besass, ist klar, seine Erklärung sowie seine Ausdehnung auf verschiedene andere Zahlenverbindungen zeigt dies deutlich. Die gegebene Begründung ist aber mit der durch die neuern Methoden gegebenen dem Wesen nach identisch. Dass unser Verfasser tiefer eingedrungen war als andere, lehrt auch eine frühere Stelle des vorliegenden Manuscriptes, Bltt. 38′, denn dort wird ohne solche Begründung dieselbe Regel gegeben, wie folgt:

38′ ,10 Item. Nym fur dich ein zal, wy vil du wilt, dy wil ich vinden mit raytung (!). Ich nym fur mich 17, *diuide prima per 3 et manent 2. illa duo multiplica per 70, erit 140. Secundo diuide per 5 et manent 2. illa duo per 21 multiplica, erit 42. Tertio diuide per 7, manent 3. illa 3 multiplica per 15, erit 45. Illa omnia adde simul, scilicet 140, 42, 45, facit 227. Nunc considera bene, quando summa plus est quam 106, tunc debes subtrahere 210, illa est prima regula posicionis vera, et iterum considera bene, quando minus esset summa quam 106; tunc debes subtrahere 105 ista secunda regula posicionis et dicitur* 39 *regula falsa.* Und mit der Regel *posicionis vera et falsa* mag man vinden mancherlay raytung.

$$\left.\begin{matrix} 70 \,.\, 21 \,.\, 15 \\ 3 - \ 5 - \ 7 \end{matrix}\right\rangle \ 105 \text{ vel } 210.$$

Was hier die *regula falsa* zu tun hat ist absolut unerfindlich. Wenn Cantor, *Vorlesungen über Geschichte der Mathem.* (I. Bd. 2. Aufl. S. 44) von den Chinesen annimmt, dass sie die Lösung durch Versuche gefunden haben, so wird das durch unsern Text, der doch in letzter Instanz wohl auch auf China zurückgeht, einfach bestätigt Die genauere Erklärung des Verfahrens lese man bei Cantor, a. a. O. nach. Es ist wol erwähnenswert, dass weder in der auf Bltt. 38′ gegebenen Darstellung, noch in der auf Bltt. 124′—125 gegebenen das bei den Chinesen und in der griechischen Handschrift benutzte Zahlenbeispiel 23 gebraucht wird, und dass Bltt. 124′—125 überhaupt nur die allgemeinen Regeln mit ihren Begründungen geben, ohne Beispiele hinzuzufügen.

Auch die an dritter Stelle gelehrte Auffindung einer gedachten Zahl findet sich in speciellem Beispiel auf Bltt. 38′, 1—9 mit folgendem Wortlaut:

38′ Nota. Nym fur dich ein zal, wye vil du wilt. *Exempli gracia*: Ich nem fur mich 17. *illa duplica, erit 34, adde 5,*

erit 39; nunc multiplica 39 cum 5, erit 195; adde 10, erit 205; illa multiplica cum 10, facit 2050. Nu merck' sein regel, *et est 350*, dy zeuch ab von der sum, vnd waz vber pleibt, daz tail in 100, *et sic factum est. Et idem est, cum vis scire, quod vnus iaceret cum tribus taxillis.*

Auch hier ist keine Spur einer Begründung des Verfahrens vorhanden, die unser Verfasser in ganz angemessener Weise liefert, Alle diese Spielereien sind bekannt, aber alle erst aus dem 16. Jahrhundert, während unsere Handschrift in den Jahren 1456 bis 1464 geschrieben ist.

III.

Clm. 14908. Blt. 28′—29′ und 39.

| Multipliciren. 28′

Item multiplicir 10 in ein ander zal, daz ausz in allen paiden 3 komen. Secz also $\frac{10}{1}\ \frac{3}{10}$. Nu multiplicir $\frac{10}{1}$ mit $\frac{3}{10}$, komen 3, also wenn ich 10 ganze multiplicir in $\frac{3}{10}$, so komen 3 ganze vnd nit mer. Wann man prüch multiplicirt, so nemen sy ab.

Diuidiren.

Item tail 10 in 2 tail, also wenn ich den grosseren durch den clayneren tail, daz 7 komen im quocient, ader 30, wie man wil Machs also. wildu haben 7, so addir albeg 1 darczu, wirt 8. Secz

$$8-10<\begin{matrix}1-1\frac{1}{4}\\7-8\frac{3}{4}\end{matrix}$$

Nota tail $2\frac{1}{2}$ in 2 tail, also wenn ich den grosseren tail durch den claineren tail diuidir, daz $3\frac{1}{3}$ komen Mach nach der yeczigen regel, so wirt der clainer tail $\frac{15}{26}$, der grosser $\frac{50}{26}$

Item tail 15 in 4 vnd 3, daz albeg der ein quocient

18—23. Das heisst natürlich, es soll 15 im Verhältnis von 4 : 3 geteilt werden. $2\frac{1}{2}$ ist dann der Proportionalitätsfactor. Es gehört die Aufgabe also wirklich zur Gesellschaftsrechnung.

kumb. Machs also: addir 4 et 3, erit 7. Nu machs alz ein ander gesellschaft. 7 *dant* 15 *quid* 4? *Facit* $8\frac{4}{7}$. *Iterum* 7 *dant* 15 *quid* 3? *Facit* $6\frac{3}{7}$. *Nunc diuide* $8\frac{4}{7}$ *per* 4, *facit* $2\frac{1}{7}$, *eciam diuide* $6\frac{3}{7}$ *per* 3, *facit* $2\frac{1}{7}$, *eadem quociens.*

Nota tail 5 in 4 tail, wenn ich daz erst in daz ander
29 diuidir, daz 3 | komen, vnd wenn ich daz ander in daz 3 diuidir, daz 4 komen, vnd wenn ich daz drit in das vierd diuidir, das 5 komen. Wildu daz wissen, so nym fur dich dy zal in der proporcion, alz mans nennt, vnd addirs, *facit* 76, *est diuisor.*

$$76-5\left\{\begin{array}{l} 1-\frac{15}{76} \\ 3-\frac{15}{76} \\ 12-\frac{60}{76} \\ 60-37\frac{32}{76} \end{array}\right.$$

Progressio.

Addir albeg zesam daz erst vnd daz leczt, vnd daz selb multiplicir mit dem halben der zal der posicionum.

Exemplum. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. Addir 1 zw 10, wirt 11; daz multiplicir mit 5, facit 55.

Item 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11. Addir 1 ad 11, erit 12: multiplica per $5\frac{1}{2}$, facit 66.

Nota. 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15 faciunt 63.

Item in fractis. $\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{2}$, $4\frac{1}{2}$, $5\frac{1}{2}$, $6\frac{1}{2}$, $7\frac{1}{2}$. Adde primum et vltimum, facit 8; multiplica per medietatem istius numeri, hoc est 4, facit 32.

Item wiltu wissen dy zal des ritschendes (!), so duplir

24—30. Ist der erste Theil a, so muss der zweite $3a$, der dritte $12a$, der vierte $60a$ sein; das will der Verfasser mit den Worten besagen: „*so nym fur dich dy zal in der proporcion, alz mans nennt*", dann hat er wieder eine Gesellschaftsrechnung.

35—46. Der Verfasser benutzt also bei der arithmetischen Reihe stets die Formel

$$s = (a+t) \cdot \frac{n}{2}$$

auch wenn n keine gerade Zahl ist.

47. *ritschendes.* Dies Wort, das nur für die geometrische Reihe vom Quotient 2 gebraucht wird, ist mir noch nirgend sonst begegnet.

dy letzten zal vnd von dem, daz da kumpt, subtrahir dy erst zal.

Exemplum: 1, 2, 4, 8, 16, 32, facit 63.

Item wirt dy progressio tripla, so diuidir dy leczt mit 2 vnd addir zwm quocient dy leczt zal.

Exemplum 1, 3, 9, 27, 81, 243, facit 364. | 29'

Item wirt dy progressio quadrupla, so diuidir die leczt mit 3 vnd addir zwm quocient die leczt zal.

| Item wirt si quintupla, so dividir dy leczt mit 4 vnd addir dy leczt zal, et^{a}.

(Exempla quere. reverte 10 folia)

Item einer hat ein kue verkauft nach den cloen, der sein 16. Vnd hat geben dy erst vmb 1 hl, dy ander vmb 2, dy drit vmb 4, die vierd vmb 8 etc. ritschando. Nu ist dy frag, wye kumpt dy kue. Machs nach der regul progressionis, facit 65535 haller, daz ist 54 ℔ fl vnd 49 gl.

Item einer hat 1 pferd verkauft nach den neglein, daz sein 32, vnd hat geben den ersten nagel pro 1 heller, den andern pro 2, den 3. pro 4 etcet^{a} sic progressione ritschando, facit 4294967295 haller, daz macht 3579139 ℔ Regb vnd 33 gl.

Nota ein kunig hat verseczt daz pehemlandt, vnd hat daz verseczt nach dem schachpret, das helt 64 feld, vnd hat daz geben nach den ersten feld vmb 1 haller, vnd den ander vmb 2 ♄, drit 4 *etiam progressione ec^{a} ritschando. Queritur iterum.* *Facit*

47—57. Der Verfasser gebraucht die von Prosdocimo de' Beldamandi zuerst benutzte Summenformel der geometrischen Reihe

$$s = \frac{q^{n-1}-1}{q-1} + q^{n-1}$$

wenn er auch nicht absolut sagt, dass bei der Division durch $q-1$ nur die ganze Zahl des Quotienten gebraucht werden soll, so liegt doch eben darin, dass nicht q^{n-1} selbst, sondern $q^{n-1}-1$, der Division zu unterwerfen ist. Das etc^{a}. am Ende zeigt, dass der Verfasser von der Allgemeingiltigkeit seiner Regel überzeugt war. Beldamandi sagt zu demselben Zwecke; *et sic ultra*. Man vergleiche Cantor, *Vorlesungen* II; S. 196.

1̇84̇4̇67̇44̇07̇37̇09̇55̇1615 haller,

facit

15̇37̇22̇86̇72̇8̇09̇1̇293 ℔ Rgb vnd 15 gl

daz mecht kain kayser bezalen.

Diese drei Anwendungen in dieser oder ähnlicher Form sind längst bekannte Probleme. Ueber die andere Schachbrettaufgabe, wie sie aus Indien zu uns gekommen, brauche ich keine weitern Worte zu machen.

IV.

Clm. 14809, Blt. 92'—96. (NB.! Die Numerierung der einzelnen Aufgaben ist durch mich hinzugefügt.)

92' | I. Ain fiereck, wie dye ist, sol man also in ain quadrat bringen: du solt seczen dye kurczern sayten an dy lengeren vnd solt dann suchen daz mitel von den czweyen längen zesamen getan. darin secz den fuscz desz cirkels vnd mach ainen halben zirkel, der dye ganceczen (!) lynyen berur. dann zuch die kurczeren synen desz gefierten vnz an den halben czirkel, daz ist dy wurcz von dem quadrat, alz da stat. Die lang fiereck hat hat zwe der langen seyten 8 vnd zw der kurcz 2. Nu secz dye 2 an dy 8, so raichet es vnz an das *b*; dye selben lynien *ab* tail in czwe in *c*, darein secz den czirkel vnd zuch vmb den czirkel von *a* vnd zvm *b*. Dann nym dye linien 2 vnd zuch sich an den zirkel, vnd mach dye lynien *de*. dye selb lyny *de* ist daz mittel oder wurcz der verlangten. dar vmb zuch dye selben 4 mal
93 in quadrat wys, so hast du | ain quadrat, daz eben in helt als dye vberlangt fierung, vnd wurt dye wurcz 4 sein, wann 2 mal 8 macht 16, vnd 4 mal 4 ist och 16, vnd ist gelych (Fig. 1.)

II. Ayn bom 40 elen lang lyt uff der erden. ainer wil in uff richten vnd zucht in allen zug ainer ellen hoh den gipfel. Sag, in wie uil zügen mach er in uff gerichten? Merck, wann der bom ist uff gericht, so hat em ain fiertail von ainem czirkel gemacht, als da stat. dez selben zirkels ist ain halber dyameter 40 elen, so wer der gancz 80 ellen. Nun suech daz rond von 80 ellen. Multiplicir 80 durch $3\frac{1}{7}$,
93' das machet $251\frac{3}{7}$. | So weyt ist daz rotund vmb vnd vmb. So hat der bom nun $\frac{1}{4}$ gemacht, dar vmb nym $\frac{1}{4}$ von $251\frac{3}{7}$, so kumpt $62\frac{6}{7}$, so vil zug hat er getan gancz auf zeziehen. (Fig. 2.)

III. Ain rotund hat ain dyameter 14 ellen lang. Sag, wye weyt ist es vmb vnd vmb, vnd wie vil hat es quaderelen? Machs also: multiplicir 14 durch $3\frac{1}{7}$, so kompt 44, so vil hat es vmb vnd vmb. Darnacht multiplicir 14 mal 44, macht 616; zuch dar von $\frac{3}{4}$, daz vbrig sind quaderelen des rotund.

IV. Ain bom ist 40 schûch hoch; der stat bei aynem wasser, daz ist von dem bom 30 schuh brait vber das wasser. Sag, wye weyt ist von dem gipfel des bomes vber das wasser an die erd? Machs also: multiplicir den bom in sich selb, ist 40 mal 40, macht | 1600, vnd das wasser 94
in sich selb, 30 mal 30 ist 900. tue zesamen 1600 vnd 900, ist 2500. Sûch radicem darvon, daz ist 50; so weyt ist von dem Gipfel hin vber.

V. Ain laiter ist hoch 50 ellen, vnd lainet an ainem turn, der auch 50 ellen hoch ist. Mann ruket sie vnden herdan von dem turn, dz sye 30 ellen vnden von dem turm stat. Sag, wye weyt ist dye laitern oben herab gerukt? Machs also: dye laiter multiplicir in sich selb, dz ist 50 mal 50, macht 2500. Multiplicir dye vnter weyte in sich selb, 30 mal 30 macht 900; zuech ab denselben quadrat von 2500, dennocht belybt 1600. Sûch dy wurcz von 1600, daz ist 40, so hoch lainet dye laiter an dem turn. Nun ist der turn 50 ellen hoch, daz ist ain zaichen, daz dye laiter oben abher nit mer dann 10 elen geruckt ist. also ist es in allen andern gelichen dingen. 94′

VI. Ain burg ist vm mauret. vmb die gat ain grab, der ist ausen vmb 2200 vmb vnd vmb, vnd von der mauren der burg ist 35 elen vber den graben; dye mauer ist dick $3\frac{1}{2}$ elen. Sag, wye weyt ist dye mauer? Machs also: tail 2200 in $3\frac{1}{7}$, daz macht 700. So weyt ist der dyameter des graben vber vnd vber dich (!) burg. Von dem dyameter zûch ab dye weyte dez graben zwemal, daz ist 2 mal 35, macht 70, vnd belybt 630. daz multiplicir wider durch $3\frac{1}{7}$, daz macht 1980, so weyt ist dye mur vmb vnd vmb. Woltest aber wyssen, wye weyt dye maur in wendig were vmb vnd vmb, so duplir dye dycke der maur, daz ist 2 mal $3\frac{1}{2}$, macht 7. daz multiplicir durch $3\frac{1}{7}$, so kumpt 22, dye zuch ab von der aussen weyten der mauren, daz waz 1980, darnacht belybt 1958: so weyt ist inwendig dye maur. Also tue auch in allen andern dez gelychen. | (Fig. 3.) 95

VII. Der ain turn ist 60 elen hoch, der ander 50, dye sind 100 elen weyt von ain ander. auf yedem siczt ain falk, vnd vehen zemal an zu phligen zw dem luder, vnd fluegt ainer so bald alz der ander. Sag, wo leyt daz luder? Multiplicir dye hoch ytlichsz turns in sich selb; 60 mal 60 ist 3600, vnd 50 mal 50 ist 2500; zuch dye mindern von den meren, bleybt 1100. duplir dy weyte der turen, daz macht 200, dann tail 1100 in 200, so kumpt $5\frac{1}{2}$.. dann tail dye weyt der turnen in 2, so kumpt 50; yeden turn zuch ab $5\frac{1}{2}$ des höhern turnsz vnd gib es dem nidern turen, so kompt dem nidern $55\frac{1}{2}$, vnd belybt dem höhern $44\frac{1}{2}$, do leyt daz luder so weyt von yeden turn. Wiltu es probirn, so multiplicir die höhe itlichsz turnes in sich selb, alz 60 mal 60 ist 3600, tue darzw dye multiplicirt seyten desz luders, daz ist $44\frac{1}{2}$ mal $44\frac{1}{2}$, so kompt $1980\frac{1}{4}$, daz macht alles $5580\frac{1}{4}$. Such radicem dar von, vnd waz dir kumpt, daz ist dye weyte von dem luder vncz an dye hohe des 60 eligen turnes. Also tue och dem andern turn, so kumpt dye vorig zal, vnd wirt recht. [Crastine epiphanie.] (Fig. 4.)

VIII. Such zwo zal, vnd zuch von yeder $\frac{1}{3}$ vnd $\frac{1}{4}$, vnd multiplicir, waz ir ieder belibt, in sich selb, vnd waz ausz yn paiden komme, daz tue zesamen, daz es mach 169. Such die wurcz von 169, daz ist 13. Nu multiplicir dye tail in sich selb $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$ also: 1 mal 3 ist 3, vnd 1 mal 4 ist 4, tue zesamen, macht 7. Sůch dy wurcz von 25, ist 5. Nym nun aber dye 3, vnd multiplicircz durch dy wurcz der ersten zal: 3 mal 13 macht 39, daz tail durch die wurcz der andern zal, dz ist 5, so kumpt dir $7\frac{4}{5}$, daz ist dye ain zal. Nun multiplicir dy 4 auch durch dy ersten wurcz, dz ist 4 mal 13 macht 52, daz tail durch dy wurcz der andern zal, dz ist durch 5, so kumpt $10\frac{2}{5}$, daz ist dy ander zal. Nun multiplicir $7\frac{4}{5}$ in sich selb, vnd $10\frac{2}{5}$ auch in sich selb, so kumpt zesamen 169. Dann sůch ein zal, wann du $\frac{1}{3}$ vnd $\frac{1}{4}$ dar von zuhest, dz $7\frac{4}{5}$ belyb, vnd ain
96 andere, daz $10\frac{2}{5}$ belib | daz sind dye zwo ersten zal, dy man finden sol.

Nrn. I—VI brauchen wohl kaum einer weiteren Erläuterung. Ist bei Nr. VII der Ort des Luders bei c, die Höhe des einen Turmes $= a$, die des andern $= b$, die Entfernung der beiden Türme $= m$, so sei die Entfernung des c von dem ersten Turme $= \frac{m}{2} - x$,

also die von dem zweiten $-\frac{m}{2}+x$. Dann muss nach der Aufgabe sein

$$a^2+\left(\frac{m}{2}-x\right)^2=b^2+\left(\frac{m}{2}+x\right)^2,$$

woraus

$$x=\frac{a^2-b^2}{2c}$$

folgt. So rechnet aber unser Verfasser.

Aufgabe VIII verlangt dem Wesen nach die Zahl 169 in zwei Quadrate zu zerlegen, ist also eine unbestimmte Aufgabe. Unser Verfasser löst sie derart, dass er die Identität

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^2=1,$$

welche aus dem bekannten Pythagoräischen Dreiecke 3, 4, 5 unmittelbar folgt, mit 169 vervielfacht. Dadurch erhält er die beiden Zahlen $7\frac{1}{5}$ und $10\frac{2}{5}$. Die eigentlichen gesuchten Zahlen sind dann $18\frac{18}{25}$ und $24\frac{24}{25}$.

Während bei dieser Aufgabe davon keine Rede ist, dass es eine unendliche Zahl von Lösungen geben muss, ist dies der Fall bei einer andern Aufgabe, die füglich als eine Verallgemeinerung der *ta yen* Aufgabe betrachtet werden könnte, welche ich nebst einigen andern unbestimmten Aufgaben, die der sogenannten *regula virginum* angehören als Schluss dieser vielleicht schon etwas zu ausgedehnten Mitteilung hersetzen will.

V.

Clm. 14904, Blt. 152'—153; Blt. 86'—87.

I. Nota. Quidam dominus dives habet 4 bursas denariorum, in unaquaque tantum, quantum in alia de denariis, quos vult distribuere in viam elemosine (!) quatuor ordinibus, scilicet czeylen (!) pauperum. In primo ordine pauperum sunt 43 pauperes; in secundo sunt 39 pauperes; in tercio sunt 35 pauperes; in quarto sunt 31 pauperes. Primam bursam distribuit equaliter primo ordini, in fine tamen remanent sibi 41 ita, quod ad complendum ordinem deficiunt sibi 2 denarii. Secundam bursam distribuit equa-

liter secundo ordini, in fine tamen non potest complere, sed habet in residuo 33, sicque ad complendum ordinem deficiunt ei 6 denarii. Terciam bursam distribuit equaliter tercio ordini, in fine tamen remanent sibi 25, sicque ad complendum ordinem deficiunt ei 10 denarii. Quartam bursam distribuit quarto ordini equaliter in fine tamen est residuum 17 denariorum sicque in 14 denarii deficiunt ad complendum ordinem. Queritur nunc, quot fuerunt denarii in vna bursa.

In summa quaestio habet hoc: Invenias unum numerum, qui, dum diuiditur per 43, post integra quocientis manent in residuo 41; iterum, dum dividitur per 39, manent in residuo 33; iterum, dum dividitur per 35, manent in
153 residuo 25; iterum, dum dividitur per 31, in residuo manet 17. *Licet autem non sit solum vnus numerus, qui talis est verum infiniti sunt signabiles.* 5458590.

85′$_{8}$ II. Item. 100 haup viech vmb 100 fl, ochsen, kue vnd schaf, ye 1 ochsen vmb 10 fl, 1 kue vmb 5 fl, 1 schaf vmb $\frac{1}{2}$ fl. Queritur, wie uil sein der ochsen, kue vnd schaf? Responditur: 1 ochsz, 9 kue vnd 90 schaf.

III. Item. 20 haup viehs vmb 20 fl, ochsen, schaf vnd gaysz, ye 1 ochsen vmb 3 fl, 1 schaf vmb $1\frac{1}{2}$ fl vnd 1 gaysz vmb $\frac{1}{2}$ fl. Queritur ꝛc? Responditur: 2 ochsen, 5 schaf, 13 gaysz.

IV. Nota. 12 personen, Ritter, Knecht vnd Junckfraw, sollen tailen 12 proteynen ritter 2 prot, 1 Knecht $\frac{1}{4}$, einer Junckfraw $\frac{1}{2}$ tail. Queritur wie vil ꝛc? Responditur: 1 Junckfraw, 6 knecht vnd 5 ritter.

V. Item 12 menschen Ritter, pfaffen, knecht vnd Junckfraw sollen tailen 12 ℔n. der ritter sol haben 2
86 der pfaf 1 ℔, der knecht $\frac{1}{4}$, dy Junckfraw 1 haller. Responditur, 4 ritter, 2 pfafen, 2 Junckfraw, 4 kneeht.

VI. Item 30 person sol tailen 30 meczen. der man nymbt 3 meczen, dy fraw 2, daz kind $\frac{1}{2}$. Queritur ꝛc? Responditur: 3 man, 5 fraw, 22 kinder.

VII. Item 100 person *ut supra*. Responditur: 6 man, 30 fraw, 64 kind.

VIII. Item 90 person ut supra. Der man sol haben 3, dy fraw 2, daz kind $\frac{1}{2}$. Responditur: 6 man, 20 fraw, 64 kinder.

IX. Item. 100 viech pro 100 fl, ye 1 pferd pro 3 fl, 1 ochsen pro 1 fl, 24, 1 schaf pro 1 fl. Queritur ꝛc? Responditur: 23 pferd, 29 ochsen, 48 schaff.

X. Item 4 stain sullen wegen all gewicht vnz auf 40. Queritur wie uil ydlicher stain hab ain gewicht. Responditur. Der erst hat 1 ℔, der ander 3 der drit 9, der vierd 27. ꝛcª. Multiplicir mit 3.

Dass Nr. I. als die *ta yen* Regel auf 4 Bedingungen ausgedehnt angesehen werden kann, ist klar. Die Zahl

$$5458590$$

ist die drittkleinste Zahl, welche den Bedingungen der Aufgabe entspricht. Es ist

$$\begin{aligned} 5458590 &= 43 \cdot 126943 + 41 \\ &= 39 \cdot 139963 + 33 \\ &= 35 \cdot 155959 + 25 \\ &= 31^{*} \cdot 176083 + 17 \end{aligned}$$

Nach der *Ta yen* Regel würde so zu rechnen sein: Für 1 durch 43 gewonnen setze 1227135, für 1 durch 39 gewonnen setze 1492960, für 1 durch 35 gewonnen setze 155961, für 1 durch 31 gewonnen setze 763035, addire alles und dividire die Summe durch 1819545, so erhältst du als Rest der Division die gesuchte Zahl.

$$\begin{aligned} \text{Es ist } 41 \cdot 1227135 &= 50312535 \\ 33 \cdot 1492960 &= 49267680 \\ 25 \cdot 155961 &= 3899025 \\ 17 \cdot 763935 &= 12971595 \\ \hline & 116450835 \end{aligned}$$

$$\text{Es ist aber } 61 \cdot 1819445 = 110992245$$

$$\text{also ist die gesuchte Zahl} = 5458590$$

wie unser Autor sie angegeben hat, und allgemein jede Zahl von der Form

$$1819^{545}n + 5458590.$$

Setzt man noch $n = -1$ und -2, so erhält man die beiden klein-

Digitized by Google

sten Zahlen, welche der Aufgabe entsprechen: 3639045 und 1819500, daher ist die allgemeine Form der Zahl auch

$$x = 1819545\,n - 45.$$

Alle übrigen Aufgaben sind in der bekannten Art der *regula virginum* oder *regula coeci* gerechnet, welche übrigens in der ganzen Handschrift nicht auseinandergesetzt ist. Es sind eben nur die Aufgaben und ihre Resultate mitgetheilt worden. Da bei viel einfachern Aufgaben die Rechnung *in extenso* durchgeführt ist, so ist dies doppelt verwunderlich.

VI.

Clm. 14908. Blt. 504'.

504' Omnis quadratus, cuius prima figura est par, ut per 4 diuisibilis.

Omnis quadratus in primis locis habet parem numerum ciffarum.

Nullus quadratus recipit in primo loco 2, 3, 7 vel 8, sed „alios“ bene.

Omnis quadratus fit simpliciter vel subtracta vnitate per 3 diuisibilis.

Subtrahendo a quadrato duplem sue radicis minus 1 habetur immediate precedens, vel addendo sibi duplum plus 1 occurrit immediate sequens.

Si quadratus fuerit impar, remota 1 per 4 est diuisibilis.

Si prima figura fuerit impar, secunda semper est par.

Nunquam omnes figure possunt esse impares, sed bene pares.

Quando 4 est in primo loco, semper par est in secundo loco.

Quando 6 est in primo loco, semper impar in secundo loco.

Omnis cubicus, cuius prima figura est par, est in 8 divisibilis, et numerus quociens est etiam cubicus.

Numerus ciffarum in primis suis locis semper est per 3 diuisibilis.

Proba de cubicis est per 7, et est 1, 6, vel 0; proba per 9 est 1, 8 vel 0.

Proba in quadratis per 7 est 1, 2, 4, 0; et proba per 9 est 1, 4, 7, vel 0.

Item cubicus recipit omnes digitos in primo loco et 0.

1464.

Hier ist zu bemerken, dass unter *prima figura* die Einer-, unter *secunda figura* die Zehnerziffer zu verstehen ist.

Thorn, 29. Mai 1894.

XVII.

Zwei algebraische Aufgaben mit Lösungen.

Von

Dr. **Amthor** und **C. Davids.**

Erste Aufgabe.

$$\left.\begin{aligned} 4ayz &= (a+b+c)(b+c-y-z)^2 \quad (1)\\ 4bzx &= (a+b+c)(c+a-z-x)^2 \quad (2)\\ 5cxy &= (a+b+c)(a+b-x-y)^2 \quad (3)\end{aligned}\right\} \qquad \text{I.}$$

A. Auflösung von Dr. Amthor.

Um aus den Gleichungen (2) und (3) die Grösse x zu eliminiren, ordne man dieselben zunächst nach Potenzen von x;

$$(a+b+c)x^2-2[(a+b+c)(a+c-z)+2bz]x+(a+b+c)(a+c-z)^2=0$$
$$a+b+c)x^2-2[(a+b+c)(a+b-y)+2cy]x+(a+b+c)(a+b-y)^2=0$$

Das Resultat der Elimination von x aus zwei Gleichungen von der Form

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=0 \quad \text{und} \quad \alpha' x^2+\beta' x+\gamma'=0$$

ist aber

$$\alpha(\gamma-\gamma')^2-(\beta-\beta')(\beta'\gamma-\beta\gamma')=0$$

Dies auf die obigen Gleichungen angewendet, giebt

$$(a+b+c)[(a+b+c)(a+c-z)^2-(a+b+c)(a+b-y)^2]^2$$
$$-[-2(a+b+c)(a+c-z)-2bz+2(a+b+c)(a+b-y)+2cy]\times$$
$$\times\{[-2(a+b+c)(a+b-y)-2cy](a+b+c)(a+c-z)^2$$
$$+[2(a+b+c)(a+c-z)+2bz](a+b+c)(a+b-y)^2\}=0$$

oder, wenn der gemeinschaftliche Factor $a+b+c$ wegfällt

Digitized by Google

$$(a+b+c)(a+c-z)^2-(a+b+c)(a+b-y)^2]^2$$
$$-2\{(a+b+c)[a+b-y-(a+c-z)]-2bz+2cy\}\times$$
$$\times 2\{[-(a+b+c)(a+b-y)-2cy](a+c-z)^2+[(a+b+c)(a+c-z)$$
$$+2bz](a+b-y)^2\}=0$$

oder

$$[a+b+c]^2[2a+b+c-(y+z)]^2[(y-z)-(b-c)]^2$$
$$-4\{(a+b+c)[(y-z)-(b-c)]+2(bz-cy)\}\times$$
$$\times\{(a+b+c)(a+b-y)(a+c-z)[(y-z)-(b-c)]+2cy(a+c-z)^2$$
$$-2bz(a+b-y)^2\}=0$$

Diese Gleichung werde nun so umgestaltet, dass die unbekannten Grössen y und z überall entweder als die Summe $y+z$, oder als die Differenz $y-z$ auftreten. Dies geschieht, indem man setzt

$$\left.\begin{aligned}2y&=(y+z)+(y-z)\\2z&=(y+z)-(y-z)\end{aligned}\right\}\qquad(4)$$

also

$$\begin{aligned}2(a+b-y)&=2a+2b-(y+z)-(y-z)\\2(a+c-z)&=2a+2c-(y+z)-(y-z)\\2(bz-cy)&=(b-c)(y+z)-(b+c)(y-z)\end{aligned}$$

Daher ist nun

$$[a+b+c][2a+b+c-(y+z)]^2[(y-z)-(b-c)]^2$$
$$-\{(a+b+c)[(y-z)-(b-c)]+(b-c)(y+z)-(b+c)(y-z)\}\times$$
$$\times\{(a+b+c)[2a+2b-(y+z)-(y-z)][2a+2c-(y+z)$$
$$+(y-z)][(y-z)-(b-c)]$$
$$+c[(y+z)+(y-z)][2a+2c-(y+z)+(y-z)]^2$$
$$-b[(y+z)-(y-z)][2a+2b-(y+z)-(y-z)]^2\}=0$$

oder, indem man diese Gleichung für eine weitere Umformung geeignet macht,

$$0=[a+b+c]^2[2a+b+c-(y+z)]^2[(y-z)-(b-c)]^2$$
$$-\{(a+b+c)[(y-z)-(b-c)]+(b-c)(y+z)-(b+c)(y-z)\}\times$$
$$\times\{(a+b+c)[2a+b+c-(y+z)+(b-c)-(y-z)][2a+b+c-(y+z)$$
$$-(b-c)+(y-z)]\times[(y-z)-(b-c)]$$
$$+c[(y+z)+(y-z)][2a+b+c-(y+z)-(b-c)+(y-z)]^2$$
$$-b[(y+z)-(y-z)][2a+b+c-(y+z)+(b-c)-(y-z)]^2\}$$

Setzt man nun

$$\left.\begin{aligned}y+z&=a+b+c-p\\y-z&=q\end{aligned}\right\}\qquad(5$$

so folgt hieraus weiter

$$
\begin{aligned}
0 = {} & [a+b+c]^2[a+p]^2[q-b+c]^2 \\
& - \{(a+b+c)[q-b+c]+(b-c)[a+b+c-p]-(b+c)q\}\times \\
& \times \{(a+b+c)[a+p+b-c-q][a+p-(b-c-q)][q-b+c] \\
& \quad +c[a+b+c-p+q][a+p-(b-c-q)]^2 \\
& \quad -b[a+b+c-p-q][a+p+(b-c-q)]^2\} \qquad (6)
\end{aligned}
$$

oder, wenn der erste Teil der Abkürzung wegen vorläufig durch A bezeichnet und der zweite Teil weiter umgeformt wird

$$
\begin{aligned}
0 = {} & A-\{aq-p(b-c)\}\{(a+b+c)[a+p+b-c-q][a+p-(b-c-q)]\times \\
& \qquad \times[q-b+c] \\
& \quad +c[a+b+c-p+q][a+p-(b-c-q)]^2 \\
& \quad -b[a+b+c-p-q][a+p+b-c-q]^2\}
\end{aligned}
$$

oder

$$
\begin{aligned}
0 = {} & A+\{p(b-c)-aq\}\times \\
& \times \{(a+b+c)(q-b+c)((a+p)^2-(b-c-q)^2] \\
& + c(a+b)[a+p-b+c+q]^2+c(c-p+q)[a+p-b+c+q]^2 \\
& - b(a+c)[a+p+b-c-q]^2-b(b-p-q)[a+p+b-c-q)^2\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
0 = {} & A+\{p(b-c)-aq\}\times \\
& \times \{aq[(a+p)^2-(b-c-q)^2]+[q(b+c)+(a+b+c)(c-b)][a+p]^2 \\
& \qquad -[q(b+c)+(a+b+c)(c-b)][b-c-q]^2 \\
& + c(a+b)[a+p-b+c+q]^2+(c^2-cp+cq)[a+p]^2 \\
& \qquad +(c^2-cp+cq)[b-c-q]^2 \\
& - b(a+c)[a+p+b-c-q]^2-(b^2-bp-bq)[a+p]^2 \\
& \qquad -(b^2-bp-bq)[b-c-q]^2 \\
& \quad -2(c^2-cp+cq)(a+p)(b-c-q) \\
& \quad -2(b^2-bp-bq)(a+p)(b-c-q)\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
0 = {} & A+\{p(b-c)-aq\}\times \\
& \times\{[p(b-c)-aq][(a+p)^2-(b-c-q)^2] \\
& \quad +[2q(b+c)+(a+b+c)(c-b)+c^2-b^2][a+p]^2 \\
& \quad +[(a+b+c)(b-c)+c^2-2cp-b^2+2bp][b-c-q]^2 \\
& + c(a+b)[a+p-b+c+q]^2 \\
& - b(a+c)[a+p+b-c-q]^2 \\
& \quad -2[c^2+b^2-p(b+c)+(c-b)q](a+p)(b-c-q)\} \qquad (7
\end{aligned}
$$

Die in dem grossen Factor rechts stehenden 3 Teile können folgendermassen weiter umgestaltet werden:

$$+[2q(b+c)+ac-ab+2c^2-2b^2](a+p)^2$$
$$+[ab-ac+2p(b-c)](b-c-q)^2$$
$$+[p(b+c)+q(b-c)-b^2-c^2]\times 2(a+p)(b-c-q)$$

oder

$$=[2(b+c)(q-b+c)+ac-ab](a+p)^2$$
$$+[2p(b-c)+ab-ac](b-c-q)^2$$
$$+[p(b+c)+(b-c)(q-b+c)-2bc]\times 2(a+p)(b-c-q)$$

oder

$$=+[2(b+c)(q-b+c)a+2(b+c)(q-b+c)p](a+p)$$
$$+(ac-ab)[(a+p)^2-(b-c-q)^2]$$
$$+[2p(b-c)](b-c-q)^2$$
$$+[p(b+c)-(b-c)(b-c-q)-2bc]2(a+p)(b-c-q)$$

oder, weil sich einige Teile gegenseitig aufheben,

$$=+[-2a(b+c)(b-c-q)(a+p)]+(ac-ab)[(a+p)^2-(b-c-q)^2]$$
$$+[2p(b-c)](b-c-q)^2$$
$$+[-(b-c)(b-c-q)-2bc]2(a+p)(b-c-q)$$

oder

$$=-2a(b+c)(a+p)(b-c-q)+(ac-ab)[(a+p)^2-(b-c-q)^2]$$
$$+2p(b-c)(b-c-q)^2$$
$$-2a(b-c)(b-c-q)^2-2p(b-c-q)^2-2bc\,.\,2(a+p)(b-c-q)$$

oder

$$=-2a(b+c)(a+p)(b-c-q)+(ac-ab)[(a+p)^2+(b-c-q)^2]$$
$$-2bc\,.\,2(a+p)(b-c-q)$$

oder

$$=(ac+bc)[(a+p)^2-2(a+p)(b-c-q)+(b-c-q)^2]$$
$$-(ab+bc)[(a+p)^2+2(a+p)(b-c-q)+(b-c-q)^2]$$

oder

$$=c(a+b(a+p-(b-c-q)]^2$$
$$-b(a+b)[a+p+(b-c-q)]^2$$

Die Gleichung (6), resp. (7) lässt sich nun folgendermassen schreiben:

$$\begin{aligned}0 = \quad & (a+b+c)^2(a+p)^2(b-c-q)^2 \\ & + \{p(b-c)-aq\}\{[p(b-c)+aq][(a+p)^2-(b-c-q)^2] \\ & \qquad +2(a+b)c[a-b+c+p+q]^2 \\ & \qquad -2(a+c)b[a+b-c+p-q]^2\}\end{aligned}$$

oder weiter entwickelt

$$\left.\begin{aligned}0 = \quad & (a+b+c)^2(a^2+2ap+p^2)[b-c)^2-2(b-c)q+q^2] && (\alpha) \\ & +\{(b-c)^2p^2-a^2q^2\}\{[a^2-(b-c)^2+2ap+2(b-c)q && (\beta) \\ & \qquad +p^2-q^2\} \\ & +2(a+b)c[p(b-c)-aq][(a-b+c)^2+2(a-b+c)p && (\gamma) \\ & \qquad +2a-b+c)q+p^2+2pq+q^2] \\ & -2(a+c)b[p(b-c-aq][(a+b-c)^2+2(a+b-c)p && (\delta) \\ & \qquad -2(a+b-c)q+p^2-2pq+q^2]\end{aligned}\right\} \quad (8)$$

Die Entwicklung dieser Gleichung führt auf die Form:

$$Ap^4+A'q^4+Bp^2q^2+Cp^3+C'q^3+Dp^2q+D'pq^2+Ep^2+E'q^2+Fpq \\ +Gp+G'q+H=0$$

Als Coefficienten ergeben sich:

$A = (b-c)$ aus (β)

$A' = a^2$ aus (β)

$$B = \left.\begin{aligned}&(a+b+c)^2 && \text{aus } (\alpha) \\ &-(b-c)^2 && \text{,, } (\beta) \\ &-a^2 && \text{,, } (\beta)\end{aligned}\right\} = -2[(a+b)c+(a+c)b]$$

$$C = \left.\begin{aligned}&2a(b-c)^2 && \text{aus } (\beta) \\ &+2(a+b)c(b-c) && \text{,, } (\gamma) \\ &-2(a+c)b(b-c) && \text{,, } (\delta)\end{aligned}\right\} = 0$$

$$C' = \left.\begin{aligned}&-2a^2(b-c) && \text{aus } (\beta) \\ &-2(a+b)ca && \text{,, } (\gamma) \\ &+2(a+c)ba && \text{,, } (\delta)\end{aligned}\right\} = 0$$

$$D = \left.\begin{aligned}&-2(a+b+c)^2(b-c) && \text{aus } (\alpha) \\ &+2(b-c)^2(b-c) && \text{,, } (\beta) \\ &+4(a+b)c(b-c) && \text{,, } (\gamma) \\ &-2(a+b)ca && \text{,, } (\gamma) \\ &+4(a+c)b(b-c) && \text{,, } (\delta) \\ &+2(a+c)ba && \text{,, } (\delta)\end{aligned}\right\} = 0$$

$$D' = \left.\begin{array}{lll} (a+b+c)^2 \,.\, 2a & \text{aus} & (\alpha) \\ -2a^3 & ,, & (\beta) \\ +2(a+b)c(b-c) & ,, & (\gamma) \\ -4(a+b)ca & ,, & (\gamma) \\ -2(a+c)b(b-c) & ,, & (\delta) \\ -4(a+c)ba & ,, & (\delta) \end{array}\right\} = 0$$

$$E = \left.\begin{array}{lll} (a+b+c)^2(b-c)^2 & \text{aus} & (\alpha) \\ +(b-c)^2[a^2-(b-c)^2] & ,, & (\beta) \\ +4(a+b)c(b-c)(a-b+c) & ,, & (\gamma) \\ -4(a+c)b(b-c)(a+b-c) & ,, & (\delta) \end{array}\right\}$$

$$= -2(b-c)^2[(a+b)(a+c)+bc]$$

$$E' = \left.\begin{array}{lll} (a+b+c)^2a^2 & \text{aus} & (\alpha) \\ -a^2[a^2-(b-c)^2] & ,, & (\beta) \\ -4(a+b)ca(a-b+c) & ,, & (\gamma) \\ -4(a+c)ba(a+b-c) & ,, & (\delta) \end{array}\right\} = -2a^2[(a+b)b+(a+c)c]$$

$$F = \left.\begin{array}{lll} -4(a+b+c)^2a(b-c) & \text{aus} & (\alpha) \\ +4(a+b)c(b-v)(a+b+c) & ,, & (\gamma) \\ -4(a+b)ca(a-b+c) & ,, & (\gamma) \\ +4(a+c)b(b-c)(a+b-c) & ,, & (\delta) \\ +4(a+c)ba(a+b-c) & ,, & (\delta) \end{array}\right\} = 0$$

$$G = \left.\begin{array}{lll} 2(a+b+c)^2a(b-c) & \text{aus} & (\alpha) \\ +2(a+b)c(b-c)(a-b+c)^2 & ,, & (\gamma) \\ -2(a+c)b(b-c)(a+b-c)^2 & ,, & (\delta) \end{array}\right\} = 0$$

$$G' = \left.\begin{array}{lll} -2(a+b+c)^2a^2(b-c) & \text{aus} & (\alpha) \\ -2(a+b)ca(a-b+c)^2 & ,, & (\gamma) \\ +2(a+c)ba(a+b-c)^2 & ,, & (\delta) \end{array}\right\} = 0$$

$$H = (a+b+c)^2a^2(b-c)^2 \quad \text{aus } (\alpha)$$

Die Gleichung (8) verwandelt sich demnach in

$$\begin{aligned} 0 = {} & (b-c)^2p^4+a^2q^4+2[(a+b)c+(a+c)b]p^2q^2 \\ & -2(b-c)^2[(a+b)(a+c)+bc]p^2-2a^2[(a+b)b+(a+c)c]q^2 \\ & +a^2(b-c)^2(a+b+c)^2 \end{aligned} \tag{9}$$

Macht man die Substitution (5) auch in Gleichung (1), so geht diese über in

$$4a\left(\frac{a+b+c-p+q}{2}\right)\left(\frac{a+b+c-p-q}{2}\right)$$
$$= (a+b+c)[b+c-a-b-c+p]^2$$

oder

$$a[(a+b+c-p)^2-q^2] = (a+b+c)(p-a)^2$$

oder

$$a(b+c)(a+b+c) = aq+^2(b+c)p^2 \qquad (1($$

Substituirt man den hieraus für q^2 folgenden Wert in die Gleichung (9), so folgt zunächst:

$$\begin{aligned}&(b-c)^2p^4+[a(b+c)(a+b+c)-(b+c)p^2]^2\\&+2[(a+b)c+(a+c)b[p^2[(b+c)(a+b+c)-\frac{(b+c)}{a}p^2]\\&-2(b-c)^2[(a+b)(a+c)+bc]p^2\\&-2a[(a+b)b+(a+c)c][a(b+c)(a+b+c)-(b+c)p^2]\\&+a^2(b-c)^2(a+b+c)^2 = 0 \qquad (11\end{aligned}$$

Mit a multiplicirt kommt

$$\begin{aligned}&\{a(b-c)^2+a(b+c)^2-2(b+c)[(a+b)c+(a+c)b]\}p^4\\&-\{2a^2(b+c)^2(a+b+c)-2a(b+c)(a+b+c)](a+b)c+(a+c)b]\\&+2a(b-c)^2[(a+b)(a+c)+bc]-2a^2(b+c)[(a+b)b+(a+c)c]\}p^2\\&+a^3(b+c)^2(a+b+c)^2-2a^3(b+c)(a+b+c)[(a+b)b+(a+c)c]\\&+a^3(b-c)^2(a+b+c)^2 = 0\end{aligned}$$

oder

$$-4bc[a+b+c]p^4+8abc[a^2+ab+ac+2bc]p^2$$
$$+4a^4bc(a+b+c) = 0$$

oder

$$p^4-2a\frac{[(a+b)(a+c)+bc]}{a+b+c}p^2+a^4 = 0$$

Hieraus ergiebt sich

$$p^2=\frac{a[(a+b)(a+c)+bc]\pm\sqrt{a^2[(a+b)(a+c)+bc]^2-a^4(a+b+c)^2}}{a+b+c}$$

$$= \frac{a}{a+b+c}[(a+b)(a+c)+bc\pm 2\sqrt{(a+b)(a+c)bc}] \qquad (13$$

oder

$$p^2 = \frac{a}{a+b+c}[\sqrt{(a+b)(a+c)}\pm\sqrt{bc}]^2$$

daher

Digitized by Google

$$p^2 = \pm\sqrt{\frac{a}{a+b+c}}\left[\sqrt{(a+b)(a+c)} \pm \sqrt{bc}\right] \tag{14}$$

Um nun ferner q zu bestimmen, gehe man auf Gleichung (10) zurück. Hierin ist

$$aq^2 = (b+c)\left[a(a+b+c) - p^2\right];$$

also nach (13)

$$aq^2 = (b+c)\left\{a(a+b+c) - \frac{a}{a+b+c}\left[(a+b)(a+c)+bc \pm 2\sqrt{(a+b)(a+c)bc}\right]\right\}$$

$$q^2 = \frac{(b+c)}{a+b+c}\left\{(a+b+c)^2 - (a+b)(a+c) - bc \mp 2\sqrt{(a+b)(a+c)bc}\right\}$$

$$= \frac{b+c}{a+b+c}\left\{(a+b)b + (a+c)c \mp 2\sqrt{(a+b)(a+c)bc}\right\}$$

also

$$q = \pm\sqrt{\frac{b+c}{a+b+c}}\left[\sqrt{(a+b)b} \mp \sqrt{(a+c)c}\right] \tag{15}$$

Da jede der Grössen p und q in Betracht der Vorzeichen 4 verschiedene Werte hat, von den Vorzeichen innerhalb der Klammern aber entweder die beiden oberen oder die beiden unteren zugleich gelten, so ergeben sich für jene Grössen 8 Wertpaare, die sich folgendermassen schreiben lassen:

$$\left.\begin{aligned} p &= \pm\sqrt{\frac{a}{a+b+c}}\left[\sqrt{(a+b)(a+c)} + \sqrt{bc}\right] \\ q &= \pm\sqrt{\frac{b+c}{a+b+c}}\left[\sqrt{(a+b)b} - \sqrt{(a+c)c}\right]. \end{aligned}\right\} \text{ 4 Paare} \tag{16}$$

und

$$\left.\begin{aligned} p &= \pm\sqrt{\frac{a}{a+b+c}}\left[\sqrt{(a+b)(a+c)} - \sqrt{bc}\right] \\ q &= \pm\sqrt{\frac{b+c}{a+b+c}}\left[\sqrt{(a+b)b} + \sqrt{(a+c)c}\right] \end{aligned}\right\} \text{ 4 Paare} \tag{17}$$

Oder, wenn zur Abkürzung

$$\left.\begin{aligned} &\sqrt{\frac{a(a+b)(a+c)}{a+b+c}} = \mathfrak{A}, \quad \sqrt{\frac{b(b+a)(b+c)}{a+b+c}} = \mathfrak{B}, \\ &\sqrt{\frac{c(c+a)(c+b)}{a+b+c}} = \mathfrak{C}, \quad \sqrt{\frac{abc}{a+b+c}} = r \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

gesetzt wird,

$$\left.\begin{aligned} p &= \pm(\mathfrak{A}+r) \\ q &= \pm(\mathfrak{B}-\mathfrak{C}) \end{aligned}\right\} \text{ 4 Paare} \qquad (19)$$

und

$$\left.\begin{aligned} p &= \pm(\mathfrak{A}-r) \\ q &= \pm(\mathfrak{B}+\mathfrak{C}) \end{aligned}\right\} \text{ 4 Paare} \qquad (20)$$

Aus den Gleichungen (5) ergiebt sich durch einfache Rechnung

$$\left.\begin{aligned} 2y &= a+b+c-p+q \\ 2z &= a+b+c-p-q \end{aligned}\right\} \qquad (21)$$

und mit Hülfe der Gleichungen (19), wenn darin beispielsweise die beiden oberen Vorzeichen gelten:

$$\begin{aligned} 2y &= a+b+c-r-(\mathfrak{A}-\mathfrak{B}-\mathfrak{C}) \\ 2z &= a+b+c-r-(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}-\mathfrak{C}) \end{aligned}$$

Alle 8 Wertpaare von y und z sind, wenn zur weiteren Abkürzung

$$a+b+c=s$$

gesetzt wird, folgende:

$$\left.\begin{aligned} 2y_1 &= s-r-(\mathfrak{A}-\mathfrak{B}+\mathfrak{C}) & 2z_1 &= s-r-(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}-\mathfrak{C}) \\ 2y_2 &= s-r-(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}-\mathfrak{C}) & 2z_2 &= s-r-(\mathfrak{A}-\mathfrak{B}+\mathfrak{C}) \\ 2y_3 &= s+r+(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}-\mathfrak{C}) & 2z_3 &= s+r+(\mathfrak{A}-\mathfrak{B}+\mathfrak{C}) \\ 2y_4 &= s+r+(\mathfrak{A}-\mathfrak{B}+\mathfrak{C}) & 2z_4 &= s+r+(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}-\mathfrak{C}) \end{aligned}\right\} \text{ aus (19)}$$

$$\left.\begin{aligned} 2y_5 &= s+r+(-\mathfrak{A}+\mathfrak{B}+\mathfrak{C}) & 2z_5 &= s+r-(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}+\mathfrak{C}) \end{aligned}\right\} \text{ aus (20)}$$

u. s. w.

Um nun noch die hierzu gehörigen Werte von x zu finden, erwäge man, dass, wenn am Anfange der Rechnung statt x etwa z eliminirt worden wäre, sich statt der Gleichung (21) folgende Gleichungen ergeben hätten:

$$\left.\begin{aligned} 2y &= a+b+c-p'+q' \\ 2x &= a+b+c-p'-q' \end{aligned}\right\} \qquad (22)$$

und statt der Gleichungen (19) hätte man erhalten:

$$\begin{aligned} p' &= \pm(\mathfrak{C}+r) \\ q' &= \pm(\mathfrak{B}-\mathfrak{A}) \end{aligned}$$

Demnach ist

$$\begin{aligned} 2y &= s-r-(\mathfrak{A}-\mathfrak{B}+\mathfrak{C}) & 2x &= s-r-(-\mathfrak{A}+\mathfrak{B}+\mathfrak{C}) \\ 2y &= s-r-(-\mathfrak{A}+\mathfrak{B}+\mathfrak{C}) & 2x &= s-r-(\mathfrak{A}-\mathfrak{B}+\mathfrak{C}) \\ 2y &= s+r+(-\mathfrak{A}+\mathfrak{B}+\mathfrak{C}) & 2x &= s+r+(\mathfrak{A}-\mathfrak{B}+\mathfrak{C}) \\ 2y &= s+r+(\mathfrak{A}-\mathfrak{B}+\mathfrak{C}) & 2x &= s+r+(-\mathfrak{A}+\mathfrak{B}+\mathfrak{C}) \end{aligned}$$

u. s. w.

Hiervon stimmt der erste Wert von $2y$ mit jenem von $2y_1$ überein, der dritte mit $2y_3$, der vierte mit $2y_4$ u. s. w.

Demnach sind die 8 Wertsysteme:

$$\begin{aligned}
2x_1 &= s-t-(-\mathfrak{A}+\mathfrak{E}+\mathfrak{C}) & 2y_1 &= s-r-(\mathfrak{A}-\mathfrak{B}+\mathfrak{C})\\
2x_2 &= s-r+(\ \mathfrak{A}+\mathfrak{B}+\mathfrak{C}) & 2y_2 &= s-r-(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}-\mathfrak{C})\\
2x_3 &= s+r-(\ \mathfrak{A}+\mathfrak{B}+\mathfrak{C}) & 2y_3 &= s+r+(\mathfrak{A}+\mathfrak{E}-\mathfrak{C})\\
2x_4 &= s+r+(-\mathfrak{A}+\mathfrak{E}+\mathfrak{B}) & 2y_4 &= s+t+(\mathfrak{A}-\mathfrak{E}+\mathfrak{C})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2z_1 &= s-r-(\ \mathfrak{A}+\mathfrak{B}-\mathfrak{C})\\
2z_2 &= r-r-(\ \mathfrak{A}-\mathfrak{B}+\mathfrak{C})\\
2z_3 &= s+r+(\ \mathfrak{A}-\mathfrak{B}-\mathfrak{C})\\
2z_4 &= s+r+(-\mathfrak{A}+\mathfrak{B}+\mathfrak{C})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2x_5 &= s+r+(\mathfrak{A}-\mathfrak{E}+\mathfrak{C}) & 2y_5 &= s+r-(\ \mathfrak{A}+\mathfrak{B}+\mathfrak{C})\\
2x_6 &= s+r+(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}-\mathfrak{C}) & 2y_6 &= s+r-(\ \mathfrak{A}+\mathfrak{B}+\mathfrak{C})\\
2x_7 &= s-r-(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}-\mathfrak{C}) & 2y_7 &= s-r+(\ \mathfrak{A}+\mathfrak{E}+\mathfrak{C})\\
2x_8 &= s-r-(\mathfrak{A}-\mathfrak{B}+\mathfrak{C}) & 2y_8 &= s-c-(-\mathfrak{A}+\mathfrak{B}+\mathfrak{C})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2z_5 &= z+r+(-\mathfrak{A}+\mathfrak{E}+\mathfrak{C})\\
2z_6 &= s+r+(-\mathfrak{A}+\mathfrak{B}+\mathfrak{C})\\
2z_7 &= s-r-(-\mathfrak{A}+\mathfrak{B}+\mathfrak{C})\\
2z_8 &= s-r+(\ \mathfrak{A}+\mathfrak{E}+\mathfrak{C})
\end{aligned}$$

(23)

B. Auflösung von C. Davids.

Aus der dritten Grundgleichung folgt

$$\pm\sqrt{\frac{4cxy}{a+a+c}} = a+b-x-y \qquad (4)$$

oder

$$x \pm 2\sqrt{\frac{cy}{a+b+c}}\cdot\sqrt{x} = a+b-y, \quad \text{quadratisch behandelt}$$

$$\sqrt{x} \pm \sqrt{\frac{cy}{a+b+c}} = \pm\sqrt{a+b-y+\frac{cy}{a+b+c}}$$

oder

Ebenso
$$\left.\begin{aligned}\sqrt{a+b+c}\,.\,\sqrt{x} &= \pm\sqrt{cy}\pm\sqrt{(a+b)(a+b+c-y)}\\ \sqrt{a+b+c}\,.\,\sqrt{x} &= \pm\sqrt{bz}\pm\sqrt{(a+c)(a+b+c-z)}\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

aus der zweiten Grundgleichung.

Folglich ist

$$\pm\sqrt{cy}\pm\sqrt{(a+b)(a+b+c-y)} = \pm\sqrt{bz}\pm\sqrt{(a+c)(a+b+c-z)} \quad (6)$$

$$\pm\sqrt{cy}\pm\sqrt{bz} = \pm\sqrt{(a+b)(a+b+c-y}\pm\sqrt{(a+c)(a+b+c-z)} \text{ quadr.}$$

$$cy+bz\pm 2\sqrt{bcyz} = (a+b)(a+b+c-y)+(a+c)(a+b+c-z) \pm 2\sqrt{(a+b)(a+c)(a+b+c-y)(a+b+c-z)}$$

$$\pm 2\sqrt{bcyz} = (a+b+c)(2a+b+c-y-z) \pm 2\sqrt{(a+b)(a+c)}\,\sqrt{(a+b+c)^2-(a+b+c)(y+z)+yz} \quad (7)$$

oder, wenn zur Umformung Gleichung (1) benutzt wird

$$\pm 2\sqrt{be\left(\frac{a+b+z}{4a}\right)(b+c-y-z)^2} = (a+b+c)(2a+b+c-y-z)$$

$$\pm 2\sqrt{(a+b)(a+c)}\sqrt{\{(a+b+c)^2-(a+b+c)(y+z)+ + \left(\frac{a+b+c}{4a}\right)(b+c-y-z)^2\}}$$

$$\pm[b+c-y-z]\sqrt{\frac{bc(a+b+c)}{a}} = (a+b+c)(2a+b+c-y-z)$$

$$\pm 2\sqrt{\frac{(a+b)(a+c)(a+b+c)}{4a}}\{\sqrt{4a(a+b+c)-4a(y+z)+(b+c-y-z)^2}$$
$$= \sqrt{4a(a+b+c)+(b+c)^2-2(2a+b+c)(y+z)+(y+z)^2}$$
$$= \sqrt{(2a+b+c)^2-2(2a+b+c)(y+z)+(y+z)^2}\}$$

Also

$$\pm[b+c-y-z]\sqrt{\frac{bc(a+b+c)}{a}} = (a+b+c)(2a+b+c-y-z) \pm\sqrt{\frac{(a+b)(a+c)(a+b+c)}{a}}\,.\,[\pm(2a+b+c)\mp(y+z)] \quad (8)$$

$$\pm[b+c-y-z]\sqrt{\frac{bc(a+b+c)}{a}} = (a+b+c)(2a+b+c-y-z) \pm(2a+b+c-y-z)\sqrt{\frac{(a+b)(a+c)(a+b+c)}{a}} \quad (9)$$

Digitized by Google

Wird diese Gleichung durch $a+b+c$ dividirt und mit a multiplicirt, so kommt

$$\pm[b+c-y-z]\sqrt{\frac{abc}{a+b+c}} = a(2a+b+c-y-z) \pm (2a+b+c-y-z)\sqrt{\frac{a(a+b)(a+c)}{a+b+c}}$$

und hierin

$$\sqrt{\frac{abc}{a+b+c}} = r \quad \text{und} \quad \sqrt{\frac{a(a+b)(a+c)}{a+b+c}} = \mathfrak{A}$$

gesetzt, giebt

$$\pm[b+c-y-z]r = 2a(a \pm \mathfrak{A}) + [b+c-y-z][a \pm \mathfrak{A}) \tag{10}$$

$$[y+z-b-c](a \pm \mathfrak{A}) \pm (b+c-y-z)r = 2a(a \pm \mathfrak{A})$$

$$[y+z-b-c][a \pm \mathfrak{A} \pm r] = 2a(a \pm \mathfrak{A})$$

$$y+z) = b+c+\frac{2a(a \pm \mathfrak{A})}{a \pm \mathfrak{A} \pm r)} \tag{11}$$

Nach dem Gange der Rechnung' können in (9) die Vorzeichen beliebig wechseln; aber in (10), und also auch in (11), muss die Einschränkung gemacht werden, dass die Vorzeichen von $\mathfrak{A}$ in beiden Teilen mit einander correspondiren. Demnach hat $y+z$ in Gleichung (11) höchstens 4 Werte, wie dieses auch die Gleichung (9) andeutete; nämlich:

$$\left.\begin{aligned} y+z &= b+c+\frac{2a(a+\mathfrak{A})}{a+\mathfrak{A}+r} \\ y+z &= b+c+\frac{2a(a+\mathfrak{A})}{a+\mathfrak{A}-r} \\ y+z &= b+c+\frac{2a(a-\mathfrak{A})}{a-\mathfrak{A}+r} \\ y+z &= b+c+\frac{2a(a-\mathfrak{A})}{a-\mathfrak{A}-r} \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Die letzten Glieder dieser vier Gleichungen können nun weiter umgeformt werden, wenn berücksichtigt wird, dass

$$\mathfrak{A}^2 = \frac{a(a+b)(a+c)}{a+b+c}, \qquad r^2 = \frac{abc}{a+b+c}$$

und also

$$\mathfrak{A}^2 - r^2 = a^2$$

ist. Es ist nämlich

$$2a(a+\mathfrak{A}) = 2a^2+2a\mathfrak{A} = a^2+\mathfrak{A}^2-r^2+2a\mathfrak{A} = (a+\mathfrak{A}+r)(a+\mathfrak{A}-r),$$

und

$$2a(a-\mathfrak{A}) = 2a^2-2a\mathfrak{A} = a^2+\mathfrak{A}^2-r^2-2a\mathfrak{A} = (a-\mathfrak{A}+r)(a-\mathfrak{A}-r)$$

Die vier Werte von $y+z$ sind demnach:

$$\left.\begin{aligned} y+z &= a+b+c-r+\mathfrak{A} \\ y+z &= a+b+c+r+\mathfrak{A} \\ y+z &= a+b+c-r-\mathfrak{A} \\ y+z &= a+b+c+r-\mathfrak{A} \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

Zwar lassen sich nun auch die Gleichungen für $x+y$ und für $x+z$ leicht hinschreiben; allein sie können zur Auffindung der Werte für x, y, z nicht weiter benutzt werden, da man nicht weiss, welche 3 von diesen 12 Gleichungen man jedesmal herauszugreifen hat, um überhaupt richtige Werte und demnächst Wertsysteme zu finden. Man ist daher genötigt, zu Gleichung (1) zurückzukehren. Setzen wir darin

$$a+b+c = s$$

und für $y+z$ den ersten Wert (13), also

$$y+z = s-r+\mathfrak{A} \qquad (14)$$

so kommt

$$4ayz = s[-a+r-\mathfrak{A}]^2 = s[a-r+\mathfrak{A}]^2$$

oder

$$4yz = s\left[\sqrt{a}-\sqrt{\frac{bc}{a+b+c}}+\sqrt{\frac{(a+b)(a+c)}{a+b+c}}\right]^2$$

$$4yz = s\left[a+\frac{bc}{a+b+c}+\frac{(a+b)(a+c)}{a+b+c}-2\sqrt{\frac{abc}{a+b+c}}\right.$$
$$\left.+2\sqrt{\frac{a(a+b)(a+c)}{a+b+c}}-2\sqrt{\frac{bc(a+b)(a+c)}{a+b+c}}\right]$$

$$= s\left[a+\frac{bc}{a+b+c}+a+\frac{bc}{a+b+c}-2r+2\mathfrak{A}\right.$$
$$\left.-2\sqrt{\frac{bc(a+b)(a+c)}{a+b+c}}\right]$$

$$= 2sa+2bc-2s(s-\mathfrak{A})-\frac{2a\sqrt{bc(a+b)(a+c)}}{a+b+c}$$
$$-\frac{2(b+c)\sqrt{bc(a+b)(a+c)}}{a+b+c}$$

Es ist aber

$$b^2 = \mathfrak{A}^2 - r^2, \quad c^2 = \mathfrak{C}^2 - r^2$$

und demnach

$$4yz = 2sa + b^2 + c^2 + 2bc - \mathfrak{B}^2 + r^2 - \mathfrak{C}^2 + r^2 - 2s(r - \mathfrak{A}) - 2r\mathfrak{A} - 2\mathfrak{B}\mathfrak{C}$$

$$= 2a(a+b+c) + (b+c)^2 + 2r^2 - 2s(s - \mathfrak{A}) - 2r\mathfrak{A} - (\mathfrak{B}+\mathfrak{C})^2$$

{erster Term $= a^2 + a^2 + 2a(b+c)$}

$$= \mathfrak{A}^2 - r^2 + s^2 + 2r^2 - 2sr + 2s\mathfrak{A} - 2r\mathfrak{A} - (\mathfrak{B}+\mathfrak{C})^2$$

$$= s^2 + r^2 + \mathfrak{A}^2 + 2s\mathfrak{A} - 2sr - 2r\mathfrak{A} - (\mathfrak{B}+\mathfrak{C})^2$$

$$4yz = (s - r + \mathfrak{A})^2 - (\mathfrak{B}+\mathfrak{C})^2$$

Dies von

$$(y+z)^2 = (s - r + \mathfrak{A})^2 \tag{14}$$

subtrahirt:

$$y^2 - 2yz + z^2 = (\mathfrak{B}+\mathfrak{C})^2$$

$$\left.\begin{aligned} y - z &= \pm(\mathfrak{B}+\mathfrak{C}) \\ y + z &= s - r + \mathfrak{A} \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Also

$$2y_1 = s - r + \mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C} \quad \text{und} \quad 2y_2 = s - r + \mathfrak{A} - \mathfrak{B} - \mathfrak{C}$$

und

$$2z_1 = s - r + \mathfrak{A} - \mathfrak{B} - \mathfrak{C} \quad \text{und} \quad 2z_2 = s - r + \mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C}$$

Verfährt man mit der zweiten Gleichung in (13) auf gleiche Weise, so erhält man

$$4yz = (s + r + \mathfrak{A})^2 - (\mathfrak{B} - \mathfrak{C})^2$$

und es ergeben sich dann zwei andere Wertpaare für y und z nämlich

$$2y_3 = s + r + \mathfrak{A} + \mathfrak{B} - \mathfrak{C} \quad \text{und} \quad 2y_4 = s + r + \mathfrak{A} - \mathfrak{B} + \mathfrak{C}$$
$$2z_3 = s + r + \mathfrak{A} - \mathfrak{B} + \mathfrak{C} \quad \text{und} \quad 2z_4 = s + r + \mathfrak{A} + \mathfrak{B} - \mathfrak{C}$$

u. s. w. Im ganzen ergeben sich 8 Wertpaare für y und z, wobei man bemerkt, dass alle 8 Werte von z mit den 8 Werten von y übereinstimmen. Dasselbe gilt natürlich auch in Bezug auf die Werte von x. Um nun noch diese, nämlich $x_1, x_2, x_3 \ldots$, auf dem kürzesten Wege zu bestimmen, setze man nach Analogie der Gleichungen (15)

$$y + x = s - r + \mathfrak{C}$$
$$y - x = \pm(\mathfrak{A} + \mathfrak{B})$$

daher

$$2y = s - r + \mathfrak{C} + \mathfrak{A} + \mathfrak{B} \quad \text{und} \quad 2y = s - r + \mathfrak{C} - \mathfrak{A} - \mathfrak{B}$$

und

$$2x = s - r + \mathfrak{C} - \mathfrak{A} - \mathfrak{B} \quad \text{und} \quad 2x = s - r + \mathfrak{C} + \mathfrak{A} + \mathfrak{B}$$

Der erste dieser Werte von $2y$ ist jener oben gefundene Wert von $2y_1$, und daher muss der darunter stehende Ausdruck auch der Wert von $2x_1$ sein. Um den anderen Wert von $2x$ registiren zu können, ist es erforderlich, auf dem oben gezeigten Wege noch y_5 oder y_6 . . . zu bestimmen; denn der Wert

$$2y = s - r - \mathfrak{A} - \mathfrak{B} + \mathfrak{C}$$

findet sich nicht unter den ersten vier Werten von y. Demnach ist nun das erste Wertsystem:

$$2x_1 = s - r - \mathfrak{A} - \mathfrak{B} + \mathfrak{C}, \quad 2y_1 = s - r + \mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C}$$
$$2z_1 = s - r + \mathfrak{A} - \mathfrak{B} - \mathfrak{C}$$

(in Uebereinstimmung mit dem 7ten Wertsystem von Herrn Dr. Amthor).

Es lassen sich nun leicht auch die übrigen Wertsysteme aufstellen.

Anmerkung 1. Hätte von Gleichung (7) an die Entwicklung einen anderen Verlauf genommen, wäre nämlich unter dem Wurzelzeichen rechts nicht yz, sondern $y+z$ entfernt worden, so hätte man erhalten:

$$\pm 2\sqrt{bcyz} = (a+b+c)(2a+b+c-y-z)$$
$$\pm 2\sqrt{(a+b)(a+c)}\left[\pm\sqrt{a(a+b+c)} \pm \sqrt{yz}\right]$$

und man hätte in der Weiterentwicklung auf diesem Wege auch zu Gleichung (11) gelangen können; aber man wäre über die Geltung der Vorzeichen im Unklaren geblieben. Durch eine vorläufige Untersuchung, die hier durch Andeutungen gegeben werden mag, kann allerdings jene die Vorzeichen in (11) betreffende Einschränkung gefunden werden.

Unter der Voraussetzung, dass a, b, c positive Grössen sind, kann z. B. in Gleichung (1) keine der beiden unbekannten Grössen y, z negativ sein; auch können nicht beide zugleich negativ sein. Ferner, keine dieser Grössen kann in dieser Gleichung über $a+b+c$ hinausgehen, und sollen auch die andern beiden Grundgleichungen gelten, so muss

$$y < a+b+c$$

und

$$z < a+b+c \text{ sein.}$$

Ferner: In Gleichung (7) können die Vorzeichen nicht beliebig gelten; es müssen z. B. Formen, wie

$$+d-e=+f+g$$

oder

$$-d+e=+f+g$$

ausgeschlossen werden. Ueberhaupt muss in diesen Formen das $-$ Zeichen, wenn es vorkommt, auf jeder Seite vorkommen, und zwar auf jeder Seite einmal, so dass die doppelten Vorzeichen in (7) mit einander correspondiren, denn es lässt sich nachweisen, dass Formen, wie

$$\pm 2\sqrt{bcyz} = (a+b+c)(2a+b+c \quad y-z)$$
$$\mp 2\sqrt{(a+b)(a+c)(a+b+c-y)(a+b+c-z)}$$

in welchen entweder die oberen oder die unteren Zeichen gelten sollen, nicht möglich sind.

Anmerkung 2. Benutzt man das erste Wertsystem zur Substituirung in den rechts stehenden Ausdrücken der Grundgleichungen, so ergeben sich durch einfache Rechnung auch folgende Resultate:

$$2x_1 = \frac{(-b+r+\mathfrak{B})(c-r+\mathfrak{C})}{a-r+\mathfrak{A}}\sqrt{\frac{a(a+b+c)}{bc}}$$

$$2y_1 = \frac{(a-r+\mathfrak{A})(c-r+\mathfrak{C})}{-b+r+\mathfrak{B}}\sqrt{\frac{b(a+b+c)}{ac}}$$

$$2z_1 = \frac{(a-r+\mathfrak{A})(-b+r+\mathfrak{B})}{c-r+\mathfrak{C}}\sqrt{\frac{c(a+b+c)}{ab}}$$

u. s. w.

Anmerkung 3. Es seien in einem Zahlenbeispiel

$$a = 840, \quad b = 660, \quad c = 1188$$

also

$$s = 2688, \quad r = \sqrt{\frac{abc}{a+b+c}} = 495$$

$$\mathfrak{A} = \sqrt{\frac{a(a+b)(a+c)}{a+b+c}} = 975, \quad \mathfrak{B} = \sqrt{\frac{b(b+a)(b+c)}{a+b+c}} = 825$$

$$\mathfrak{C} = \sqrt{\frac{c(c+a)(c+b)}{a+b+c}} = 1287$$

dann sind die 8 Wertsysteme in der von Herrn Dr. Amthor aufgestellten Ordnung:

$2x_1 = 1056$	$2y_1 = 756$	$2z_1 = 1680$
$2x_2 = 5280$	$2y_2 = 1680$	$2z_2 = 756$
$2x_3 = 96$	$2y_3 = 3696$	$2z_3 = 4620$
$2x_4 = 4320$	$2y_4 = 4620$	$2z_4 = 3696$
$2x_5 = 4620$	$2y_5 = 4320$	$2z_5 = 96$
$2x_6 = 3696$	$2y_6 = 96$	$2z_6 = 4320$
$2x_7 = 1680$	$2y_7 = 5280$	$2z_7 = 1056$
$2x_8 = 756$	$2y_8 = 1056$	$2z_8 = 5280$

Zweite Aufgabe.

II.

$$u = 2r - \frac{ry}{b} - \frac{rz}{c} \quad (1) \qquad au^2 = 2ryz + a(y^2 + z^2) \quad (4)$$

$$v = 2r - \frac{rz}{c} - \frac{rx}{a} \quad (2) \qquad bv^2 = 2rzx + b(z^2 + x^2) \quad (5)$$

$$w = 2r - \frac{rx}{a} - \frac{ry}{b} \quad (3) \qquad cw^2 = 2rxy + c(x^2 + y^2) \quad (6)$$

wobei

$$a^2b^2c^2 = r^2[a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 + 2rabc] \quad (7)$$

A. Auflösung von Herrn Dr. Amthor.

Eliminirt man u aus den Gleichungen (1) und (4), so kommt:

$$ar^2\left[4 + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - \frac{4y}{b} - \frac{4z}{c} + 2\frac{yz}{bc}\right] = 2ryz + a(y^2 + z^2)$$

oder, mit ab^2c^2 multiplicirt:

$$4a^2b^2c^2r^2 = a^2c^2y^2(b^2 - r^2) + a^2b^2z^2(c^2 - r^2) + 2rabcyz(bc - ar) + 4a^2bc^2r^2g + 4a^2b^2cr^2z$$

Sei nun

$$\left.\begin{aligned} ac\sqrt{b^2 - r^2}\,.\,y &= B - \eta \\ ab\sqrt{c^2 - r^2}\,.\,z &= C - \zeta \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

so folgt:

Digitized by Google

$$4a^2b^2c^2r^2 = \eta^2-2\eta B+B^2+\zeta^2-2\zeta C+C^2$$
$$+2rabc(bc - ar)\frac{(B-\eta)(C-\zeta)}{a^2bc\sqrt{b^2-r^2}\sqrt{c^2-r^2}}$$
$$+4a^2bc^2r^2\frac{B-\eta}{ac\sqrt{b^2-r^2}}+4a^2b^2cr^2\frac{C-\zeta}{ab\sqrt{c^2-r^2}}$$

oder

$$\left.\begin{aligned}4a^2b^2c^2r^2 = {}& \eta^2+\zeta^2-2\eta\left[B+\frac{C(bc-ar)r}{a\sqrt{b^2-r^2}\sqrt{c^2-r^2}}\right.\\ &\left.+\frac{2abcr^2}{\sqrt{b^2-r^2}}\right]-2\zeta\left[C+\frac{B(bc-ar)r}{a\sqrt{b^2-r^2}\sqrt{c^2-r^2}}\right.\\ &\left.+\frac{2abcr^2}{\sqrt{c^2-r^2}}\right]+\frac{2\eta\zeta(bc-ar)r}{a\sqrt{b^2-r^2}\sqrt{c^2-r^2}}\\ &+B^2+C^2+2BC\frac{(bc-ar)r}{a\sqrt{b^2-r^2}\sqrt{c^2-r^2}}\\ &+4B\frac{abcr^2}{\sqrt{b^2-r^2}}+4C\frac{abcr^2}{\sqrt{c^2-r^2}}\end{aligned}\right\} \quad (9)$$

Die Grössen B und C können nun so gewählt werden, dass die Coefficienten von η und ζ in der letzten Gleichung einander gleich werden; also

$$B+\frac{C(bc-ar)r}{a\sqrt{b^2-r^2}\sqrt{c^2-r^2}}+\frac{2abcr^2}{\sqrt{b^2-r^2}} =$$
$$= C+\frac{B(bc-ar)r}{a\sqrt{b^2-r^2}\sqrt{c^2-r^2}}+\frac{2abcr^2}{\sqrt{c^2-r^2}}$$

$$(B-C)a\sqrt{b^2-r^2}\sqrt{c^2-r^2}-(B-C)(bc-ar)r =$$
$$= 2a^2bcr^2[\sqrt{b^2-r^2}-\sqrt{c^2-r^2}]$$

$$B-C = \frac{2a^2bcr^2\sqrt{b^2-r^2}-2a^2bcr^2\sqrt{c^2-r^2}}{a\sqrt{b^2-r^2}\sqrt{c^2-r^2}-(bc-ar)r}$$

Dieser Gleichung genügt man, wenn man setzt

$$\left.\begin{aligned}B &= \frac{2a^2bcr^2\sqrt{b^2-r^2}}{a\sqrt{b^2-r^2}\sqrt{c^2-r^2}-(bc-ar)r}\\ C &= \frac{2a^2b^2cr^2\sqrt{c^2-r^2}}{a\sqrt{b^2-r^2}\sqrt{c^2-r^2}-(bc-ar)r}\end{aligned}\right\} \quad (10)$$

Zufolge der Gleichung (7) ist aber

$$a^2b^2c^2-r^2(a^2b^2+a^2c^2)+a^2r^2 = a^2r^4+r^2(b^2c^2+2rabc)$$

oder

$$a^2(b^2-r^2)(c^2-r^2) = r^2(ar+bc)^2$$

oder

und analog

$$\left.\begin{aligned} a\sqrt{b^2-r^2}\,\sqrt{c^2-r^2} &= r(ar+bc \\ b\sqrt{c^2-r^2}\,\sqrt{a^2-r^2} &= r(br+ac) \\ c\sqrt{a^2-r^2}\,\sqrt{b^2-r^2} &= (cr+ab) \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

Hierdurch werden die Gleichungen (10) bedeutend vereinfacht, sie bringen:

$$B = abc\sqrt{b^2-r^2}, \quad C = abc\sqrt{c^2-r^2} \qquad (12)$$

und an Stelle der Gleichung (9) erhält man nun:

$$\begin{aligned} 4a^2b^2c^2r^2 = {} & \eta^2+\zeta^2-2\eta\left[abc\sqrt{b^2-r^2}+\frac{abc(bc-ar)r}{a\sqrt{b^2-r^2}}+\frac{2abcr^2}{\sqrt{b^2-r^2}}\right] \\ & -2\zeta\left[abr\sqrt{c^2-r^2}+\frac{abc(bc-ar)r}{a\sqrt{c^2-r^2}}+\frac{2abcr^2}{\sqrt{c^2-r^2}}\right] \\ & +\frac{2\eta\zeta[bc-ar]r}{a\sqrt{b^2-r^2}\,\sqrt{c^2-r^2}}+a^2b^2c^2(b^2-r^2)+a^2b^2c^2(c^2-r^2) \\ & +2ab^2c^2(bc-ar)r+4a^2b^2c^2r^2+4a^2b^2c^2r^2 \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} 0 = {} & \eta^2+\zeta^2-2\eta\left[\frac{b^2c(ab+cr)}{\sqrt{b^2-r^2}}\right]-2\zeta\left[\frac{bc^2(ac+br)}{\sqrt{c^2-r^2}}\right] \\ & +\frac{2\eta\zeta(bc-ar)r}{a\sqrt{b^2-r^2}\,\sqrt{c^2-r^2}}+a^2b^2c^2(b^2+c^2)+2ab^3c^3r \end{aligned}$$

oder mit Benutzung der Gleichungen (11)

$$\begin{aligned} 0 = {} & \eta^2+\zeta^2+2\eta\zeta\frac{(bc-ar)}{bc+ar}-2\eta\frac{b^2c^2}{r}\sqrt{a^2-r^2}-2\zeta\frac{b^2c^6}{r}\sqrt{a^2-r^2} \\ & +a^2b^2c^2(b^2+c^3)+2ab^3c^3r \end{aligned}$$

oder ferner

$$\begin{aligned} 0 = {} & \left[\eta+\zeta-\frac{b^2c^2}{r}\sqrt{a^2-r^2}\right]^2-4\eta\zeta\frac{ar}{bc+ar} \\ & -\frac{a^2b^4c^4}{r^2}+b^2c^2[a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2+2abcr] \end{aligned}$$

oder, da das freie Glied zufolge der Gleichung (7) verschwindet;

$$\frac{4ar}{ar+bc}\cdot\eta\zeta=\left[\eta+\zeta-\frac{b^2c^2}{re}\sqrt{a^2-r^2}\right]^2=$$
$$\left[\frac{b^2c^2}{r}\sqrt{a^2-r^2}-\eta-\zeta\right]^2 \qquad (13)$$

und die Lösung der zweiten Aufgabe kommt daher, wenn man auch aus der 2ten und 5ten, sowie auch aus der 3ten und 6ten Gleichung ähnliche Gleichungen wie die vorstehende entwickelt, darauf hinaus, die Lösung des folgenden Systems von Gleichungen zu finden:

$$\left.\begin{aligned}\frac{4ar}{ar+bc}\eta\zeta&=\left[\frac{b^2c^2}{r}\sqrt{a^2-r^2}-\eta-\zeta\right]^2\\ \frac{4br}{br+ca}\zeta\xi&=\left[\frac{c^2a^2}{r}\sqrt{b^2-r^2}-\zeta-\xi\right]^2\\ \frac{4cr}{cr+ab}\xi\eta&=\left[\frac{a^2b^2}{r}\sqrt{c^2-r^2}-\xi-\eta\right]^2\end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

wobei die Gleichung (7) oder die ihr äquivalenten Gleichungen (11) in Betracht kommen.

Setzt man nun

$$\left.\begin{aligned}\alpha&=\frac{1}{2r}\left[-b^2c^2\sqrt{a^2-r^2}+c^2a^2\sqrt{b^2-r^2}+a^2b^2\sqrt{c^2-r^2}\right]\\ \beta&=\frac{1}{2r}\left[b^2c^2\sqrt{a^2-r^2}-c^2a^2\sqrt{b^2-r^2}+a^2b^2\sqrt{c^2-r^2}\right]\\ \gamma&=\frac{1}{2r}\left[b^2c^2\sqrt{a^2-r^2}+c^2a\sqrt{b^2-r^2}-a^2b^2\sqrt{c^2-r^2}\right]\end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

oder, was dasselbe ist:

$$\left.\begin{aligned}\beta+\gamma&=\frac{b^2c^2}{r}\sqrt{a^2-r^2}\\ \gamma+\alpha&=\frac{c^2a^2}{r}\sqrt{b^2-r^2}\\ \alpha+\beta&=\frac{a^2b^2}{r}\sqrt{c^2-r^2}\end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

so gehen die Gleichungen (14) mit Rücksicht auf die Gleichungen (11) über in

$$\left.\begin{aligned} 4\alpha\eta\zeta &= \frac{\alpha(\gamma+\alpha)(\alpha+\beta)}{a^4b^2c^2}\,[\beta+\gamma-\eta-\zeta]^2 \\ 4\beta\zeta\xi &= \frac{\beta(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)}{a^2b^4c^2}\,[\gamma+\alpha-\zeta-\xi]^2 \\ 4\gamma\xi\eta &= \frac{\gamma(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)}{a^2b^2c^4}\,[\alpha+\beta-\xi-\eta]^2 \end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

Nun ist aber nach Gleichung (7)

$$a^2b^2c^2 = r^2[a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2+2rabc]$$

oder

$$-2abcr^3 = [a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2]r^2 - a^2b^2c^2$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit $2rabc$, so folgt:

$$-4a^2b^2c^2r^4 = [a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2]2r^3abc - 2a^3b^3c^3r$$

oder für $2r^3abc$ den Wert aus der vorhergehenden Zeile gesetzt:

$$\begin{aligned} -4a^2b^2c^2r^4 &= [a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2][a^2b^2c^2 - r^2(a^2b^2+a^2c^4+b^2c^2)] \\ &\qquad -2arb^2c^3r \\ &= a^2b^2c^2[a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2] - r^2[a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2]^2 \\ &\qquad -2a^3b^3c^3r \\ &= a^2b^2c^2[a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2] \\ &\quad -r^2[a^4b^4+a^4c^4+b^4c^4+2a^4b^2c^2+2a^2b^4c^2+2a^2b^2c^4] \\ &\qquad -2a^3b^3c^3r \end{aligned}$$

Addirt man beiderseits $4a^4b^2c^2r^2$, so folgt:

$$\begin{aligned} 4a^2b^2c^2r^2(a^2-r^2) &= a^4b^4c^2+a^4c^4b^2+b^4c^4a^2 \\ &\quad -r^2[a^4b^4+a^4c^4+b^4c^4-2a^4b^2c^2+2a^2b^4c^2+2a^2b^2c^4] \\ &\qquad -2a^3b^3c^3r \\ &= a^4b^4(c^2-r^2)+a^4c^4(b^2-r^2)+b^4c^4(a^2-r^2) \\ &\quad +2a^4b^2c^2r^2-2a^2b^4c^2r^2-2a^2b^2c^3r(cr+ab) \end{aligned}$$

Fügt man rechts noch $+2a^3b^3c^3r-2a^3b^3c^3r$ hinzu, so folgt ferner:

$$\begin{aligned} 4a^3b^2c^2r^2(a^2-r^2) &= a^4b^4(c^2-r^2)+a^4c^4(c^2-r^2)+b^4c^4(a^2-r^2) \\ &\quad +2a^3b^2c^2r(ar+bc)-2a^3b^3c^2r(br+ac) \\ &\qquad -2a^2b^2c^3r(cr+ab) \end{aligned}$$

und daher mit Rücksicht auf die Gleichungen [11)

Digitized by Google

$$4a^2b^2c^2r^2(a^2-r^2) = b^4c^4(a^2-r^2)+a^4c^4(b^2-r^2)+a^4b^4(c^2-r^2)$$
$$+2a^4b^2c^2\sqrt{b^2-r^2}\sqrt{c^2-r^2}-2a^2b^4c^2\sqrt{c^2-r^2}\sqrt{a^2-r^2}$$
$$-2a^2b^2c^4\sqrt{a^2-r^2}\sqrt{b^2-r^2}$$

also, wenn man die Quadratwurzel auszieht:

$$2abcr\sqrt{a^2-r^2} = -b^2c^2\sqrt{a^2-r^2}+c^2a^2\sqrt{b^2-r^2}+a^2b^2\sqrt{c^2-r^2}$$

oder, verglichen mit (15)

und analog

$$\left.\begin{aligned} abc\sqrt{a^2-r^2} &= \alpha \\ abc\sqrt{b^2-r^2} &= \beta \\ abb\sqrt{c^2-r^2} &= \gamma \end{aligned}\right\} \qquad (18)$$

Es ist also

$$\frac{abc}{r} = a\frac{b^2c^2}{r}\sqrt{a^2-r^2} = a(\beta+\gamma) \quad \text{zufolge (16)}$$

oder

$$\frac{abc}{ar} = \beta+\gamma$$

mithin

$$\alpha+\beta+\gamma = \alpha+\frac{abc}{ar} = \alpha\frac{ar+bc}{ar} = \frac{\alpha}{r^2}\sqrt{b^2-r^2}\sqrt{c^2-r^2} \quad \text{zufolge (11)}$$

und daher mit Rücksicht auf (16)

und analog

$$\left.\begin{aligned} \alpha+\beta+\gamma &= \frac{\alpha(\gamma+\alpha)(\alpha+\beta)}{a^4b^2c^2} \\ \alpha+\beta+\gamma &= \frac{\beta(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)}{a^2b^4c^2} \\ \alpha+\beta+\gamma &= \frac{\gamma(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)}{a^2b^2c^4} \end{aligned}\right\} \qquad (19)$$

Damit geht nun das System (47) über in folgendes:

$$\left.\begin{aligned} 4\alpha\eta\zeta &= (\alpha+\beta+\gamma)[\beta+\gamma-\eta-\zeta]^2 \\ 4\beta\zeta\xi &= (\alpha+\beta+\gamma)[\gamma+\alpha-\zeta-\xi]^2 \\ 4\gamma\xi\eta &= (\alpha+\beta+\gamma)[\alpha+\beta-\xi-\eta]^2 \end{aligned}\right\} \qquad (20)$$

Vergleicht man dieses System mit dem System I, so ergiebt sich, dass beide Systeme einander gleich und nur in der Wahl der Buchstaben verschieden sind. Daher ist nach Analogie der Gleichungen (23) in Sytem I:

$$2\xi_1 = \alpha+\beta+\gamma-r'-(-\mathfrak{A}'+\mathfrak{B}'+\mathfrak{C}') \qquad (21)$$

Nun ist hierin

$$\alpha = abc\sqrt{a^2-r^2} \qquad \mathfrak{A}' = \sqrt{\frac{\alpha(\beta+\alpha)(\alpha+\gamma)}{\alpha+\beta+\gamma}} = a^2bc$$

$$\beta = abc\sqrt{b^2-r^2} \qquad \mathfrak{B}' = \sqrt{\frac{\beta(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)}{\alpha+\beta+\gamma}} = ab^2c$$

$$\gamma = abp\sqrt{c^2-r^2} \qquad \mathfrak{C}' = \sqrt{\frac{\gamma(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)}{\alpha+\beta+\gamma}} = abc^2$$

zufolge (18) in I und (19) in II

$$r' = \sqrt{\frac{\alpha\beta\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}} = abcr \quad \text{und} \quad \alpha+\beta = \gamma\frac{ab}{cr}$$

Denn in (19) kann nach der Gleichung unter (18)

$$\gamma+\alpha = \beta\frac{ac}{br} \quad \text{und} \quad \alpha+\beta = \gamma\frac{ab}{cr}$$

gesetzt werden.

Demnach geht die Gleichung (21) über in

$$2\xi_1 = abc[\sqrt{a^2-r^2}+\sqrt{b^2-r^2}+\sqrt{c^2-c^2}-r-(-a+b+c)]$$

Da nun nach (8) und (12)

$$y = b-\frac{\eta}{ca\sqrt{b^2-r^2}}, \quad z = c-\frac{\zeta}{ac\sqrt{c^2-r^2}}$$

und also analog

$$2x = 2a-\frac{2\xi}{bc\sqrt{a^2-r^2}}$$

ist, so ergiebt sich

$$2x_1 = \frac{a}{\sqrt{a^2-r^2}}[\sqrt{a^2-r^2}-\sqrt{b^2-r^2}-\sqrt{c^2-r^2}+r+(-a+b+c)]$$

Jetzt ist es nicht schwer, auch die Werte von u, v, w zu bestimmen. Es folgt hier noch das ganze erste Wertsystem, aus dem die übrigen sieben Systeme mit Benutzung der Gleichungen 23) des Systems I leicht hergeleitet werden können.

$$x_1 = \frac{a}{2\sqrt{a^2-r^2}}[\sqrt{a^2-r^2}-\sqrt{b^2-r^2}-\sqrt{c^2-r^2}+r+(-a+b+c)]$$

$$y_1 = \frac{b}{2\sqrt{b^2-r^2}}[-\sqrt{a^2-r^2}+\sqrt{b^2-r^2}-\sqrt{c^2-r^2}+r+(a-b+c)]$$

$$z_1 = \frac{c}{2\sqrt{c^2-r^2}}[-\sqrt{a^2-r^2}-\sqrt{b^2-r^2}+\sqrt{c^2-r^2}+r(a+b-c)]$$

$$u_1 = \frac{r}{2\sqrt{b^2-r^2}\sqrt{c^2-r^2}}[(\sqrt{b^2-r^2}+\sqrt{c^2-r^2})(\sqrt{a^2-r^2}+\sqrt{b^2-r^2}$$
$$+\sqrt{c^2-r^2}-r-a)-\sqrt{b^2-r^2}\sqrt{c^2-r^2})(b-c)]$$

$$v_1 = \frac{r}{2\sqrt{c^2-r^2}\sqrt{a^2-r^2}}((\sqrt{c^2-r^2}+\sqrt{a^2-r^2})(\sqrt{a^2-r^2}+\sqrt{b^2-r^2}$$
$$+\sqrt{c^2-r^2}-r-b)-(\sqrt{c^2-r^2}-\sqrt{a^2-r^2})(c-a)]$$

$$w_1 = \frac{r}{2\sqrt{a^2-r^2}\sqrt{b^2-r^2}}[(\sqrt{a^2-r^2}+\sqrt{b^2-r^2})(\sqrt{a^2-r^2}+\sqrt{b^2+r^2}$$
$$+\sqrt{c^2-r^2}-r-c)-(\sqrt{a^2-r^2}-\sqrt{b^2-r^2})(a-b)]$$

B. Auflösung von C. Davids.

Wird (3) quadrirt und der Wert von w^2 in (6) substituirt, so erhält man:

$$w^2 = 4r^2-4\frac{r^2x}{a}-4\frac{r^2y}{b}+\frac{r^2x^2}{a^2}+\frac{r^2y^2}{b^2}+\frac{2r^2xy}{c^2}-\frac{2rxy}{c}+x^2+y^2$$

oder

$$4r^2\frac{(a-x)(b-y)}{ab} = -\frac{r^2x^2}{a^2}-\frac{r^2y^2}{b^2}+\frac{2r^2xy}{ab}+\frac{2rxy}{c}+x^2+y^2$$
$$-\frac{(a^2-r^2)}{a^2}x^2+\frac{(b^2-r^2)}{b^2}y^2+2xy\left(\frac{r^2}{ab}+\frac{r}{c}\right)$$

Aus (7):

$$\frac{r^2}{ab}+\frac{r}{c} = \pm\sqrt{\frac{(a^2-r^2)(b^2-r^2)}{a^2b^2}} \tag{8}$$

worin nur das obere Zeichen gelten kann, wenn a, b, c, r positive Grössen vorstellen. Dass von diesen Grössen in (8) r die kleinste ist, ergiebt sich sehr leicht, wenn man in (7) links $a^2 = r^2$ setzt. Wird nun

$$a^2-r^2 \text{ durch } t^2 \text{ und } b^2-r^2 \text{ durch } m^2$$

bezeichnet, so geht die obige Gleichung über in:

$$\left.\begin{aligned} 2r\sqrt{\left(\frac{a-x}{a}\right)\left(\frac{b-y}{b}\right)} &= \pm\left(\frac{lx}{a}+\frac{my}{b}\right) \\ \text{analog} \qquad 2r\sqrt{\left(\frac{b-y}{b}\right)\left(\frac{c-z}{c}\right)} &= \pm\left(\frac{my}{b}+\frac{nz}{c}\right) \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Hierin müssen beide Vorzeichen gesetzt werden, weil x, y, z möglicherweise negative Werte haben können. Statt sie aber auf der rechten Seite zu gebrauchen, können sie auch den Grössen der linken Seite vorgesetzt werden und dann folgt:

$$-\frac{lx}{a} \pm 2r\sqrt{\left(\frac{a-x}{a}\right)\left(\frac{b-y}{b}\right)} = \frac{my}{b}$$

oder, wenn beiderseits l addirt wird,

$$l\left(\frac{a-x}{a}\right) \pm 2r\sqrt{\left(\frac{a-x}{a}\right)\left(\frac{b-y}{b}\right)} = \frac{my+bl}{b}$$

$$\frac{a-x}{a} \pm \frac{2r}{l}\sqrt{\frac{b-y}{b}} \cdot \sqrt{\frac{a-x}{a}} = \frac{my+bl}{bl}$$

quadratisch behandelt

$$\left(\sqrt{\frac{a-x}{a}} \pm \frac{r}{l}\sqrt{\frac{b-y}{b}}\right)^2 = \frac{my+bl}{bl} + \frac{r^2(b-y)}{bl^2}$$

$$\sqrt{\frac{a-x}{a}} = \pm\frac{r}{l}\sqrt{\frac{b-y}{b}} \pm \sqrt{\frac{lmy+bl^2+r^2b-r^2y}{bl^2}}$$

Wird in dieser Gleichung

$$lm - r^2 = \frac{rab}{c} \tag{8}$$

gesetzt und wird dann mit l multiplicirt, so kommt:

$$\left.\begin{aligned} l\sqrt{\frac{a-x}{a}} &= \pm r\sqrt{\frac{b-y}{b}} \pm \sqrt{a^2+\frac{ray}{c}} \\ \text{analog}\quad l\sqrt{\frac{a-x}{c}} &= \pm r\sqrt{\frac{c-z}{c}} + \sqrt{a^2+\frac{raz}{b}} \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Daher:

$$\pm r\sqrt{\frac{b-y}{b}} \pm \sqrt{a^2+\frac{ray}{c}} = \pm r\sqrt{\frac{c-z}{c}} \pm \sqrt{a^2+\frac{raz}{b}} \tag{11}$$

$$\pm r\sqrt{\frac{b-y}{b}} \pm r\sqrt{\frac{c-z}{c}} = \pm\sqrt{a^2+\frac{ray}{c}} \pm \sqrt{a^2+\frac{raz}{b}}$$

quadrirt

$$r^2\left[\frac{b-y}{b}+\frac{c-z}{c}\right]\pm 2r^2\sqrt{\left(\frac{b-y}{b}\right)\left(\frac{c-z}{c}\right)}=a^2+\frac{ray}{c}+a^2+\frac{raz}{b}$$
$$\pm 2\sqrt{\left(a^2+\frac{ray}{c}\right)\left(a^2+\frac{raz}{b}\right)} \qquad (12)$$

$$\pm 2r^2\sqrt{\left(\frac{b-y}{b}\right)\left(\frac{c-z}{c}\right)}=2(a^2-r^2)+\left(r^2+\frac{rab}{c}\right)\frac{y}{b}+\left(r^2+\frac{rac}{b}\right)\frac{r}{c}$$
$$\pm 2a\sqrt{a^2+\frac{rab}{c}\cdot\frac{y}{b}+\frac{rac}{b}\cdot\frac{z}{c}+\frac{r^2yz}{bc}}$$

Nun ist der Gleichung (8) gemäss:

$$\frac{rab}{c}+r^2=lm$$

und

$$\frac{rab}{b}+r^2=ln$$

daher

$$\pm 2r^2\sqrt{\left(\frac{b-y}{b}\right)\left(\frac{c-z}{c}\right)}=2l^2+lm\,\frac{y}{b}+ln\,\frac{z}{c}$$
$$\pm 2a\sqrt{l^2+r^2+(lm-r^2)\frac{y}{b}+(ln-r^2)\frac{z}{c}+\frac{r^2yz}{bc}} \qquad (13)$$

oder, (9) in Betracht gezogen,

$$\pm r\left[\frac{my}{b}+\frac{nz}{c}\right]=2l^2+lm\,\frac{y}{b}+\frac{lnz}{c}$$
$$\pm 2a\sqrt{l^2+l\left(\frac{my}{b}+\frac{nz}{c}\right)+r^2-\frac{r^2y}{b}-\frac{r^2z}{c}+\frac{r^2yz}{bc}} \qquad (14)$$

Die vier letzten Teile unter dem Wurzelzeichen sind aber nach (9):

$$r^2\left(\frac{b-y}{b}\right)\left(\frac{c-z}{c}\right)=\tfrac{1}{4}\left(\frac{my}{b}+\frac{nz}{c}\right)^2$$

Also:

$$\pm r\left[\frac{my}{b}+\frac{nz}{c}\right]-\frac{lmy}{b}-\frac{lnz}{c}=2l^2\pm 2a\left\{\pm\left[l+\tfrac{1}{2}\left(\frac{my}{b}+\frac{nz}{c}\right)\right]\right\}$$
$$-(l\pm r)\left[\frac{my}{b}+\frac{nz}{c}\right]-2l^2\pm 2a\left[l+\tfrac{1}{2}\left(\frac{my}{b}+\frac{nz}{c}\right)\right] \qquad (15)$$

Wenn in Gleichung (23) hinsichtlich des Gebrauches der Vorzeichen auch eine Einschränkung derart statt finden sollte, dass entweder nur die oberen oder nur die unteren gebraucht werden dürfen — und dies ist, wie sich nachweisen lässt, wirklich der Fall

ähnlich wie in System I Gleichung (7) —, so würde diese Einschränkung doch in (14) nicht mehr gelten, und daher können in (15) von den doppelten Vorzeichen + und — beliebig gebraucht werden. Aus dieser letzten Gleichung gehen daher vier Formen hervor:

$$1)\quad (a+l+r)\left(\frac{my}{b}+\frac{nz}{c}\right) = -(2l^2+2al)$$

$$2)\quad (a-l-r)\left(\frac{my}{b}+\frac{nz}{c}\right) = +(2l^2-2al)$$

$$3)\quad (a+l-r)\left(\frac{my}{b}+\frac{nz}{c}\right) = -(2l^2+2al)$$

$$4)\quad (a-l+r)\left(\frac{my}{b}+\frac{nz}{c}\right) = +(2l^2-2al)$$

oder, da

$$2l^2+2al = l^2+a^2-r^2+2al = (a+l+r)(a+l-r)$$

und

$$2l^2-2al = l^2+a^2-r^2-2al = (a-l+r)(a-l-r) \text{ ist,}$$

$$\left.\begin{aligned} 1)\quad \frac{my}{b}+\frac{nz}{c} &= -a-l+r \\ 2)\quad \frac{my}{b}+\frac{nz}{c} &= +a-l+r \\ 3)\quad \frac{my}{b}+\frac{nz}{c} &= -a-l-r \\ 4)\quad \frac{my}{b}+\frac{nz}{c} &= +a-l-r \end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

Versuchen wir jetzt die Werte von y und z festzustellen. Es ist nach (13), (14) und (16, 1):

$$2r\sqrt{\left(\frac{b-y}{b}\right)\left(\frac{c-z}{c}\right)} = \pm\left(\frac{my}{b}+\frac{nz}{c}\right) = \pm(-a-l+r) \qquad (17)$$

$$4r^2\left[1-\frac{y}{b}-\frac{z}{c}+\frac{yz}{bc}\right] = (a+l-r)^2$$

$$4r^2\left[mn-n\cdot\frac{my}{b}-\frac{m\cdot nz}{c}+\frac{my}{b}\cdot\frac{nz}{c}\right] = mn(a+l-r)^2 \qquad mn$$

$$\frac{my}{b} = -a-l+r-\frac{nz}{c}$$

substituirt:

$$\frac{n^2z^2}{c^2} - [-a-l+r-m+n]\frac{nz}{c} = -\frac{mn(a+l-r)^2}{4r^2} + mn$$

$$= \frac{-2lmn(a+l-r) - mn(2r^2-2ra)}{4r^2}$$

$$+ mn + na + ln - nr$$

$$= \frac{-2(l+m+n)(a+l-r)^*) + 2mn + 4na + 4ln - 4nr}{4}$$

$$+ \frac{mn \,.\, 2ra}{4r^2}$$

Hierzu auf beiden Seiten die Ergänzung addirt, dann die Quadratwurzel ausgezogen und mit 2 multiplicirt, giebt:

$$\frac{2nz}{c} = n-l-m+r-a \pm (b+c)$$

und ferner

$$\frac{2my}{b} = m-l-n+r-a \mp (b+c)$$

woraus zwei Wertpaare für y und z hervorgehen, nämlich:

$$\alpha \begin{cases} \frac{2nz}{c} = n-l-m+r-a+b+c \\ \frac{2my}{b} = m-l-a+r-a-b-c \end{cases}$$

$$\beta \begin{cases} \frac{2nz}{c} = n-l-m+r-a-b-c \\ \frac{2my}{b} = m-l-n+r-a+b+c \end{cases}$$

Ferner, aus der zweiten Gleichung in (16) geht hervor:

---

*) Es ist

$$lmn = r^2(l+m+n)$$

denn nach (8) ist

$$ln = \frac{rac}{b} + r^2$$

oder

$$lm \,.\, nm = \left(\frac{rac}{b} + r^2\right)(b^2 - r^2)$$

oder

$$\left(\frac{rab}{c} + r^2\right)\left(\frac{rbc}{a} + r^2\right) = \left(\frac{rac}{b} + r^2\right)(b^2 - r^2)$$

Durch r dividirt und mit abc multiplicirt, entsteht die Gleichung (7).

$$\frac{n^2z^2}{c^2}-(a-l+r-m+n)\frac{nz}{c}=\frac{2(l+m+n)(a-l+r)+2mn-4n(a-l+r)}{4}$$

$$-\frac{mn\,.\,2ra}{4r^2}$$

und hieraus

$$\frac{2nz}{c}=a-l+r-m+n\pm(b-c)$$

Dies giebt zwei andere Wertpaare für z und y, nämlich:

$$\gamma\begin{cases}\frac{2nz}{c}=n-l-m+r+a+b-c\\ \frac{2my}{b}=m-l-n+r+a-b+c\end{cases}$$

$$\delta\begin{cases}\frac{2nz}{c}=n-l-m+r+a-b+c\\ \frac{2my}{b}=m-l-n+r+a+b-c\end{cases}$$

Aus den beiden letzten Gleichungen in (16):

$$\varepsilon\begin{cases}\frac{2nz}{c}=n-l-m-r-a+b-c\\ \frac{2my}{b}=m-l-n-r-a-b+c\end{cases}$$

$$\zeta\begin{cases}\frac{2nz}{c}=n-l-m-r-a-b+c\\ \frac{2my}{b}=m-l-n-r-a+b-c\end{cases}$$

$$\eta\begin{cases}\frac{2nz}{c}=n-l-m-r+a+b+c\\ \frac{2my}{b}=m-l-n-r+a-b-c\end{cases}$$

$$\theta\begin{cases}\frac{2nz}{c}=n-l-m-r+a-b-c\\ \frac{2my}{b}=m-l\quad n-r+a+b+c\end{cases}$$

Um die zugehörigen Werte von x zu finden, bilde man der Gleichung (17) gemäss folgende Gleichung:

$$2r\sqrt{\left(\frac{a-x}{a}\right)\left(\frac{c-z}{c}\right)} = \pm\left(\frac{lx}{a}+\frac{nz}{c}\right) = -b-n+r$$

woraus man nach Analogie erhält:

$$\begin{cases} \frac{2nz}{c} = n-l-m+r-b+(a+c) \\ \frac{2lx}{a} = l-m-n+r-b-(a+c) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{2nz}{c} = n-l-m+r-b-(a+c) \\ \frac{2lx}{a} = l-m-n+r-b+(a+c) \end{cases}$$

Hiervon ist der erste Wert von z mit dem von δ und der andere mit dem von β übereinstimmend, und dahin gehören demnach auch die eben gefundenen Werte von x. Auf gleiche Art ergeben sich nun auch die übrigen Werte von x. Die 8 Wertsysteme können nun am passendsten in folgender Ordnung zusammengestellt werden:

$$\gamma\begin{cases} \frac{2lx_1}{a} = l-m-n+r-a+b+c \\ \frac{2my_1}{b} = m-l-n+r-b+a+c \\ \frac{2nz_1}{c} = n-l-m+r-c+a+b \end{cases}$$

$$\zeta\begin{cases} \frac{2lx_2}{a} = l-m-n-r+a-b-c \\ \frac{2my_2}{b} = m-l-n-r+b-a-c \\ \frac{2nz_2}{c} = n-l-m-r+c-a-b \end{cases}$$

$$\alpha\begin{cases} \frac{2lx_3}{a} = l-m-n+r+a+b-c \\ \frac{2my_3}{b} = m-l-n+r-b-a-c \\ \frac{2nz_3}{c} = n-l-m+r+c-a+b \end{cases}$$

$$\theta\begin{cases}\frac{2lx_4}{a} = l-m-n-r-a-b+c\\ \frac{2my_4}{b} = m-l-n-r+b+a+c\\ \frac{2nz_4}{c} = n-l-m-r-c+a-b\end{cases}$$

$$\beta\begin{cases}\frac{2lx_5}{a} = l-m-n+r+a-b+c\\ \frac{2my_5}{b} = m-l-n+r+b-a+c\\ \frac{2nz_5}{c} = n-l-m+r-c-a-b\end{cases}$$

$$\eta\begin{cases}\frac{2lx_6}{a} = l-m-n-r-a+b-c\\ \frac{2my_6}{b} = m-l-n-r-b+a-c\\ \frac{2nz_6}{c} = n-l-m-r+c+a+b\end{cases}$$

$$\delta\begin{cases}\frac{2lx_7}{a} = l-m-n+r-a-b-c\\ \frac{2my_7}{b} = m-l-n+r+b+a-c\\ \frac{2nz_7}{c} = n-l-m+r+c+a-b\end{cases}$$

$$\varepsilon\begin{cases}\frac{2lx_8}{a} = l-m-n-r+a+b+c\\ \frac{2my_8}{b} = m- \quad -n-r-b-a+c\\ \frac{2nz_8}{c} = n-l-m-r+c+a+b\end{cases}$$

Es bleibt jetzt nur noch übrig, die Werte von u, v, w festzustellen. Begnügen wir uns in dieser Hinsicht mit dem Werte von u des Wertsystems γ. Es ist nach (1)

$$u_1 = 2r - \frac{ry}{b} - \frac{rz}{c} \quad \text{oder} \quad = r - \frac{ry}{b} + r - \frac{cz}{c}$$

oder

$$u_1 = \frac{r(l+m+n-r+b-a-c)}{2m} + \frac{r(l+m+n-r+c-a-b)}{2u}$$

Anmerkung 1. Hinsichtlich der Vorzeichen in Gleichung (11) gilt wieder Gleiches wie in meiner 6ten Gleichung zu I. Was dort in Anmerkung 1. behauptet wurde, kann, auf Gleichung (11) in II. bezogen, allerdings begründet werden, jedoch ist diese Begründung nicht ohne Schwierigkeit.

Anmerkung 2. Es sei

$$a = 975, \quad b = 825, \quad c = 1287, \quad r = 495$$

also

$$l = 840, \quad m = 660, \quad n = 1188$$

dann ist

$$x_1 = +\frac{2535}{7}, \quad y_1 = +\frac{705}{2}, \quad z_1 = +377$$

$$x_2 = -\frac{10725}{7}, \quad y_2 = -\frac{4125}{2}, \quad z_2 = -715$$

$$x_3 = \pm 0, \quad y_3 = -2475, \quad z_3 = +715$$

$$x_4 = -1170, \quad y_4 = +765, \quad z_4 = -1053$$

$$x_5 = +\frac{2145}{4}, \quad y_5 = +165, \quad z_5 = -1573$$

$$x_6 = -\frac{6825}{4}, \quad y_6 = -1875, \quad z_6 = +1235$$

$$x_7 = -\frac{14625}{7}, \quad y_6 = -225, \quad z_7 = +\frac{1755}{2}$$

$$x_8 = +\frac{6435}{7}, \quad y_3 = -1485, \quad z_8 = -2431$$

XXIII.

Miscellen.

1.

Einige quantitative Fragen über zwölf Kugeln, die eine Kugel berühren.

Es ist bekannt, dass 12 und nicht mehr gleiche Kugeln eine gleiche Kugel berühren können ohne sich zu durchdringen. Diese 12 Kugeln lassen Raum zwischen sich, der jedoch bei keiner Anordnung zur Einfügung einer gleichen Kugel hinreicht. Von den vielen Arten den überschüssigen Raum zu bestimmen wollen wir nur einige untersuchen.

Eine Kugeloberfläche K werde von 12 Kugeloberflächen K_1, K_2, . . . K_{12} berührt. Ihre Mittelpunkte seien M, M_1, M_2, . . . M_{12}. Vorausgesetzt sei, dass keine Kugeln einander durchdringen. Wir ziehen nur solche Anordnungen in Betracht, wo alle Kugeln um eine Axe regelmässig gruppirt sind. Soviel sei allgemein bemerkt; wir wenden uns nun zu den einzelnen Bestimmungsweisen.

1.

Sind die Kugeln K_1, . . . K_{12} einander gleich, so ist das Mass des Raumes, den eine von ihnen auf K einnimmt, ihre centrale Projection auf K für das Centrum M. Es ergibt sich die Frage:

„Wie verhält sich die Summe der Projectionen aller 12 be-„rührenden Kugeln zu K?“

Die Projection von K_1 auf K ist eine Calotte. Calotten derselben Kugel verhalten sich wie ihre Pfeile. Ist r der Radius von

K, und sind die Radien der übrigen Kugeln unter sich gleich und zunächst $= \varrho$, so sind die Pfeile der Calotte und des ganzen K (als Calotte gedacht)

$$r - \frac{r\sqrt{(r+\varrho)^2 - \varrho^2}}{r+\varrho} \quad \text{und} \quad 2r$$

Bezeichnet also P die Projection von K_1 auf K, so ist

$$\frac{P}{K} = \tfrac{1}{2} - \frac{\sqrt{r(r+2\varrho)}}{2(r+\varrho)} \tag{1}$$

2.

Hieran knüpfen sich nun folgende Fragen:

„Wievielmal ist im Falle lauter gleicher Kugeln die Projection „einer Kugel in K enthalten?"

Für $\varrho = r$ findet man die Zahl:

$$\frac{K}{P} = \frac{4}{2-\sqrt{3}} = 4(2+\sqrt{3}) = 14{,}928\,2432 \tag{2}$$

Von so vielen Kugeln würden die Projectionen, abgesehen von ihrer Integrität, die Fläche K bedecken.

3.

„Welchen Teil von K nehmen für $\varrho = r$ die Projectionen aller „Kugeln ein?"

Aus Gl. (2) ergiebt sich die Zahl:

$$\frac{12P}{K} = 3(2-\sqrt{3}) = 0{,}803\,8476 \tag{3}$$

4.

Wir fügen zum System der 12 Kugeln die 20 notwendigen Zwischenräume oder Minima des Zwischenraums hinzu und fragen nach dem Verhältniss der so vermehrten Projectionen zu K.

Berühren K_1, K_2, K_3 einander und K, so sind ihre Mittelpunkte die Ecken einer gleichseitigen Pyramide $M M_1 M_2 M_3$, deren Seitenkanten $= r+\varrho$, Kanten an der Basis $= 2\varrho$: Die Ecke M hat 3 Seitenwinkel $= \varphi$ und 3 Flächenwinkel $= \psi$, wo

$$\sin \tfrac{1}{2}\varphi = \frac{\varrho}{r+\varrho}; \qquad \cos\varphi = \frac{r^2+2r\varrho-\varrho^2}{(r+\varrho)^2}$$

$$\cos\psi = \frac{\cos\varphi}{1+\cos\varphi} = \frac{r^2+2r\varrho-\varrho^2}{2r(r+2\varrho)} \tag{4}$$

Die Projection des ebenen Dreiecks $M_1M_2M_3$ auf K ist das sphärische Dreieck

$$= Mr^2 = (3\psi - 2\mathrm{R})r^2 \tag{5}$$

Sie umfasst 3 Sectoren der 3 Calotten P für den sphärischen Centriwinkel ψ und das von den Calotten eingeschlossene gesuchte Bogendreieck Q; daher ist

$$\begin{aligned} Q &= (3\psi - 2\mathrm{R})r^2 - \frac{3\psi}{4\mathrm{R}}P \\ &= (3\psi - 2\mathrm{R})r^2 - \tfrac{3}{2}(2-\sqrt{3})\psi r^2 \\ &= \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\psi - 2\mathrm{R}\right)r^2 = 0{,}035\,990\,\mathrm{R}r^2 \end{aligned} \tag{6}$$

und die Summe aller Projectionen

$$\begin{aligned} 12P' &= 12P + 20Q = 2\{15\sqrt{3}\psi - 4(3\sqrt{3}-1)\mathrm{R}\}r^2 \\ &= 0{,}893\,823\,K \end{aligned}$$

Vermehrte man also die Projection jeder Kugel um ihren Anteil an dem Minimum der Zwischenräume, so würden noch

$$\frac{K}{P'} = 13{,}4031$$

so vermehrter Kugelprojectionen, abgesehen von ihrer Integrität, auf K Platz haben, mithin der anfänglich genannte Satz durch die Grösse des Raumes nicht bewiesen sein.

5.

„Wie gross können die einander gleichen Kugeln $K_1 \ldots K_{12}$ „höchstens sein um die Kugel K zu berühren?“

Bilden die Mittelpunkte ein regelmässiges Ikosaeder, und berühren sich die Kugeln zu je dreien, so ersieht man leicht, dass die Kugeln nicht grösser werden können, da die Zwischenräume ihrer Projectionen ihre kleinsten Werte haben. In diesem Falle ist die Ecke des Tetraeders $M M_1 M_2 M_3$ nach Gl. (5)

$$M = 3\psi - 2\mathrm{R} \tag{7}$$

und 20 derselben müssen den räumlichen Vollwinkel d. i. 8R einnehmen. Nun ist nach Gl. (4)

$$r^2 + 2r\varrho - \varrho^2 = 2r(r+2\varrho)\cos\psi$$

Nach Gl. (7) aber ist, sofern M ein Zwanzigstel des Vollwinkels 8R

$$\psi = \tfrac{1}{5}\mathrm{R}; \quad \cos\psi = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

also

$$\varrho^2 - \frac{3-\sqrt{5}}{2}\, r(r+2\varrho) = 0$$

woraus:

$$\varrho = r\sqrt{5-2\sqrt{5}} + \frac{3-\sqrt{5}}{2}\, r = 1{,}108516\, r \qquad (8)$$

6

„Wie gross kann eine Kugel sein, wenn die übrigen der Mittel-„kugel gleich sind?“

Es sei angenommen, dass die Kugeln in regelmässigen Kränzen um eine Axe (Axe der z für M als Anfangspunkt der xyz) liegen, und zwar M_1 am positiven, M_{12} am negativen Ende der z Axe, M_2 bis M_6 ein Fünfeck in der Ebene $z = z$ mit dem Eckradius u, M_5 bis M_{11} ein Fünfeck in der Ebene $z = z_1$ mit dem Eckradius u_1 bildend. K_1 berührt die 5 Kugeln K_2 bis K_6, jede der letztern zwei der Kugeln K_7 bis K_{11} und diese wieder sämtlich K_{12}. K_{12} habe den Radius ϱ, alle übrigen den Radius r. Kürze halber sei

$$\varepsilon = \tfrac{2}{5}\mathrm{R}$$

Legt man die xz Ebene durch M_2, so werden die Coordinaten x; y; z von

M_1,	$= 0$;	0	$2r$
M_2, M_3, . . . M_6	$= u$, $u\cos 2\varepsilon$, . . . ;	0, $u\sin 2z$ . . . ;	z
M_7, M_8, . . . M_{11}	$= u_1\cos\varepsilon$, $u_1\cos 3\varepsilon$ . . . ;	$u_1\sin\varepsilon$, . . . ;	z_1
			$-(r+\varrho)$
M_{12}	0;	0;	

die Bedingungen der Berührungen von

KK_1	$4r^2 = 4r^2$
KK_2, etc.	$u^2+z^2 = 4r^2$
K_1K_2, etc.	$u^2+(z-2r)^2 = 4r^2$
K_2K_7, etc.	$u^2-2uu_1\cos\varepsilon+u_1^2+(z_1-z)^2 = 4r^2$
KK_7, etc.	$u_1^2+z_1^2 = 4r^2$
K_7K_{12}, etc.	$u_1^2+(z_1+r+\varrho)^2 = (r+\varrho)^2$
KK_{12}	$(r+\varrho)^2 = (r+\varrho)^2$

woraus nach Elimination von u^2+z^2 und $b_1^2+z_1^2$:

$$z = r; \quad u = \sqrt{3} \cdot r$$

$$\sqrt{3}u_1 \cos\varepsilon + z_1 = 2r; \quad u_1^2 + z_1^2 = 4r^2 \tag{9}$$

$$(r+\varrho)z_1 + 2r^2 = 0 \tag{10}$$

Die Gl. (9) werden erfüllt durch ($u_1 = 0$ und)

$$u_1 = \frac{4\sqrt{3}r\cos\varepsilon}{3\cos^2\varepsilon+1}; \quad z_1 = -2r\,\frac{3\cos^2\varepsilon-1}{3\cos^2\varepsilon+1}$$

nachher Gl. (10) durch

$$\varrho = \frac{2r}{3\cos^2\varepsilon+1}$$

Nun ist

$$\cos\varepsilon = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

daher

$$u_1 = 4\sqrt{3}\,\frac{7\sqrt{5}+1}{61}\,r = \frac{16\sqrt{3}\cdot r}{7\sqrt{5}-1} = 1{,}89\,133\,99r$$

$$z_1 = -2\,\frac{12\sqrt{5}-7}{61}\,r = -\frac{22r}{12\sqrt{5}+7} = -0{,}650\,2563r$$

$$\varrho = 4\,\frac{3\sqrt{5}-1}{11}\,r = \frac{16r}{3\sqrt{5}+1} = 2{,}075\,7105\,r$$

7.

„Wie gross können zwei diametral liegende gleiche Kugeln sein, „wenn die übrigen gleich der Mittelkugel sind?“

Die Anordnung sei wie im vorigen Falle, nur seien die Radien von K_1 und K_{12} beide $= \varrho$. Dann wird das Gesamtgebilde von der xy Ebene symmetrisch geteilt, mithin

$$u_1 = u; \quad z_1 = -z$$

Die Berührungsbedingungen reduciren sich auf drei:

$$u^2 + z^2 = 4r^2$$

$$u^2 + (z-r-\varrho)^2 = (r+\varrho)^2$$

$$2u^2(1-\cos\varepsilon) + 4z^2 = 4r^2$$

woraus:

$$z = \frac{2r^2}{r+\varrho}; \quad u^2 = \frac{6r^2}{1+\cos\varepsilon}$$

$$(r+\varrho)^2 = 2r^2\,\frac{1+\cos\varepsilon}{2\cos\varepsilon-1}$$

Dies ergibt die Werte:

$$u^3 = r\sqrt{6}\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{5}}} = 1{,}821\,1860\,r$$

$$z = r\sqrt{2}\sqrt{\frac{3}{\sqrt{5}}-1} = \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt[4]{5}}\,r = 0{,}5845\,005\,r$$

$$\varrho = r\left(\sqrt{\frac{3\sqrt{5}+5}{2}}-1\right) = \frac{\sqrt[4]{5}}{2}\,r(\sqrt{5}+1) - r = 1{,}4091871\,r$$

8.

Die 12 Kugeln mögen in 4 regelmässigen Kränzen zu je 3 um die Axe liegen, numerirt:

$$(K_1K_2K_3)(K_4K_5K_6)(K_7K_8K_9)(K_{10}K_{11}K_{12})$$

so dass ihre Mittelpunkte 4 zur Axe normale Ebenen z_1, z, $-z_1$, $-z$ bestimmen. Wir fragen zunächst:

„Wie gross können höchstens die einander gleichen 6 Kugeln „der 2 äussersten Kränze sein, wenn die 6 übrigen Kugeln gleich „der Mittelkugel K sind?“

Die Antwort geht aus einer einfachen Betrachtung hervor.

Setzt man $z_1 = 0$, fallen also die Mittelpunkte des 2ten und 3ten Kranzes zusammen in die Aequatorebene, so umschliessen 6 Kugeln K_4 bis K_9, etwa in der Reihenfolge

$$K_4K_7K_5K_8K_6K_9$$

gerade die Mittelkugel, indem sie sich successive in 6 Punkten berühren. Verschiebt man aber von da aus die 2 Kranzebenen, so werden stets mindestens 3 Berührungen aufgehoben und der Raum für die 2 äussersten Kränze eingeengt. Folglich ist die gewählte Anordnung $z_1 = 0$ nicht nur möglich, sondern auch notwendig.

Auch in Betreff der 2 äussersten Kränze gehen wir vom einfachsten Falle aus und nehmen alle Kugeln einander gleich an. Bringen wir sie zur Berührung mit den angrenzenden Kränzen, so bildet jeder Mittelpunkt der ersteren mit 2 Mittelpunkten der letzteren und dem Mittelpunkt M die Ecken eines regelmässigen Tetraeders, weil alle 4 Abstände gleich dem doppelten Radius sind. Man hat also die 3 Tetraeder

$$(M_1M_4M_7M)\ (M_2M_5M_8M)\ (M_3M_6M_9M)$$

Nun liegen M_4MM_8 in einer Geraden. Die Projectionen der Pyramidenspitzen M_1 und M_2 auf M_4M_8 halbiren die Strecken M_4M

und MM_8. Folglich ist die von ihnen begrenzte Strecke gleich dem doppelten Radius. Diese Strecke ist wieder als Gegenseite eines Rechtecks $= M_1M_2$; daher berühren sich K_1 und K_2, analog je 2 Kugeln jedes äussern Kranzes. Grösser kann keine Kugel werden. Die Antwort ist also: „Wenn keine Kugel $< K$ ist, so können bei der genannten Anordnung nur alle Kugeln $= K$ sein."

Damit ist offenbar die Frage nach dem Maximum der Kugeln eines äussern Kranzes, wenn alle andern $= K$ sind, schon abgeschnitten; denn die Antwort folgt schon aus geringerer Voraussetzung.

Die Frage nach den möglichen Stellungen von lauter gleichen Kugeln ergibt jedoch noch 2 Lösungen. Die Mittelpunkte M_1, M_2, M_3 waren nämlich die Spitzen von 3 Pyramiden, deren Grundflächen keine Seite gemein haben. Zwischen diesen 3 Dreiecken liegen 3 andere. Alle 6 stossen nur in M zusammen. Man kann nun die entsprechenden Pyramiden auf der andern Seite der Aequatorebene entweder auf dieselben Dreiecke als Grundflächen bauen oder auf die 3 andern. Beide Fälle ergeben 2 wesentlich verschiedene Gesamtfiguren.

Die Berührungsbedingungen sind:

$$u^2 + z^2 = 4r^2; \quad u_1^2 = 4r^2$$

$$3u^2 = 4r^2; \quad \left(u - \frac{\sqrt{3}u_1}{2}\right)^2 + \frac{u_1^2}{4} + z^2 = 4r^2$$

woraus übereinstimmend hervorgeht:

$$u = \frac{2r}{\sqrt{3}}; \quad z = \frac{2\sqrt{2}r}{\sqrt{3}}; \quad u_1 = 2r$$

Die Kugeln K_1 bis K_{12} auf K central projicirt geben 12 Calotten, deren Inhalt in Gl. (3) gefunden ist. Zwischen ihnen liegen 8 gleichseitige concave Bogendreiecke. Erstere sind auch schon berechnet und ihr Inhalt in Gl. (6) angegeben.

Um letztere direct (d. h. nicht als Rest) zu berechnen, gehen wir von der vierkantigen Centralecke aus, deren Kanten durch die Mittelpunkte der 4 Bogen gehen, z. B. MM_1, MM_4, MM_5, MM_2. Die 4 Mittelpunkte sind die Ecken eines Quadrats über einer Seite $= 2r$. Hiernach sind die Seitenwinkel der Centralecke $(M) = \frac{1}{2}R$, für die Flächenwinkel ψ_1 findet man daraus

$$\cos\psi_1 = -\tfrac{1}{3} \quad \text{also} \quad \psi_1 = 2\mathrm{R} - \psi$$

und die Ecke wird

$$(M) = 4\psi_1 - 4R = 4R - 4\psi \qquad (11)$$

Die Centralprojection des obigen Quadrats auf K, d. i. $(M)r^2$ umfasst nun ausser dem gesuchten Bogenviereck Q_1 noch 4 Sectoren der Calotte P für den Centriwinkel ψ_1, zusammen $= \frac{\psi_1}{R} P$; folglich ist, mit Anwendung von Gl. (3),

$$Q_1 = (4R - 4\psi)r^2 - (2R - \psi)\,2(2 - \sqrt{3})r^2$$

Demnach sind die verschiedenen Figuren auf K: Kugelprojection, Calotte

$$P = 2(2 - \sqrt{3})R r^2 = 0{,}535\,8984\,R r^2$$

Projection des Raumes zwischen 3 Kugeln, sphärisches Bogendreieck

$$Q = (\tfrac{3}{2}\sqrt{3}\psi - 2R)r^2 = 0{,}035\,990\,R r^2$$

Projection des Raumes zwischen 4 Kugeln, sphärisches Bogenviereck

$$Q_1 = \{4(\sqrt{3} - 1)R - 2\sqrt{3}\psi\}r^2 = 0{,}213\,550\,R r^2$$

wo

$$\psi = \operatorname{arc\,tg} 2\sqrt{2} = 0{,}783\,6531\,R$$

Werte die (sogar unabhängig von ψ) die Relation

$$K = 12P + 8Q + 6Q_1 = 8R r^2$$

behufs ihrer Controle erfüllen.

Die hier getroffenen 2 Anordnungen zeichnen sich durch die Eigenschaft aus, dass 13 gleiche Kugeln sich in 36 Punkten berühren, und keine einzeln verschiebbar ist ohne eine Berührung aufzuheben. Die Mittelpunkte der 12 äusseren Kugeln bilden ein gleichkantiges Polyeder eingeschlossen von 6 Quadraten und 8 gleichseitigen Dreiecken, ist also ein tessarakaidekaeder eingeschrieben in eine Kugel von einem Radius gleich der Kante.

R. Hoppe.

2.

Ein Beitrag zur Lösung des Problems der Dreiteilung des Winkels.

Bekanntlich ist eine elementare Lösung des Problems der Trisection des Winkels bis jetzt noch nicht gegeben worden. Diese Tatsache hat in Mathematikerkreisen erst zur Hypothese und später zur Ueberzeugung geführt, dass eine elementare Lösung des Problems überhaupt unmöglich sei. Die hiefür beigebrachten Beweise

scheinen mir jedoch weder einwandfrei, noch streng genug zu sein, um die Aussichtslosigkeit jedes Lösungsversuches nach dieser Richtung hin zu begründen. Die im Nachfolgenden gegebene Lösung, bei welcher lediglich elementare Hilfsmittel angewendet werden, beruht auf der Theorie der Näherungsmethoden; liefert jedoch ein Resultat mit jedem gewünschten Grade von Genauigkeit. Die hiebei angewandte Methode kann immerhin als „elementar" bezeichnet werden, unter der Voraussetzung, dass alle Näherungsmethoden nicht ohne weiteres unter den Begriff des höhern Calcüls zu subsumiren sind. Dies scheint bei vorliegender Lösung jedoch tatsächlich der Fall zu sein, da wie erwähnt, nur elementare Hifsmittel zur Anwendung kommen. Von diesem Gesichtspunkte aus betrachtet, dürfte die nachstehend gegebene Lösung für die Beurteilung der Lösbarkeit des Problems jedenfalls von principieller Bedeutung sein.

Es sei ABC der in drei Teile zu teilende Winkel.

Man schneide mit dem beliebig gewählten Radius Aa auf den beiden Schenkeln die gleichen Strecken Aa, Ab ab und ziehe durch die so bestimmten Punkte a und b die zu den Schenkeln AB und AC parallelen Geraden ay und bz. Werden nun in gleichen Abständen von a, resp. mit stetig wachsenden Halbmessern Kreisbögen beschrieben ab, a^1b^1, . . . , $a^{20}b^{20}$, so sind je zwei zwischen den parallelen Geraden AB und bz, bzhw. AC und ay liegende Kreisbögen eines und desselben Kreises einander gleich, z. B.

$$a^{20}d^{20} = b^{20}c^{20}$$

Da die von den Geraden ay und bz eingeschlossenen Kreisbögen vom Schnittpunkt o nach beiden Seiten hin stetig wachsen, muss es notwendig einen von den Geraden ay und bz begrenzten Kreisbogen geben, welcher gleich ist zweien, von den Geraden AB und bz, bzhw. AC und ay abgeschnittenen Bögen. Zur Auffindung dieses Kreisbogens genügt die Erwägung, dass derselbe einerseits von der Geraden ay bzhw. bz geschnitten werden muss, mithin seine Endpunkte in den Geraden selbst liegen müssen, andrerseits, dass der eine Endpunkt in der Linie liegen wird, welche die Halbirungspunkte der aufeinander folgenden Kreisbögen a^6o, . . . $a^{21}c^{21}$ verbindet. Da sich diese Curve, wenn man hinreichend viele Kreisbögen halbirt, mit jedem beliebigen Grade von Genauigkeit construiren lässt, so kann auch ihr Schnittpunkt i mit der Geraden bz so genau, als man wünscht, bestimmt und damit der Teilungspunkt gefunden werden. Ein zweiter Teilungspunkt e kann auf ganz analoge Art innerhalb der Fläche Ab^6oa^6 gefunden werden. Selbst-

verständlich lassen sich zwei symmetrische Teilungspunkte in ähnlicher Weise auf der Strecke *bo* resp. oc^{21} bestimmen.

Bemerkt möge noch werden, dass ein auf der angegebenen Lösung beruhender, von mir construirter Apparat vom Kaiserl. Patentamte in Berlin für patentfähig erklärt wurde.

Lothar v. Köppen in München.

Litterarischer Bericht

II.

Methode und Principien.

Neue Bahnen in der Weltanschauung und Naturanschauung. Von Dr. F. C. Albert Kaiser. Dresden-A. 1892.

Dieser neue Versuch einer kosmischen Theorie mag vielleicht auf den ersten Seiten der Schrift einige Hoffnungen erwecken, dass darin den kosmischen Fragen eine freiere Kritik zuteil werden würde. In der Tat fängt die Schrift damit an den Blick zu erweitern und der Voreingenommenheit entgegen zu treten, gibt an, welche Sätze sie als sicher voraussetzt, und legt Wert auf Verständlichkeit. Was letztere betrifft, so ist es ja offenbar unmöglich ohne Entlehnung von Begriffen etwas zu erklären: wir stützen uns teils auf exact wissenschaftliche, teils auch auf vulgäre Begriffe, indem wir, was diese vermissen lassen, prüfen und ergänzen. Dies geschieht auch hier meistenteils, und wenn mitunter die Prüfung geläufiger Begriffe und Vorstellungen unterbleibt oder inexacte Sprache geführt wird, so wird der Leser wol entgegenkommend die Richtigstellung selbst übernehmen. Beispiele solcher inaxacter Rede sind der Misbrauch des Wortes „Tatsache" für Sätze, die der Verfasser nicht anfechten will, der Ausdruck „übernatürliche Ursache" statt unbekannte Ursache u. a. m. Aber von da an, wo der Verfasser seine Hypothese entwickelt, hört die Verbesserlichkeit seiner Redeweise auf. Gerade der wichtigste und elementarste Begriff, der der Ursache, über dessen Bedeutung sich das gemeine Denken gar keine Rechenschaft zu geben

pflegt, und der sich deshalb in der Wissenschaft nimmermehr aus dem vulgären Gebrauche, sondern nur aus der Wissenschaft entnehmen lässt, wird hier ohne alle Erklärung gewissermassen instinctmässig und ohne Kenntniss seiner Bedingungen verwandt. Wie es dem Naturforscher klar ist, und am einfachsten die Mechanik zeigt, bedeutet ursachliche Erklärung die Zurückführung der Veränderung auf unveränderliche Gesetze. Daraus folgt erstens, dass es keinen Sinn hat, für Vorgänge ebenso veränderliche Ursachen oder für unveränderliches Bestehen eine Ursache zu suchen, weil man damit keinen Gewinn an Erkenntniss hätte, zweitens, dass zur ursachlichen Ermittelung eines Bestandes oder Vorganges ausser den Kräften eine Epoche bekannt sein muss; denn um aus der Veränderung einer Sache zu schliessen, was sie geworden ist, muss man erst wissen, was sie gewesen ist. Beides lässt die Schrift ausser Acht. Sie beginnt mit der Bemerkung, dass, solange die Weltvorgänge den bekannten Gesetzen folgen, die Energie (in Form von Wärme) in einer Wandlung begriffen ist, die nicht periodisch zu ihrem Zustand zurückführen kann, da die Fixsterne Wärme an den Aether abgeben, von der sie nur einen sehr kleinen Teil zurückempfangen können, und lässt daraus resultiren, dass Stoff und Energie nicht ewig existiren, vor endlicher Zeit einen Anfang, nach endlicher Zeit ein Ende haben. Den Schwächen des Beweises brauchen wir nicht nachzugehen, da man bei Annahme des Resultats keine Gefahr läuft. Der verhängnissvolle Fehler liegt wo anders. Zunächst ist ein Misverständniss zu erwähnen. Der Verfasser citirt die Ansicht, dass die ursprünglich vorhandene nicht radiale Planetenbewegung keiner Erklärung bedürfe, weil Ruhe und Bewegung gleich mögliche Fälle seien, und nennt sie falsch in der irrigen Deutung, als ob diese Fälle coordinirt sein sollten, woran gewiss niemand gedacht hat. Unter den unbegrenzt vielen Fällen der Bewewegung ist vielmehr die Ruhe nur ein einzelner, hat also, wenn alle Fälle gleich wahrscheinlich sind, eine Wahrscheinlichkeit null, würde demnach noch eher einer Erklärung bedürfen, doch steht auch diese Frage auf gleicher Stufe mit der, warum dies oder jenes Phantasiewesen nicht erschaffen worden ist. Dem entgegen meint nun der Verfasser, die radiale Bewegung bedürfe einer Erklärung, die ursprüngliche Ruhe hingegen nicht, und stellt dazu folgende Hypothese auf. Die Körper sind in getrennten Zeiten plötzlich geschaffen und ursprünglich ruhend in solche Lagen gebracht, dass sich vermöge der kosmischen Attraction in unserer Zeit der wirkliche Bewegungszustand daraus ergiebt. Dass jedem Bewegungszustand des Körpersystems ein System vorausgehender Ruhelagen entspricht, wird behauptet, wiewol nicht begründet. Nimmt man es als richtig an, so ist damit die Epoche der Gesamtbewegung derart transformirt, dass

Digitized by Google

sie für alle Körper nicht mehr einer gemeinsamen Zeit, sondern lauter verschiedenen Zeiten zugehört. Diese Transformation nennt nun der Verfasser ursachliche Erklärung. Darin spricht sich sein unverbesserlicher Hauptirrtum aus. Die Epoche muss stets ausser jeder Ursache bekannt sein. Sieht man aber von der Bedeutung der Ursache ab, so fehlt noch immer jede wünschenswerte Leistung für Verständlichkeit. Statt der einfachen und jederzeit durch Beobachtung zu ermittelnden Elemente einer Epoche werden wir durch jene Transformation auf das Denken unzähliger unbekannter, nur durch Lösung unlöslicher Probleme bestimmbarer Elemente hingewiesen und noch dazu erst mit Zulassung unstetiger Weltvorgänge. Was nun den Gesamtinhalt des Buchs betrifft, so weist das Verzeichniss eine Reihe behandelter Themata auf, deren Titel wol Aufmerksamkeit erregen können, nicht sowol weil sie Aufklärung über alte bekannte Fragen, sondern weil sie unter neuem Namen neue Gedanken erwarten lassen. Der Fehler ist aber überall derselbe, oben charakterisirte: statt angeblicher Erklärung findet man nur Transformation des Einfachen in Complicirtes.

Hoppe.

Premières leçons d'algèbre élémentaire. Nombres positifs et négatifs. — Opérations sur les polynomes. Par Henri Padé, Ancien Elève de l'Ecole Normale Supérieure, Professeur Agrégé de l'Université. Avec une préface de Jules Tannery, Sous-directeur des études scientifiques à l'Ecole Normale Supérieure. Paris 1892. Gauthier-Villars et fils.

Das Buch beginnt mit einer Einleitung, welche die successiven Erweiterungen des Zahlbegriffs entwickelt. Eigentümlich ist, dass die negativen Zahlen erst nach den Brüchen und Irrationalen eingeführt werden. Es kam dem Verfasser wol nur darauf an, das vollständige Ensemble des Gegenstandes der Arithmetik vorzuführen. Die ganze vorgetragene Lehre nimmt hiervon keine Notiz; dagegen wird die Darstellung der Zahl als Strecke besonders behandelt; von der besondern Natur der Zahlarten (hier Ordnungen genannt) ist nirgends die Rede ausser von der der Null, die in der Einleitung vergessen zu sein scheint. Ob die Buchstaben natürliche oder beliebige Zahlen bedeuten sollen, wird nicht ausgesprochen. Der Inhalt des Buches ist wenig mehr als Mitteilung der gebräuchlichen Terminologie. Sätze kommen nur in geringer Anzahl vor; die Addition wird etwas eingehender behandelt. Am Schlusse handelt es sich um die Identität von Polynomen; es ist nicht wol zu verstehen, wie dies Thema, was zur Analysis gehört, in die Elementararithmetik hineinkommt, wo von variabeln Grössen nie die Rede ist. Die Vorrede von Tannery gibt

Digitized by Google

uns hierüber sowie über alles, was das Buch im Dunkeln lässt, nicht den geringsten Aufschluss. Hoppe.

Principles of the algebra of physics. —

The imaginary of algebra being a continuation of the paper „Principles of the algebra of physics". —

On the definitions of the trigonometric functions. —

The fundamental theorems of analysis generalized for space. —

On exact analysis as the base of language. — — — By Alexander Macfarlane, M. A., D. Sc., L. L. D., Fellow of the Royal Society of Edinburgh, Professor of physics in the university of Texas. Norwood Press 1891. 1892.

Die 4 ersten Schriften enthalten die genauern Bestimmungen und Einführungen, mittelst welcher der Verfasser bestrebt ist die Quaternionentheorie exact zu machen, nebst historischen Angaben; die letztgenannte Schrift, Abdruck aus Transactions of the Texas Academy of Science, die Anwendung dieser Theorie für eine Weltsprache. Hoppe.

Uniplanar algebra, being part I of a propaedeutic to the higher mathematical analysis. By Jrving Stringham, ph. D., Professor of mathematics in the university of California. San Francisco 1893. Berkeley press.

Algebra bedeutet die Lehre von der allgemeinen Grösse, wie sie der Analysis zugrunde liegt. Die Methode ist die geometrische. Die Grössen und ihre Addition werden durch Strecken, die Multiplication durch Proportionen an geschnittenen Parallelen, die Potenzirung durch Spiralcurven dargestellt. Ferner werden die Lehren von den cyklischen Functionen, von graphischen Transformationen von den Gleichungen und complexen Wurzeln entwickelt.

H.

Inhalt und Methode des planimetrischen Unterrichts. Eine vergleichende Planimetrie. Von Dr. Heinrich Schotten. Zweiter Band. Leipzig 1893. B. G. Teubner.

Der erste Band dieses Werkes ist nicht in diesem Archiv, aber in vielen andern Zeitschriften besprochen, welche nach Aussage des Verfassers sich sämtlich anerkennend darüber äussern. Da darin lauter gesonderte Themata behandelt werden, so ist überhaupt kein

Digitized by Google

Anlass auf den ersten Band zurück zukommen. Die Themata des 2. Bandes sind: Richtung, Abstand, Winkel, Parallelen, 4 Grundbegriffe, deren doctrinäre und methodische Behandlung jahrtausende lang eine offene Frage geblieben ist. Es liegt hier ein Fall vor, der gar nicht einzig in der Geschichte der Wissenschaften dasteht: grosse Anhäufung von Litteratur ohne sichtlichen Fortschritt. Er fordert natürlich dazu auf, die grösstenteils einander ignorirenden Bestrebungen durch übersichtliche Nebeneinanderstellung der Ansichten zusammenzuführen. Einer gleichen Absicht entsprechend zeigt sich auch das gegenwärtige Unternehmen, welches zunächst die jene Grundbegriffe betreffende und zwar auf die Lehrmethode gerichtete Litteratur zusammenstellt. Um die an einem analogen Unternehmen gemachten Erfahrungen nutzbar zu machen, sei das von Baumann: „Raum und Zeit" — erwähnt, worin die Litteratur über beide Begriffe vom Altertum bis in die neuste Zeit zusammengestellt ist. Dass hier die Gesichtspunkte des Unterrichts nicht ins Spiel kommen, macht keinen wesentlichen Unterschied; denn Klarheit der Sache ist doch jedenfalls erstes Erforderniss, ehe man daran denken kann sie zu lehren. Baumann versucht am Schlusse den Begriff des Raumes aus allen Ansichten als Resultat zu ziehen. Die Aufstellung ist 6 Seiten lang und enthält nur negative Bestimmungen. Es ergibt sich also, wie sich erwarten liess, dass der Gedanke verfehlt war. Wenn man öfters von divergirenden Meinungen sagt, dass die Wahrheit in der Mitte liegen wird, so gilt in der Wissenschaft sicher das Gegenteil, die Wahrheit liegt stets ausserhalb der nicht befriedigenden Meinungen. Soll also eine Zusammenstellung vieler sich nicht einigenden Ansichten einen Fortschritt anbahnen, so muss sie mit einer Kritik verbunden sein darauf gerichtet Ungründlichkeit und Befangenheit als Ursache des Stagnirens ans Licht zu ziehen. In der Tat lässt sich das Werk von Schotten mehr auf Kritik ein als das von Baumann, wenn auch nicht in allen Punkten, wo es zu wünschen wäre. Es sei voraus bemerkt, dass wir die Würdigung des Verdienstes, dass sich der Verfasser durch das Werk erworben hat, nicht von der geübten Kritik abhängig machen wollen, indem wir gegen einen principiellen Punkt derselben Einspruch tun. Einleitend erklärt der Verfasser Richtung und Abstand für die 2 Elemente, welche die Lage eines zweiten Punkts B relativ zu einem ersten A bestimmen. J. C. V. Hoffmann, welcher als erster Autor auftritt, sagt nun: „Richtung setzt voraus ein Ziel und einen Ausgangspunkt". Schotten fügt interpretirend hinzu, dass das Ziel nur ein zweiter Punkt sein kann, und erklärt sich mit Hoffmann darin einverstanden, dass mit dem Setzen der 2 Punkte A, B, letzteren als Ziel gedacht, die Richtung gegeben sei. Dies ist ein verhängnisvoller Irrtum. Durch das Ziel B ist erst das Problem gestellt,

Digitized by Google

von A aus B zu erreichen, aber noch nicht gelöst. Ist von A aus B nicht sichtbar, so kann man es in der ganzen Welt vergeblich suchen. Kann man es sehen, so ist ein Lichtstrahl BA, das ist (geometrisch) eine Gerade, gegeben und der Punkt B überflüssig. Man kommt also, erst durch Berichtigung, nur auf die gewöhnliche Erklärung der Richtung durch eine Gerade zurück. Hiermit ist indes die Frage nach dem Begriffe der Richtung keineswegs erledigt. Der gefundene ist offenbar bedeutungslos; denn er fügt als Eigenschaft der Geraden nichts zum Wesen der Geraden hinzu. In der Tat ist auch die absolute Richtung ohne Bedeutung und gewinnt sie erst als relative. Beachtet man dies, so entsteht die Frage: Wie kann man die qualitative Verschiedenheit der Richtung exact quantitativ darstellen? — und findet ihre Lösung in der Einführung des Winkels und der Theorie seiner Messung. So ist denn der Grundfehler, der bisher die exacte Definition der Richtung vereitelt hat, der, dass man die Richtung, ihrer bekannten relativen Natur zuwider, durchaus hat absolut bestimmen wollen, anstatt sich mit ihrer einfachsten Darstellung durch eine Gerade solange zu begnügen, bis die Einführung des Winkels (als Winkelfigur) das Mittel bietet, sie in ihrer Relativität zu einer festen Richtung zu definiren. Dieser Fehler hat nun, wie die beigebrachte Litteratur zeigt, verwirrend auf die methodische Behandlung des Winkels eingewirkt. Wo überhaupt die Betrachtung von Richtungen zugezogen wird, findet sich das Deductionsverhältniss verkehrt aufgefasst, als ob der Begriff des Winkels auf die Richtungen der Schenkel gegründet werden sollte, möchten die Richtungen nun definirt sein oder nicht, während in Wirklichkeit der Begriff der Richtung nur auf den Winkel gegründet werden kann. Dem Verfasser fällt es auf, dass die meisten Autoren, die von Richtungen reden, den Begriff undefinirt lassen; den Grund dieser Erscheinung enthüllt er nicht. Hoppe.

Die Schalablagerungstheorie. I. II. Eine Erweiterung der Laplace'schen Nebularhypothese. Von Ferdinand Kerz. Leipzig und Berlin 1891. 1892. Otto Spamer.

Soviel sich aus dem geringen Teile der beiden Schriften, der wirklich der Sache gewidmet ist, entnehmen lässt, will der Verfasser, der Laplace'schen Entstehung der Planeten aus der Sonnenatmosphäre folgend, nun die besondere Gestalt der Erde aus diesem Ursprung herleiten, namentlich die Gebirge als von aussen angeworfen erklären. Doch hätte er seine Ansicht wol in besserer Ordnung entwickeln können. Hoppe.

Digitized by Google

Lösung des Problems: Die Quadratur des Kreises. Berichtigung der Zahl π. Von Oscar Flor, cand. phys. Riga 1892. Alexander Stieda.

Eine 8 Seiten lange Rechnung ergibt: $\pi = 3{,}2$. Wo liegt der Fehler? H.

Entwurf einer neuen Integralrechnung auf Grund der Potenzial-, Logarithmal- und Numeralrechnung. Von Dr. Julius Bergbohm. Die rationalen algebraischen und die goniometrischen Integrale. — Zweites Heft: Die irrationalen, exponentiellen, logarithmischen und cyklometrischen Integrale. Leipzig 1892. B. G. Teubner.

Der auch dieser Schrift zugrunde liegende Irrtum des Verfassers ist noch derselbe wie in seinen früheren, bereits besprochenen Schriften. Hoppe.

Die Quadratur des Kreises. Von Dr. Andr. Ozegowski. Ostrowo 1893. W. Niesiolowski.

Am Schlusse einer Reihe teils selbstverständlicher, teils unrichtiger Aussagen, meist ohne sichtlichen Zusammenhang, wird angegeben, der Kreisumfang sei $\frac{48}{7}$ des Radius. Hoppe.

Kritische Grundlegung der Arithmetik. Von Heinrich Kloock. Bonn 1893. Röhrscheid u. Ebbecke.

Der erste der 4 Abschnitte gibt Aufzeichnungen des Verfassers im Auszug aus seiner Schrift: „Neue Arithmetik“ — nach Zeit, Gegenständen und Resultaten, die übrigen eine Kritik der Arithmetik von Euklid, Euler und Dühring. In systematischer Form beabsichtigt er die arithmetischen Hauptlehren noch herauszugeben. Aus der Kritik, welche sich fast ausschliesslich auf die Negativen und Imaginären bezieht, die Irrationalen kaum erwähnt und unter den Erweiterungen des Zahlbegriffs gar nicht mit aufführt, lässt sich keine Andeutung entnehmen, welche definitive Gestalt der Verfasser den Lehren zu geben im Sinne hat, zumal Einfachheit und Entfernung aller Subtilitäten nirgends als Ziel erscheint. Auf diejenigen Transformationen der Begriffe, welche der erfolgreiche Gang der Wissenschaft fordert, muss auch die principielle Kritik eingehen; davon kann sie auch die Nichtexistenz der eingeführten Rechnungselemente nicht entbinden. Die Bedeutung unmög-

Digitized by Google

licher Gleichungen, die Rechtfertigung approximativer Darstellung von Grössen u. s. w. alles dies ist bekannt genug. Dies ist in gegenwärtiger Kritik nicht ganz unbeachtet geblieben, doch erscheint es nicht als leitender Gedanke. H.

Die nichteuklidische Geometrie vom Altertum bis zur Gegenwart. Eine historisch-kritische Studie. Von Dr. A. Karagiannides. Berlin 1893. Mayer u. Müller.

Die Schrift beschränkt sich darauf, charakteristische Aufstellungen mit wörtlicher Wiedergabe vorzuführen und zu beurteilen ohne auf Deduction und Begründung weiter einzugehen als es die Deutlichkeit erfordert. Das Altertum wird nur in dem Sinne als beteiligt hineingezogen, sofern alle Versuche den Parallelensatz zu beweisen nichteuklidisch sind; um solche handelt es sich von da an nicht weiter. Es werden dann die Aeusserungen von Gauss, Lobatschewski, Riemann, Helmholtz, Klein, Poincaré und Weierstrass beleuchtet. Zum Schlusse stellt der Verfasser, angeblich als Zusammenfassung der vorhergehenden Kritik 5 Sätze auf, deren letzter lautet: „Die verschiedenen sogenannten nichteuklidischen Geometrien sind tatsächlich nichts weiter als eine ganz willkürliche façon de parler ohne wissenschaftliche Bürgschaft und Ueberzeugung.“ Dies mag wol den Eindruck aussprechen, den auf ihn das Vorgehen von Poincaré gemacht hat. Hoppe.

Grundgesetze der Arithmetik. Begriffsschriftlich abgeleitet von Dr. G. Frege, A. O. Professor an der Universität Jena. I. Band. Jena 1893. Hermann Pohle.

Laut Vorwort sind die negativen, gebrochenen, irrationalen und complexen Zahlen, die Addition, Multiplication u. s. w. von der Betrachtung ausgeschlossen. Was dann von Arithmetik noch übrig bleibt, ist das Zählen, und hiervon in der Tat handeln die am Schlusse in Worten aufgestellten Grundgesetze. In wiefern aber diese ziemlich complicirten Gesetze Grundlage irgend eines Teils der Arithmetik sein können, wird vielleicht der 2. Band enthüllen, wenn er über Gesichtspunkte weniger schweigsam ist als der erste. Hoppe.

Digitized by Google

Tabellen.

Vierstellige logarithmische Tafeln der natürlichen und trigonometrischen Zahlen nebst den erforderlichen Hilfstabellen. Für den Schulgebrauch und die allgemeine Praxis bearbeitet von E. R. Müller. Stuttgart (1893). Julius Maier.

Ausser den genannten 2 Tafeln steht auf denselben 32 Seiten noch eine Tafel für die Logarithmen von Summen und Differenzen. Die Tafel der Briggs'schen Logarithmen ist für die Zahlen 1000 bis 3000 und 300 bis 1000 ausgeführt, die der trigonometrischen Functionen für alle Minuten mit feinerer Teilung für kleine Winkel. H.

Vierstellige logarithmisch-trigonometrische Tafeln nebst einigen physikalischen und astronomischen Tafeln, für den Gebrauch an höheren Schulen zusammengestellt von C. Rohrbach, Dr. phil. Oberlehrer am Gymnasium Ernestinum zu Gotha. Gotha 1893. E. F. Thienemann.

Die Logarithmen sind ausgeführt für die Zahlen 1 bis 2000. Am Ende jeder Zeile ist zu leichterer Vergleichung der Anfang der folgenden hinzugefügt. Die Winkelteilung geht bis auf Zehntel Grad, für kleine Winkel bis auf Minuten. H.

Fünfstellige Tafeln für die Zehner-Logarithmen der natürlichen und trigonometrischen Zahlen. Herausgegeben von Josef Schnellinger, k. k. Professor. Wien 1892. Manz.

Der Verfasser hat erfinderisch dafür gesorgt den Fehler der abgekürzten Angaben zu verkleinern. Die Anweisung dazu ist nicht leicht zu verstehen. Und sollte er während der grossen Arbeit nicht gemerkt haben, dass man das Beabsichtigte viel leichter und viel besser haben kann? Statt des Buchstabens oder Zeichens, das er hinter jeden Decimalbruch setzt, brauchte er nur die nächst folgende Decimalziffer zu schreiben; dann hätte sich der Fehler auf ein Zehntel seines Wertes verkleinert, was er doch mit aller Mühe noch lange nicht erreicht. Hoppe.

Sammlung fünfstelliger logarithmischer, trigonometrischer und nautischer Tafeln nebst Erklärungen und Formeln der Astronomie. Von Dr. W. Ligowski, Professor an der Kaiserlichen Marine-Akademie und Schule in Kiel. Zweite Auflage. Kiel 1892. Paul Toeche.

Digitized by Google

Laut Vorwort sind die Tafeln vor einigen Jahren bei der Kaiserlichen Kriegsmarine eingeführt worden. Sie enthalten alle Tabellen, welche für die Berechnungen der praktischen Nautik, bei Benutzung des nautischen Jahrbuchs, nötig sind, in einer Form, welche den Gebrauch der meisten derselben auch für andere Anwendungen der Mathemathik bequem gestattet. Die im nautischen Jahrbuch befindlichen Hülfstafeln, sowie einige weniger wichtige Tafeln sind in dieser Auflage fortgelassen und dafür andere, zur Abkürzung der Berechnungen dienende aufgenommen worden. Der Anhang I. hat einige Erweiterungen erhalten; unter anderem hat der Verfasser eine einfache Methode gegeben, nach welcher ohne besondere Tafeln eine zweite Correction der Reduction auf den Meridian bestimmt werden kann. H.

Physik.

Die Mechanik der Wärme in gesammelten Schriften von Robert Mayer. Dritte, ergänzte und mit historisch-litterarischen Mitteilungen versehene Auflage. Herausgegeben von Dr. Jacob J. Weyrauch, Professor an der technischen Hochschule zu Stuttgart. Stuttgart 1893. J. G. Cotta.

Die Abschnitte des Buches sind folgende: Bemerkungen über die Kräfte der unbelebten Natur; die organische Bewegung in ihrem Zusammenhange mit dem Stoffwechsel; Beiträge zur Mechanik des Himmels; Bemerkungen über das mechanische Aequivalent der Wärme; über die Herzkraft; über das Fieber; über notwendige Consequenzen und Inconsequenzen der Wärmemechanik, über Erdbeben; über die Bedeutung unveränderlicher Grössen; über die Ernährung; über veränderliche Grössen; die Toricelli'sche Leere; über Auslösung. H.

Die Lehre von der Elektricität. Von Gustav Wiedemann. Zweite umgearbeitete und vermehrte Auflage. Zugleich als vierte Auflage der Lehre vom Galvanismus und Elektromagnetismus. Erster Band. Mit 298 Holzstichen und 2 Tafeln. Braunschweig 1893. Friedrich Vieweg und Sohn.

Der erste Band enthält: historische Einleitung, Erregung und Eigenschaften der Elektricität, Berührungselektricität, das Ohm'sche Gesetz, Leitungswiderstand, elektromotorische Kraft, Galvani'sche Elemente bei Leitern, Elektricitätserregung bei Berührung von Nicht-

Digitized by Google

leitern, bei Aenderung des Aggregatzustandes, Elektrisir- und Influenzmaschinen, Strömungsströme, elektrische Endosmose. Bei einer Lehre von der Elektricität kann natürlich an keine systematische Theorie gedacht werden. Sie gibt vielmehr die zu Gebote stehenden Mittel an, durch Beobachtung und Rechnung die Erscheinungen, ihre Gesetze und die sie betreffenden Fragen zu untersuchen, was vielleicht bisher in keinem Gesamtwerke so vollständig nach heutigem Standpunkte geschehen ist. H.

Einleitung in die theoretische Physik von Viktor von Lang, Professor der Physik an der Universität Wien. Zweite, umgestaltete und vermehrte Auflage. Mit 126 eingedruckten Holzstichen. Braunschweig 1891. Friedrich Vieweg und Sohn.

Das Buch umfasst die Mechanik, die Lehren von der Schwere, dem Magnetismus, der Elektricität, den festen Körpern, Flüssigkeiten, Gasen, Licht und Wärme. Es ist dazu bestimmt den Uebergang von den Mittelschulen zum Studium zu erleichtern. Bekanntschaft mit der Differentialrechnung wird vorausgesetzt, ist also vorerst zum Verständniss einiger Beweise zu erwerben. Grösser als diese Forderung möchte jedoch die sein, die nötige Vertrautheit mit dem Experimentiren zu erlangen. H.

Thermodynamische theorie der capillariteit in de onderstelling van continue dichtheidsverandering. Door J. D. van der Waals. Amsterdam 1893. Johannes Müller. (Verhdl. d. Kon. Ak. v. Wet. te Amsterdam, 1. sectie, deel 1. Nr. 8.)

La Place und Gauss behandelten die Capillaritätstheorie als statisches, Gibbs infolge der neuen Wärmetheorie als dynamisches Problem. Von letzterer Auffassung unterscheidet sich wieder die gegenwärtige, sofern jene unstetige, diese nur stetige Dichtigkeitsänderung zulässt. Grundprincip des thermodynamischen Gleichgewichts ist hier: Ein Stoff erfüllt einen gegebenen Raum so, dass bei gegebener Energie die Entropie ein Maximum ist. H.

Ueber elektrische Kraftübertragung, insbesondere über Drehstrom. Ein gemeinverständlicher Experimentalvortrag. Von Braun, o. ö. Prof. der Physik an der Universität Tübingen. Tübingen 1892. H. Laupp.

Der ursprüngliche Vortrag erläutert die auf der internationalen elektrotechnischen Ausstellung in Frankfurt a. M. in grossem Masse

Digitized by Google

vorgeführte elektrische Kraftübertragung zwischen Frankfurt und Lauffen a. Neckar. Die gedruckt vorliegende Wiedergabe fügt manche Belehrung hinzu und ersetzt Gezeigtes durch Abbildungen.

H.

Lehrbuch der absoluten Masse und Dimensionen der physikalischen Grössen. Mit 352 Fragen, 545 Erklärungen und einer Sammlung von 561 gelösten und ungelösten Aufgaben. Von Dr. H. Hovestadt. Stuttgart 1892. Julius Maier.

Das Vorliegende ist ein Band von „Kleyers Encyklopädie". Die ganze Lehre ist in eine Reihe von Fragen und Antworten mit einzeln beigefügten Erklärungen zerfällt. Ausser einer historischen Einleitung ist nichts im Zusammenhang vorgetragen. H.

On the electric strength of solid, liquid ond gaseous dielectrics. By Alexander Macfarlane and C. W. Pierce. The Physical Review. Vol. I. Nr. 3.

Macfarlane und später Steinmetz hatten übereinstimmend gefunden, dass die erforderliche elektrische Spannung, bei welcher ein Funke eine dielektrische Schicht durchbricht, deren Dicke umgekehrt proportional ist für liquide (nicht angegeben welche) und gasförmige Dielektrika, für feste hingegen constant. Aus den hier beschriebenen Versuchen von Pierce folgt aber, dass sich liquide (vielleicht andere?) Schichten ebenso verhalten wie feste, und nur Gase eine Ausnahme machen — eine Mitteilung zugleich als Lebenszeichen der neuen Zeitschrift, welche in New York bei Macmillan u. Co. seit Aug. 1893 zweimonatlich erscheint. H.

Beiträge zu einzelnen Teilen der mathematischen Physik, insbesondere der Elektrodynamik und Hydrodynamik, Elektrostatik und magnetischen Induction. Von Dr. Carl Neumann, Professor der Mathematik an der Universität Leipzig. Mit Figuren im Text. Leipzig 1893. B. G. Teubner.

Der Verfasser constatirt zunächst, dass die bis jetzt aufgestellten mechanischen Theorien der Wärme, Elektrodynamik und des Magnetismus in ihren Consequenzen zu Widersprüchen führen. Demzufolge sei nicht darauf zu rechnen, dass es möglich sei diese Forschungszweige auf den Boden der reinen Mechanik zu gründen, vielmehr

Digitized by Google

scheine ein jeder ausserdem sein eignes Princip zu haben. Eine definitive Grundlegung könne erst auf längerem Wege erhofft werden; die gewonnenen Erfolge auf rein mechanischer Basis seien eine Vorbereitung dazu; das erste müsse nun sein, durch Anwendung auf allerhand Aufgaben die Consequenzen zu studiren. Derartigen Untersuchungen sei das vorliegende Werk gewidmet. Die Gegenstände sind bezeichnet: Präliminarien (Geometrie betreffend); zur Elektrodynamik; über elektrische Flächenströme; über elektrische Ströme im Innern und an der Oberfläche eines Körpers; zur Hydrodynamik; das Hamilton'sche Princip in seiner Anwendung auf hydrodynamische Probleme; über die Analogien zwischen Hydrodynamik und Elektrodynamik; zur Elektrostatik; zur Theorie des inducirten Magnetismus; über die Verwandlung eines gegebenen Raumes in einen einfach zusammenhängenden. H.

Digitized by Google

Mathematische und physikalische Bibliographie.

XLII.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Frobenius, G., Gedächtnissrede auf Leopold Kronecker. Berlin, Georg Reimer. 1 Mk. 50 Pf.

Kundt, A., Gedächtnissrede auf Werner v. Siemens. Ebd. 1 Mk. 50 Pf.

Mayer, R., kleinere Schriften u. Briefe. Nebst Mittheilgn. aus seinem Leben. Hrsg. v. J. J. Weyrauch. Stuttgart, J. G. Cotta Nachf. 10 Mk.

Obenrauch, F. J., Mumge, der Begründer der darstellenden Geometrie als Wissenschaft. Eine mathematisch-histor. Studie. Progr. Brünn, Selbstverlag. 2 Mk.

Obermayer, A. v., zur Erinnerung an Josef Stephan, k. k. Hofrath u. Professor an der Universität in Wien. Wien, W. Braumüller. 1 Mk. 40 Pf.

Methode und Principien.

Doms, Frz., Doms'sche Rechnenmethode. Hrsg. v. Alfr. Doms. Berlin, Friedländer's Buchdr. 2 Mk.

Frege, G., Grundgesetze der Arithmetik. Begriffsschriftlich abgeleitet. 1. Bd. Jena, H. Pohle. 12 Mk.

Gallasch, H., die Grundlagen der Algebra im Kant'schen Sinne. Progr. Berlin, R. Friedländer & Sohn. 1 Mk. 20 Pf.

Karagiannides, A., die nichteuklidische Geometrie vom Alterthum bis zur Gegenwart. Eine historisch-krit. Studie. Berlin, Mayer & Müller. 1 Mk. 60 Pf.

Digitized by Google

Ożegowski, A., .die Quadratur des Kreises. Ostrowo, W. Niesiolowski. 1 Mk. 50 Pf.

Schneiders, G., die Naturphilosophie des Himmels. Eine neue Wechselwirkungstheorie. Aachen, C. Mayer's Verl. 1 Mk.

Steuer, W., Methodik des Rechenunterrichts. 5. Afl. Breslau, M. Woywod. 4 Mk. 50 Pf.; geb. in Leinw. 5 Mk. 25 Pf.

Tischner, A., l'astronomie des astronomes. Leipzig, G. Fock. 1 Mk.

Sammlungen.

Adam, W., geometrische Analysis u. Synthesis. Eine Sammlg. v. 636 planimetrischen Konstruktions-Aufgaben m. reingeomtr. Lösg. Für höhere Lehranstalten, sowie zum Gebrauch beim Selbstunterricht systematisch geordnet u. bearb. 2. Afl. Potsdam, A. Stein. 4 Mk.

Bardey, E., algebraische Gleichungen, nebst den Resultaten u. den Methoden zu ihrer Auflösg. 4. Afl. Leipzig, B. G. Teubner. 6 Mk.

Elsner, A., u. R. Sendler, Rechenbuch f. Lehrerseminare. Im Anschlusse an Dorn's Rechenhefte bearb. Breslau, H. Handel. 2 Mk. 20 Pf.

Kleyer, A., vollständig gelöste Aufgaben-Sammlung aus allen Zweigen der Rechenkunst, der niederen und höheren Mathematik, der Physik etc. 1218.—1227. Hft. Stuttgart, Jul. Maier. à 25 Pf.

Lieb, Seyfferth, Tillmann, Rechenschule. Ausg. f. Lehrer. Mit Ergebnissen, method. Ausführgn. u. weiteren Uebungsaufgaben. C II u. D II. Nürnberg, F. Korn. 2 Mk. 70 Pf.

Schubert, H., Aufgaben aus der Arithmetik u. Algebra f. Real- u. Bürgerschulen. Ein Auszug aus der Sammlg. v. arithmet. Fragen u. Aufgaben. 2. Hft. Potsdam, Stein. 1 Mk.

Werth, R., Rechenbuch f. gewerbliche Fortbildungsschulen. II. Tl. Flächen- u. Körperberechngn. 2. Aufl. Duisburg, J. Ewich. Kart. 60 Pf.

Tabellen.

Gauss, F. G., polygonometrische Tafeln. Zum Gebrauche in der Landmessg. f. die Teilg. des Quadranten im 90. Grade zu 60 Minuten. Halle a./S., E. Strien. Geb. in Leinw. 12 Mk.

Rohrbach, C., vierstellige-logarithmisch-trigonometrische Tafeln, f. den Gebrauch an höheren Schulen zusammengestellt. Gotha, E. F. Thienemann's Verl. 60 Pf.

Stolz, O., Grundzüge der Differential- u. Integralrechnung. 1. Thl.: Reelle Veränderliche u. Funktionen. Leipzig, B. G. Teubner. 8 Mk.

Digitized by Google

Arithmetik, Algebra und reine Analysis.

Bohl, R., üb. die Darstellung v. Funktionen einer Variabeln durch trigonometrische Reihen m. mehreren d. Variabeln proportionalen Argumenten. Diss. Dorpat, E. J. Karow. 1 Mk. 20 Pf.

Chittenden, J. Brace, representation of the theory of Hermite's form of Lamé's equation with a determination of the explicit forms in terms of the p function for the case n equal to three. Diss. Leipzig, B. G. Teubner. 2 Mk. 80 Pf.

Gravelius, H., Lehrbuch der höhern Analysis. Zum Gebrauch bei Vorlesgn. an Universitäten u. techn. Hochschulen. I. Bd.: Lehrbuch der Differentialrechng. Berlin, F. Dümmler's Verl. 6 Mk.

Mertens, F., üb. die Bestimmung e. Fundamentalsystems f. e. gegebenen Gattungsbereich algebraischer Functionen e. Veränderlichen. Wien, F. Tempsky. 50 Pf.

Schwering, K., Anfangsgründe der Arithemetik u. Algebra f. höhere Lehranstalten. Freiburg, Herder. 1 Mk.; Einbd. 30 Pf.

Wallentin, F., Lehr- und Uebungsbuch der Arithmetik f. die 1.—4. Classe der Gymnasien. Wien, C. Gerold's Sohn. 1. u. 2. Thl. 4. Afl. 1 Mk. 50 Pf.; geb. 1 Mk. 40 Pf. — 3. u. 4. Thl. 3. Afl. 1 Mk. 10 Pf.; geb. 1 Mk. 40 Pf.

Geometrie.

Barthels, E. L., Lehrbuch der Stereometrie u. Trigonometrie in ausführlicher Darstellung. Nebst e. Anh., enth.: Die Regeln über Potenz-, Wurzel-, Gleichungs-, Reihen- u. Logarithmenlehre. Wiesbaden, H. Sadowsky. 2 Mk. 80 Pf.

Dolin, C., üb. zwei ebene Punktsysteme, die algebraisch auf einander bezogen sind. Diss. Lund, H. Möller's Univ.-Buchh. 1 Mk. 60 Pf.

Dorr, R., e. praktisch ausführbare Lösung des Problems der beliebigen Winkeltheilung. A. Beschreibung des Winkeltheilungsverfahrens, das ohne Anwendg. e. besonderen Instruments auszuführen ist. B. Beschreibung zweier f. das Deutsche Reich patentirter Winkeltheilungsinstrumente. Elbing, C. Meissner. 3 Mk.

Ebner, K., Leitfaden f. den Unterricht in der Geometrie an Sekundärschulen. II. Hft. St. Gallen, Huber & Co. Kart. 80 Pf.; Schlüssel 40 Pf.

Eggers, W., Lehrbuch der darstellenden Geometrie. Leipzig, A. Seemann. Kart. 1 Mk. 50 Pf.

Hercher, B., Lehrbuch der Geometrie zum Gebrauch an Gymnasien. Nach den neuen preuss. Lehrplänen bearb. 3 Hfte. Leipzig, C. Jacobsen. 3 Mk.

Digitized by Google

Lengauer, J., die Grundlehren der ebenen Geometrie. Ein Leitfaden f. den Unterricht m. Uebungsaufgaben. 4. Afl. der Ebenen Geometrie v. A. Stegemann. Kempten, J. Kösel. 2 Mk.

Müller, C. H., astrometrische Konstruktionen. Projektions-Lehre f. die Prima des Gymnasiums. Progr. Frankfurt a./M., J. Ch. Hermann. 1 Mk.

Schlotke, J., Lehrbuch der darstellenden Geometrie. II. Tl. Schatten- u. Beleuchtungslehren. Dresden, G. Kühtmann. 2 Mk.; kart. 2 Mk. 20 Pf.

Sellentin, R., Grundriss der Geometrie f. höhere Lehranstalten m. zahlreichen Uebungsaufgaben u. in den Text gedruckten Figuren. 1. Tl. Planimetrie. Köhn, Du Mont-Schauberg. 2 Mk. 40 Pf.

Sobotka, J., zur Construction der Osculationshyperboloide windschiefer Flächen. Prag, F. Rivnáč. 40 Pf.

Trigonometrie.

Schwering, K., Anfangsgründe der Trigonometrie f. die 6. Stufe höherer Lehranstalten, nach den neuen Lehrplänen bearb. [Aus: „Trigonometrie f. höhere Lehranstalten".] Freiburg i./B., Herder. 20 Pf.

— Trigonometrie f. höhere Lehranstalten. Nach den neuen Lehrplänen bearb. Ebd. 80 Pf.; Einbd. in Halbleinw. 30 Pf.

Praktische Geometrie, Geodäsie.

Hammer, E., Zeitbestimmung (Uhr-Controle) ohne Instrumente. Durch Benutzung der Ergebnisse einer Landesvermessung. Allgemein verständlich dargestellt. Mit Tafeln der Sonnen-Deklination u. der Zeit-Gleichg. f. 1883 bis 1886 u. e. Fig. Stuttgart, J. B. Metzler's Verl. 2 Mk.

Wellisch, S., die Berechnungen in der praktischen Polygonometrie. Mit e. Aufstellg. v. Fehlergrenzen f. die Zugmessg. Handbuch f. Vermessungsingenieure u. Geometer. Wien, Spielhagen & Schurich. 2 Mk.

Mechanik.

Daltrop, V., die Gesetze des Fluges. Breslau, J. Max & Co. 80 Pf.

Lutschaunig, V., die Definitionen u. Fundamentalsätze der Theorie des Gleichgewichtes schwimmender Körper. Eine krit. Besprechg. der Stabilitätstheorie der Schiffe. Triest, F. H. Schimpff. 6 Mk.

Digitized by Google

Technik.

Bibliothek, polytechnische. II. Tl. Die Sparungs-Elektrizität. Eine Anleitg. zur Anfertigg. u. Behandlg. der zur Sparungs-Elektrizität gehör. Apparate, zur Anstellg. der damit vorzunehm. Versuche u. zur Ableitg. der daraus folg. Regeln u. Gesetze. Nach method. Grundsätzen bearb. v. W. Weiler. Magdeburg, Faber'sche Buchdr. Geb. 4 Mk. 50 Pf.

Bohnenstengel, E., Konstruktionen elektrischer Bogenlampen. Ein Handbuch f. Fachleute. Hamburg - E., Selbstverlag. 7 Mk.

Elektrizität, die. Zeitschrift zur Förderung der Interessen der elektrotechnischen Industrie. Hrsg u. red. v. Otto Umbreit. 2. Jahrg. 1893. 24 Nrn. Leipzig, H. Paul. Vierteljährlich 2 Mk.

Hecht, K., Hand- u. Hülfsbuch zum Abstecken v. Eisenbahn- u. Strassenkurven m. besond. Rücksicht auf die Verwertung der Kegelschnitte. Nebst Anh.: Theorie der Rechenschieber, Rechenschieber f. Kreisabsteckg., Verständigungssignale. Mit Tabellen, Fig., Beispielen u. e. Formular. Zum prakt. Gebrauche f. Eisenbahn- u. Strassenbauingenieure u. Vermessungsbeamte. 2 Thle. 1. Text. 2. Tabellen. Dresden, G. Kühtmann. 12 Mk.

— Hülfsbuch zum Abstecken v. Kreisbögen m. Rücksicht auf die praktischen Uebergangskurven. Nebst e. Anh.: Verständigungssignale. Mit Tabellen, Fig., Beispielen u. 1 Formular. Zum prakt. Gebrauche f. Eisenbahn- u. Strassenbauingenieure u. Vermessungsbeamte. Ebd. 4 Mk. 40 Pf.; geb. 5 Mk.

Rosenkranz, P. H., der Indikator u. seine Anwendung. Für den prakt. Gebrauch bearb. 5. Afl. Berlin, R. Gaertner. Geb. in Leinw. 10 Mk.

Schulz, E., praktische Dynamokonstruktion. Ein Leitfaden f. Studirende der Elektrotechnik. Berlin, J. Springer. — München, R. Oldenbourg. Kart. 3 Mk.

Steigl, J., u. K. Bichler, der Elektriker in Schule u. Haus, e. Anleitg. zur prakt. Handhabg. der Apparate aus dem Gebiete der Reibungs- u. Vertheilungs-Elektricität. Wien, A. Pichler's Wwe. & Sohn. 50 Pf.

Optik, Akustik und Elasticität.

Kayser, H., u. C. Runge, d. Dispersion der Luft. Berlin, G. Reimer. 1 Mk. 50 Pf.

Meyerhoffer, W., die Phasenregel u. ihre Anwendungen. Wien, F. Deuticke. 1 Mk. 50 Pf.

Neumann, C., die Haupt- u. Brenn-Punkte e. Linsen-Syste-

Digitized by Google

mes. Elementare Darstellg. der durch Möbius, Gauss u. Bessel begründeten Theorie. 2. Afl. Leipzig, B. G. Teubner. 1 Mk. 20 Pf.

Straubel, R., Theorie der Beugungserscheinungen kreisförmig begrenzter, symmetrischer, nicht sphärischer Wellen. München, G. Franz' Verl. 3 Mk.

Wenzel, L., Beitrag zur Schwingungstheorie elastischer Saiten. Progr. Klagenfurt, F. v. Kleinmayr. 1 Mk.

Erd- und Himmelskunde.

Blasius, W., Stürme u. moderne Meteorologie. 4. Vortrag. Die Ursachen der Barometerschwankgn. Braunschweig, A. Limbach. 1 Mk. 80 Pf. (Kplt: in 1 Bd. 2 Mk 60 Pf.)

Glass, R., Abriss der Meteorologie u. der Elektricitätslehre. Für Realschulen bearb. Plauen i./V., F. E. Neupert's Verl. 1 Mk. 60 Pf.

Jahrbuch, deutsches meteorologisches, f. 1891. Beobachtungssystem v. Elsass-Lothringen. Ergebnisse der meteorologischen Beobachtungen im Reichsland Elsass-Lothringen im J. 1891. Hrsg. v. H. Hergesell. Strassburg, F. Bull. 5 Mk.

Jahrbuch, deutsches meteorologisches, f. 1891. Beobachtungs-System d. Königr. Sachsen. Ergebnisse der meteorolog. Beobachtgn. im J. 1892. Hrsg. v. Paul Schreiber. Chemnitz, M. Bülz. 10 Mk.

Kirchner, M., Duisburger Sonnentafel f. d. J. 1894. Auf- u. Untergangszeit der Sonne, sowie die Zeit des wahren Mittags zu Duisburg f. alle Tage des J. 1894. Duisburg, J. Ewich. 50 Pf.

Kirsch, Th., die Vorherbestimmung des Wetters. 2. Afl. Breslau, Maruschke & Berendt. 80 Pf.

Konkoly, N. v., Beobachtungen, angestellt am astro-physikalischen Observatorium in O'Gyalla (Ungarn). XIII. u XIV. Bd., enth. Beobachtgn. der J. 1890 u. 1891. Halle a./S., H. W. Schmidt. 6 Mk. 50 Pf.

Mattiat, D., Himmelkunde u. mathematische Geographie. Zum Schulgebrauch u. f. Freunde der Natur hrsg. 2. Afl. Leipzig, G. Lang. 1 Mk. 50 Pf.

Pick, A. J., die elementaren Grundlagen der astronomischen Geographie. Gemeinverständlich dargestellt. 2. Afl. Leipzig, J. Klinkhardt. 2 Mk. 40 Pf.

Puschl, C., üb. die Natur der Kometen. Wien, F. Tempsky. 40 Pf.

Titus, C., das Sternenzelt. Berlin, Verein der Bücherfreunde. 5 Mk.; geb. in Leinw. 5 Mk. 75 Pf.

Veröffentlichungen des königl. preussischen meteorologischen

Digitized by Google

Instituts. Hrsg. durch dessen Dir. Wilh. v. Bezold. Ergebnisse der Niederschlag-Beobachtgn. im J. 1891. Berlin, A. Asher & Co. 10 Mk.

Veröffentlichungen des Rechen-Instituts der königl. Sternwarte zu Berlin. Nr. 3. Berlin, F. Dümmler's Verl. 2 Mk.

Vogel, H. C., üb. den neuen Stern im Fuhrmann. Berlin, G. Reimer. Kart. 3 Mk. 50 Pf.

Weber, W., Sternkarte m. drehbarem Horizont. Neue Ausg. Durchmesser: 42 cm. Farbendr. Leipzig, J. C. Hinrichs' Sort. 5 Mk.

Vierteljahrsschrift der astronomischen Gesellschaft. Hrsg. v. R. Lehmann-Filhés u. H. Seeliger. 28. Jahrg. 1893. 1. u. 2. Hft. Leipzig, W. Engelmann. 4 Mk.

Wolf, R., Handbuch der Astronomie, ihrer Geschichte u. Literatur. 4. Halbbd. (Schluss.) Zürich, F. Schulthess. 8 Mk.

Nautik.

Bley, G. F., wozu dient dem Schiffer das Chronometer? Gemeinverständliche Abhandlg. üb. die Hülfsmittel der Nautik. Halle, W. Knapp. 60 Pf.

Gezeitentafeln f. d. J. 1894. Hrsg. vom Reichs-Marine Amt Red.: Observatorium zu Wilhelmshaven Mit 14 Blättern in Steindr., enth. Darstellgn. der Gezeitenströmgn. in der Nordsee, im engl. Kanal u. der irischen See. Berlin, E. S. Mittler & Sohn. 1 Mk. 50 Pf.

Jahrbuch, nautisches, od. Ephemeriden u. Tafeln f. d. J. 1896 zur Bestimmung der Zeit, Länge u. Breite zur See nach astronomischen Beobachtungen. Hrsg. vom Reichsamt des Innern. Unter Red. v. F. Tietjen. Berlin, C. Heymann's Verl. Kart. 1 Mk. 50 Pf.

Segelhandbuch des Englischen Kanals. II. Tl. Die französische Küste. Hrsg. v. der Direktion der deutschen Seewarte. Hamburg, L. Friederichsen & Co. In Leinw. Kart. 4 Mk.

Physik.

Benischke, G, Experimental-Untersuchungen üb. Dielektrika. Wien, F. Tempsky. 40 Pf.

Clapeyron, E., üb. die bewegende Kraft der Ströme. Deutsch hrsg. v. R. Mewes. Berlin, A. Friedländer's Buchdr. 1 Mk. 60 Pf.

Lang, V. v., Versuche m. Wechselströmen. Wien, F. Tempsky. 30 Pf.

Poincaré, H., Thermodynamik. Vorlesungen. Red. v. J. Blondin. Autorisirte deutsche Ausg. v. W. Jaeger u. E. Gumlich. Berlin, J. Springer. 10 Mk.

Digitized by Google

Kopp, R., populäre Vorträge üb. Electricität, geh. vor dem Heizer- u. Maschinisten-Verein Zürich u. Umgebg. Zürich, Buchh. d. schweizer. Grütlivereins. Kart. 1 Mk. 60 Pf.

Thompson, S. P., der Elektromagnet. Deutsch v. C. Grawinkel. (In 5 Hftn.) 1. Hft. Halle a./S., W. Knapp. 3 Mk.

Violle, J., Lehrbuch der Physik. Deutsche Ausg. v. E. Gumlich, L. Holborn, W. Jaeger, St. Lindeck. 2. Thl. Akustik u. Optik. 1. Bd. Akustik. Berlin, J. Springer. 8 Mk.; geb. in Leinw. 9 Mk. 20 Pf.

Weber, C., Leitfaden f. den Unterricht in der Physik an Ackerbauschulen u. landwirthschaftlichen Winterschulen. Stuttgart, E. Ulmer. Kart. 2 Mk. 75 Pf.

Weber's, W., Werke. Hrsg. v. der königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. 5. Bd. Wellenlehre. Besorgt durch Ed. Riecke. Berlin, J. Springer. 18 Mk.; Einbd. 2 Mk. 50 Pf.

Wiedemann, E., u. H. Ebert, physikalisches Praktikum m. besond. Berücksicht. der physikalisch-chemischen Methoden. 2. Afl. Braunschweig, F. Vieweg & Sohn. 9 Mk.; geb. 10 Mk.

Zuchristian, J., üb. den Einfluss der Temperatur auf die Potentialdifferenzen des Wechselstromlichtbogens. Wien, F. Tempsky. 30 Pf.

Vermischte Schriften.

Abhandlungen der königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Aus dem J. 1892. Mathematische. Berlin, G. Reimer. Kart. 4 Mk.

— dass. physikalische. Ebd. Kart. 27 Mk. 50 Pf.

Abhandlungen der mathematisch-physikalischen Classe der königl. bayerischen Akademie der Wissenschaften. 18. Bd. 1. Abth. [In der Reihe der Denkschriften der 66. Bd.] München, G. Franz' Verl. 8 Mk.

Aus dem Archiv der deutschen Seewarte. Hrsg. v. der Direktion der Seewarte. XV. Jahrg.: 1892. Hamburg, Friederichsen & Co. 15 Mk.

Gegenbauer, L., einige mathematische Theoreme. Wien, F. Tempsky. 40 Pf.

Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung. 2. Bd 1891—1892. Hrsg. v. W. Cantor, W. Dyck, E. Lampe. Berlin, G. Reimer. 4 Mk. 50 Pf.

Digitized by Google

Lerch, M., sur un théorème de Kronecker. Prag, F. Rivnáč. 32 Pf.

Berichte, mathematische und naturwissenschaftliche, aus Ungarn. Red. v. J. Fröhlich. 10. Bd. [Octbr. 1891 — Octbr. 1892.] 2. Hälfte. Budapest, F. Kilian. 4 Mk.

Sitzungsberichte, Wiener. Math.-naturw. Classe. Abth. I. 102. Bd. 1.—3 Hft. Wien, Tempsky. 2 Mk. 80 Pf.

— dass. Abth. IIa. 102. Bd. 3. u. 4. Hft. Ebd. 4 Mk. 60 Pf.

— dass. Abth. IIb. 102. Bd. 3. u. 4. Hft. Ebd. 3 Mk. 10 Pf.

Verlag von **Friedrich Vieweg & Sohn** in Braunschweig.

(Zu beziehen durch jede Buchhandlung.)

Soeben erschien:

Die Lehre von der Elektricität

von Gustav Wiedemann.

Zweite umgearbeitete u. vermehrte Auflage in 5 Bänden.

Zugleich als **vierte** Auflage der Lehre vom Galvanismus und Elektromagnetismus.

Zweiter Band. Mit 163 Holzstichen und einer Tafel. gr. 8. **Preis geh. 28 Mark, geb. 30 Mark.**

Digitized by Google

Tei

Taf. I.

Fig. 2.

k_2
k_2'
m_2
p
m_2'
a
d
m'
b
m
c
m_1
k
k_1

Fig. 1.

be über die Schraubenlinie.

Digitized by Google

Digitized by Google

Fig. 1.

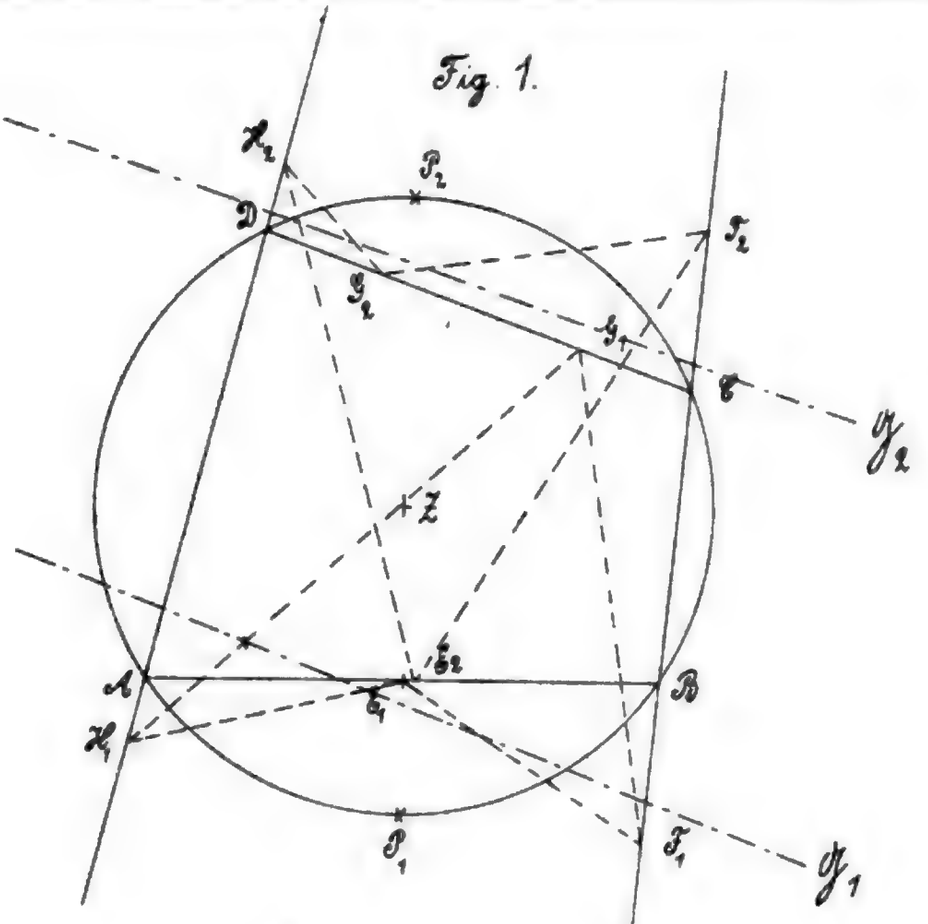
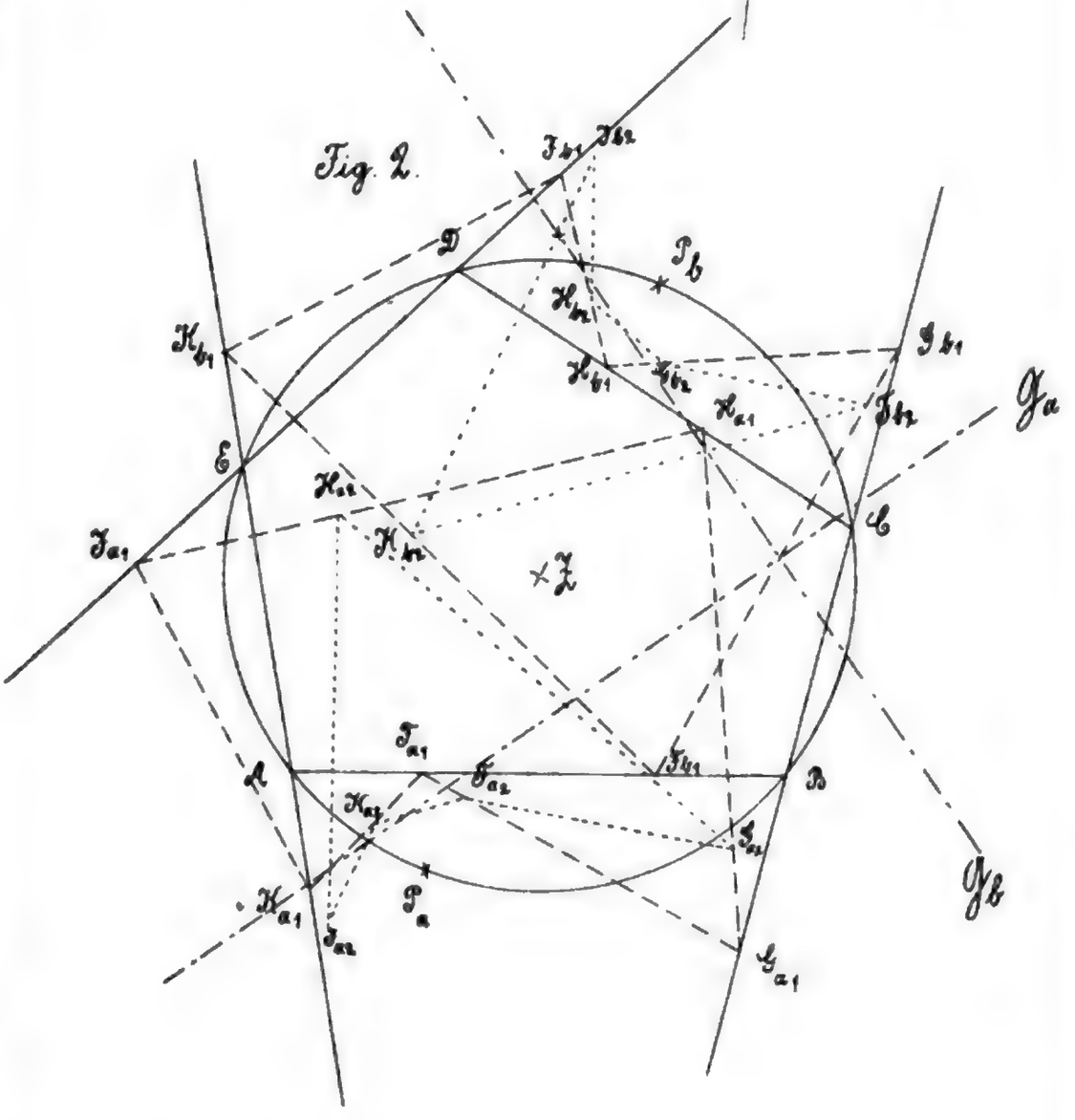


Fig. 2.



Digitized by Google

Litterarischer Bericht

L.

Arithmetik, Algebra und reine Analysis.

Vorlesungen über Zahlentheorie. Von P. G. Lejeune Dirichlet. Herausgegeben und mit Zusätzen versehen von R. Dedekind, Professor an der technischen Hochschule Carolo-Wilhelmina zu Braunschweig. Vierte, umgearbeitete und vermehrte Auflage. Braunschweig 1894. Friedrich Vieweg und Sohn.

Die Vorlesungen handeln in 5 Abschnitten: von der Teilbarkeit der Zahlen, der Congruenz der Zahlen, den quadratischen Resten, den quadratischen Formen, der Anzahl der Classen, in welche die binären quadratischen Formen von gegebener Determinante zerfallen. Vom Herausgeber sind 11 Supplemente hinzugefügt: über einige Sätze aus der Theorie der Kreisteilung von Gauss, den Grenzwert einer unendlichen Reihe, einen geometrischen Satz, die Geschlechter, in welche die Classen der quadratischen Formen von bestimmter Determinante zerfallen, Theorie der Potenzreste für zusammengesetzte Moduli, den Satz, dass jede unbegrenzte arithmetische Progression, deren erstes Glied und Differenz ganze Zahlen ohne gemeinsame Factoren sind, unendlich viele Primzahlen enthält, einige aus der Theorie der Kreisteilung, die Pell'sche Gleichung, die Convergenz und Stetigkeit einiger Reihen, die Composition der binären quadratischen Formen, die Theorie der ganzen algebraischen Zahlen.

H.

Digitized by Google

Beleuchtung und Beweis eines Satzes aus Legendre's Zahlentheorie. Von Dr. Hermann Scheffler. Leipzig 1893. Friedrich Foerster.

Der Satz lautet: „Sei eine beliebige arithmetische Progression, deren Anfang und Differenz relativ prim sind, und eine Reihe beliebiger k ungerader Primzahlen gegeben; bezeichnet allgemein $\pi(z)$ den $z$ten Term der natürlichen Reihe der Primzahlen 3, 5, 7, 11, . . ., so gibt es unter $\pi(k-1)$ consecutiven Termen jener Progression mindestens einen, der durch keine der gegebenen Primzahlen teilbar ist." Der von Legendre für diesen Satz aufgestellte Beweis ist ungenügend, sofern er sich auf eine unbegründete Voraussetzung stützt. Es werden zahlreiche Beobachtungen gemacht, dann bewiesen, dass die Voraussetzung, und demnächst, dass der Satz richtig ist. H.

Elemente der Theorie der Functionen einer complexen veränderlichen Grösse. Mit besonderer Berücksichtigung der Schöpfungen Riemann's bearbeitet von Dr. H. Durège, Professor i. r. an der deutschen Universität zu Prag. Vierte Auflage. Leipzig 1893. B. G. Teubner.

Nach einer ausführlichen Erläuterung des Wesens und der Bedeutung der Imaginären wird die Theorie in folgenden 10 Abschnitten entwickelt: geometrische Darstellung der imaginären Grössen; von den Functionen einer complexen Variabeln im allgemeinen; mehrdeutige Functionen; Integrale mit complexen Variabeln; der Logarithmus und die Exponentialfunction; allgemeine Eigenschaften der Functionen; über das unendlich gross und unendlich klein Werden der Functionen; Integrale; einfach und mehrfach zusammenhängende Flächen; von den Periodicitätsmoduln. H.

Grundzüge der Differential- und Integralrechnung von Dr. Otto Stolz, ord. Professor an der Universität zu Innsbruck. Erster Teil: reelle Veränderliche und Functionen. Mit 4 Figuren im Text. Leipzig 1893. B. G. Teubner.

Nach einer Einleitung, welche auf die Principien der infinitesimalen Analysis ausführlich eingeht, behandeln 10 Abschnitte der Reihe nach folgende Gegenstände: Ableitungen, Differentialquotienten und Differentiale von Functionen einer Veränderlichen; den Mittelwertsatz mit einigen Anwendungen; von den höhern Differentialquotienten einer Veränderlichen insbesondere, Formeln für die

Digitized by Google

Summe der n ersten Glieder der Taylor'schen Reihe; Ableitungen und Differentialquotienten der Functionen von mehreren Veränderlichen und der impliciten Functionen; unbestimmte Integration (Allgemeines); die der rationalen Functionen; die von algebraischen Functionen, insbesondere der rationalen Functionen von x und einer Quadratwurzel aus einem Polynom 2. Grades in x; die von transcendenten Functionen; das bestimmte Integral. Gegenüber andern Lehrbüchern für gleiche Doctrin zeichnet sich das vorliegende aus durch vorwaltendes Interesse für Unregelmässigkeiten und Singularitäten; in Betreff der normalen Elemente der Lehre ist die Darstellung weit entfernt von der einfachst und deutlichst möglichen; auch braucht man das Ideal in dieser Hinsicht noch gar nicht anzustreben, denn kaum je war es nötig vom Gewöhnlichen oder längst Bekannten abzugehen. Beides drängt den Leser zu der Vermutung, dass der Verfasser um jeden Preis vermeiden wollte, die infinitesimale Analysis als ein leichtes Studium erscheinen zu lassen. Um diese Charakterisirung mit einigen Beispielen zu belegen, so sei zuerst folgende Stelle der Einleitung (S. 3) angeführt. „Wenn x den Grenzwert 0 hat, d. h. dem absoluten Betrage nach beliebig klein werden kann, so sagt man auch, die Veränderliche x wird (nicht „ist") unendlich klein". Hier ist zunächst factisch zu statuiren, dass dies nicht der Fall ist. Von unendlich kleinen Grössen, und zwar die es sind genau in dem obengenannten Sinne, wird viel gesprochen, aber niemand spricht von unendlich klein werdenden Grössen. Letzteres ist so sinnlos, als wenn man von einer Grösse, die variiren kann, sagen wollte, sie werde variabel. Nachdem durch diese falsche Aussage der Verfasser sein Mögliches getan hat, den Anfänger confus zu machen, fährt er fort: „Wir können jedoch dem Anfänger nicht raten, diesen Ausdruck zu gebrauchen, denn er könnte, da er in früherer Zeit oft auch einen andern, hier nicht berechtigten Sinn hatte, Anlass zu Misverständnissen bieten". Mit dem andern Sinne ist, wie die beigefügte Note zeigt, gemeint: unendlich klein bedeute $-\infty$. Dieser Sinn ist offenbar durch die Worte der Definition „nach absolutem Betrage" ausgeschlossen. Es gibt grosse Gebiete der Mathematik, wo es sich immer um absolute, nie um algebraische Grössen handelt, bei Dreiecken z. B. denkt niemand an den Fall negativer Seiten. Ist nun überdies die Beschränkung auf absolute Grössen in der Definition ausgesprochen, so ist ein Misverständniss von dieser Seite ganz unmöglich; die angebliche Besorgniss erweist sich als leerer Vorwand. Dahingegen ist gerade der erteilte Rat das Wort unendlich klein nicht zu gebrauchen recht dazu angetan Irrtum zu verbreiten und zu befestigen. In unzähligen Schriften wird das Wort richtig gebraucht und ist hier unersetzlich. Da aber leider in kaum einem Lehrbuch die Definition und Theorie

Digitized by Google

der unendlichen Grössen zu finden ist, so wird der Anfänger durch jenen Rat geradezu aufgefordert sich um Sinn und Bedeutung nicht zu bekümmern und den Begriff in aller herrschenden Unklarheit aufzunehmen (vielleicht damit er nie selbständig werde, sondern stets von seinen Lehrmeistern abhängig bleibe). Die Hinzufügung, statt „unendlich klein" könne man „beliebig klein" sagen, ist als irrig zurükzuweisen; denn ε und $a\varepsilon$ sind gleichzeitig unendlich klein, aber nicht gleichzeitig beliebig klein. Im Vorstehenden war zwar die Eigenschaft, um die es sich handelte, die unendliche Kleinheit, falsch ausgedrückt, aber doch durch ihre exact richtige Bedingung unzweifelhaft kenntlich gemacht. Eine andere Stelle (S. 2) lässt beides, den Sinn dessen, was, und den Sinn dessen, wodurch es angeblich erklärt wird, fraglich. Sie lautet: „Nimmt die Veränderliche x Werte an, welche grösser sind als jede vorgegebene Zahl, so sagt man, ihre obere Grenze oder ihr Grenzwert ist $+\infty$ (in Zeichen $\lim x = +\infty$)". Das Zeichen ∞ bedeutet bekanntlich „unend*lich* gross". Warum nennt der Verfasser nicht das Wort, da er es doch sonst oft gebraucht? Eine Grösse, die $= \infty$ ist, kann bekanntlich über jede Grenze hinauswachsen, hat also keine obere Grenze; daher ist der Ausdruck $\lim x = +\infty$ sinnlos, sowie das Angegebene, was er bedeuten soll. Soll nun vielleicht die Behauptung: man sagt so — heissen, die an sich sinnlose Formel sei ein symbolischer Ausdruck für das Vorgenannte, nämlich dass x Werte annimmt, die grösser sind als jede vorgegebene Zahl, so ist leider die Erklärung nicht verständlicher als das Zuerklärende. Ein Wert ist eine individuelle Grösse; diese kann nicht grösser sein als alle Zahlen. Sind aber beliebig viele Zahlen g e g e b e n, so enthält die Aussage, dass Werte von x grösser seien als alle diese Zahlen, nichts bestimmendes mehr für x, was nicht von der Wahl dieser Zahlen abhängig wäre. Da es nun ein Leichtes war, die Bedingung eines unendlich grossen x einfach und exact auszusprechen, so drängt sich die Frage auf, was den Verfasser bewogen haben könnte, so dunkle Rede zu führen. Vermutlich wollte er durch kein Urteil der erhofften Bildung eines Begriffs des absoluten (oder constanten) Unendlich in den Weg treten und strebte darum die Erledigung der Frage über den Begriff des Unendlichen als eines variabeln zugunsten jener Chimäre vermittelst dialektischer Künste hinzuzögern. Diese Vermutung wird auch noch dadurch unterstützt, dass er nach Vorgang von Lagrange für die Principien der Differentialrechnung unendliche Reihen in Anwendung bringt, ein Verfahren das durch Cauchy's strengeres Zuwerkegehen längst gerichtet und seitdem nie wieder aufgenommen worden ist. Indem der Verfasser erklärtermassen die Theorie der unendlichen Reihen und ihrer Convergenz als bekannt voraussetzt, mithin von ihrer Begründung nichts sagt, ist offenbar der logische

Digitized by Google

Faden seiner Deductionen hinsichtlich der infinitesimalen Elemente aller Controle entzogen und eventuellen Erschleichungen Tor und Tür geöffnet. Endlich ist noch zu erwähnen, dass infolge der grundsätzlichen Vermeidung des Wortes „unendlich klein", welches immer von neuem umschrieben wird, die Rechnungen unnützerweise ihre natürliche Einfachheit einbüssen, und der Einblick einigermassen erschwert wird. Hoppe.

Lehrbuch der höheren Analysis. I. Band. Lehrbuch der Differentialrechnung. Zum Gebrauche bei Vorlesungen an Universitäten und technischen Hochschulen. Von Harry Gravelius. Berlin 1893. Ferd. Dümmler.

Das Lehrbuch ist in folgende 10 Capitel geteilt: irrationale Zahlen; reelle Veränderliche und ihre Functionen, Stetigkeit; Differentialquotienten; Bildung des ersten Differentialquotienten der elemenntaren Functionen, allgemeine Sätze; höhere Differentialquotienten einer Function einer Veränderlichen, höhere Differenzen und Differentiale; Functionen mehrerer unabhängig Veränderlichen; Darstellung der Functionen durch Potenzreihen, Punktmengen; Theorie der Maxima und Minima; Anwendungen auf Geometrie; complexe Veränderliche. Die Begriffsentwickelung der Irrationalzahl schliesst sich der Methode von Heine an. Bei der Grundlegung der infinitesimalen Analysis vom 2. Capitel an werden keine Worte gespart die Begriffe zur Klarheit zu bringen und falsche Vorstellungen abzuwehren. Doch alles dies wird schwerlich den Erfolg haben, wenn nicht gleich anfangs der positive Sachverhalt unumwunden ausgesprochen ist, und daran lässt es das 2. Capitel fehlen. Sei zum Belege die Stelle auf erster Stelle angeführt: „Man darf nicht sagen, die Veränderliche sei dann einmal unendlich, denn das Unendliche ist keine Zahl. Die Veränderliche hat in diesem Falle" (d. h. wenn man sie unendlich nennt) „überhaupt keinen grössten Wert". Das ist alles im einzelnen richtig, aber es negirt bloss. Was heisst unendlich? Alle Erklärung fehlt. Der Verfasser wird nicht in Abrede stellen, dass von unendlichen, unendlich grossen, unendlich kleinen Grössen sehr oft und zwar correcter Weise gesprochen wird; überdies gebraucht er das Wort später selbst. Hier, wo er sagt, es ist keine Zahl, war der Ort zu sagen, was es ist. Offenbar ist es sinnlos ein Unveränderliches unendlich zu nennen; nur die Veränderung kann ohne Ende fortgehen. Unter einer unendlichen Grösse ist daher stets eine veränderliche zu verstehen, d. h. eine solche, die sich verändern kann, nämlich entsprechend dem Falle, von dem an jener Stelle die Rede ist. Ist dies ausgesprochen, so ist der Ge-

Digitized by Google

danke, eine Veränderliche sei (oder werde) einmal unendlich, von selbst ausgeschlossen, ebenso zeigt sich aber auch, dass die Setzung des Ausdrucks „werde“ statt „sei“ unendlich, womit der Verfasser die Formulirung verbessern zu wollen scheint, keinen verständlichen Sinn hat. Die Theorie des Unendlichen wird dann ihres mystischen Nimbus entkleidet und geht in einen elementaren Lehrgegenstand über. War der Verfasser der Ansicht, der Ausdruck „unendlich“ böte dem Anfänger infolge traditioneller Unklarheit noch immer eine Schwierigkeit, so war es gewiss das verkehrteste Mittel zur Abwendung jenes Hindernisses, dass er denselben solange als möglich mied; denn was man nicht treibt, kann man nicht lernen. Hoppe.

Vorlesungen über Mathematik von Leopold Kronecker. Herausgegeben unter Mitwirkung einer von der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften eingesetzten Commission. Erster Band. Vorlesungen über die Theorie der einfachen und vielfachen Integrale. Herausgegeben von Dr. Eugen Netto, Professor der Mathematik an der Universität zu Giessen. Leipzig 1894. B. G. Teubner.

Der Inhalt ist zu reichhaltig und mannigfaltig, als dass sich eine umfassende Uebersicht in der Kürze geben liesse. Obwol ein sichtlicher Fortschritt nicht fehlt, und Gruppen und Untersuchungsgebiete sich kenntlich machen, so sind doch diese nicht namhaft begrenzt. Wir begnügen uns deshalb damit, aus jedem Teile einiges hervorzuheben. Nur kurze Zeit verweilt die Schrift bei den Principien der Theorie des Integrals einer Function einer Variabeln über ein einfaches reelles Intervall nach dessen 2 Herleitungen, aus dem Differential und aus der Reihensumme. Bald geht sie, vom Integral einer Function einer Complexen beginnend, zum Integral über ein Areal über, indem sie erklärt, dass und warum bei letzterem viele Complicationen wegfallen, welche die Theorie der Integration über eine Linie schwierig machen. Sie behandelt weiter die Mittelwertsätze, das Dirichlet'sche Integral, die Fourier'sche Reihe, Bernoulli'sche Functionen, die mechanische Quadratur, das Cauchy'sche Residuum, die Reihen, den Dirichlet'schen discontinuirlichen Factor, mehrfache Integrale, die Euler'schen Integrale, das Oberflächenelement, das Potential, die Green'sche Function, die ellipsoidische Mannigfaltigkeit. H.

The principles of elliptic and hyperbolic analysis. By Alexander Macfarlane, M. A., D. Sc., L. L. D. Fellow of the Royal

Digitized by Google

Society of Edinburgh, Professor of physics in the university of Texas. (Read before the Mathematical Congress at Chicago Aug. 24. 1893.) Norwood Press (1894). J. S. Cushing a. Co.

Die Schrift betrachtet vollständiger die den Versor betreffende Seite der Analysis des Raumes und dehnt die Untersuchung auf elliptische und hyperbolische Versoren aus. Es wird der Fundamentalsatz der Trigonometrie für die Kugel, das Rotations- und allgemeine Ellipsoid, für das gleichseitige und allgemeine zweischalige, dann einschalige Hyperboloid untersucht, dann von den resultirenden Pincipien Anwendung gemacht, schliesslich Analoga zum Rotationssatze hergeleitet. H.

E. Goursat, Vorlesungen über die Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. Gehalten an der Faculté des sciences zu Paris. Bearbeitet von C. Bourlet. Autorisirte deutsche Ausgabe von H. Maser. Mit einem Begleitwort von S. Lie. Leipzig 1893. B. G. Teubner.

Nachdem durch die Arbeiten von S. Lie die Theorie der partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung einen gewissen Abschluss gefunden hatte, ist sie durch Goursat's Werk „Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre", dessen Uebersetzung hier vorliegt, in einer für den Studirenden bequemen Weise und in engem Anschluss an die Arbeiten von Lagrange, Cauchy, Jacobi, Mayer dargelegt worden. Ihre Entwickelungsgeschichte hat Lie im Begleitwort dazugefügt. Die Teile des Werkes sind folgende: allgemeine Sätze über die Existenz der Integrale; lineare Gleichungen, vollständige Systeme; lineare totale Differentialgleichungen; Gleichungen von beliebiger Form, allgemeines, Methode von Lagrange und Charpit; Methode von Cauchy, Charakteristiken; Definition der Ausdrücke (ψ, φ) und $\{\psi, \varphi\}$; erste Methode von Jacobi und Mayer; Methode von Lie; geometrische Untersuchung der Gleichungen mit 3 Variabeln, Integralcurven, singuläre Lösungen; allgemeine Theorie von Lie; Berührungstransformationen; Theorie der Gruppen, allgemeine Integrationsmethode. H.

Leçons nouvelles sur l'analyse infinitesimale et ses applications géométriques. Par M. Ch. Méray, Professeur á la Faculté des sciences de Díjo. Ouvrage honoré d'une souscription du Ministère de l'instruction publique. Première partie. Principes généraux. Paris 1894. Gauthier-Villars et fils.

Digitized by Google

Dieser erste Teil enthält Definitionen von Grundbegriffen der infinitesimalen Analysis nebst ihren nächsten Consequenzen. Obgleich diese Grundbegriffe sowie ihre Bezeichnungen nicht merklich von den gebräuchlichen abweichen, so lehnt sich doch die ganze Behandlungsweise an keine Autorität an; vielmehr weist der Verfasser in der Vorrede die ganze bisherige Lehre mit lauter allgemeinen Beschuldigungen der Ungenauigkeit und Wertlosigkeit ohne Begründung und Nachweis von sich. Durch dieses Bekenntniss von durchaus rein subjectiver Bedeutung enthebt er natürlich sich und uns von der Aufgabe, irgend welche Punkte kenntlich zu machen, in denen etwa sein Werk principielle didaktische Vorzüge vor frühern Darstellungsweisen haben sollten. Sei daher der Inhalt nur kurz aufgeführt. Brüche; Positive und Negative, Functionen; incommensurable Grössen, Varianten (Variable); imaginäre Grössen; Reihen; ganze Reihen; Derivirte der holotropen Functionen; Fundamentaleigenschaften der über gegebene Areale holotropen Functionen; Integration; zusammengesetzte Functionen; wesentliches Princip der Theorie der totalen Differentialgleichungen; implicite Functionen; wesentliches Princip der Theorie der partiellen Differentialgleichungen; allgemeine Integralfunctionen, Integralgleichungen, integrirende Multiplicatoren; über eine wesentliche Eigenschaft der ganzen Polynome einer Variabeln. Hoppe.

Eine allgemeinere Integration der Differentialgleichungen. Von Emanuel Puchberger. I. Heft. Wien 1894. Carl Gerold's Sohn.

Es ist hier von einer neuen Integrationsmethode die Rede, welche auf einen grössern Umfang von Differentialgleichungen anwendbar sei, als die bekannten Methoden. Die Schrift gibt in Betreff mehrerer Beispiele von Differentialgleichungen Andeutungen, aus denen der Leser erraten soll, welche Methode der Verfasser im Sinne hat. Dem Referenten ist dies nicht gelungen.

Hoppe.

Einleitung in die Theorie der linearen Differentialgleichungen mit einer unabhängigen Variabeln. Von Dr. Lothar Heffter, a. o. Professor an der Universität Giessen. Mit 3 Figuren im Text. Leipzig 1894. B. G. Teubner.

In dem vorliegenden Werke sind die bisherigen Arbeiten über den genannten Gegenstand in der dem Zwecke entsprechenden Aus-

Digitized by Google

dehnung einheitlich zusammengestellt und in didaktisch geordneter Stufenfolge zu einem Lehrbuche gestaltet. Die Reihenfolge ist diese. Erklärende Einleitung; Recursionsformel und determinirende Gleichung; Berechnung der Reihencoefficienten aus der Recursionsformel; Nachweis der Reihenconvergenz bei einer Stelle der Bestimmtheit; Fundamentalsystem von Integralen, nicht homogene Differentialgleichungen; die Integrale bei einer regulären Stelle und die linearen Differentialgleichungen mit constanten Coefficienten; die Integration im ganzen Gebiet der Differentialgleichung, Gruppe der Differentialgleichung; analytische Gestalt der Integrale bei einer singulären Stelle der Bestimmtheit; Recursionsformeln der Reihen in logarithmenbehafteten Integralen bei einer Stelle der Bestimmtheit; Zerlegung der Integralgruppen in Untergruppen; Notwendigkeit der Bestimmtheitsgestalt der Differentialgleichung bei einer Stelle für bestimmtes Verhalten sämtlicher Integrale daselbst; Fundamentalgleichung; die Integrale in einem Kreisring; Stellen der Unbestimmtheit, bei denen sich ein Teil der Integrale bestimmt verhält, Reductibilität; die Integrale in der Umgebung unendlich grosser Werte der unabhängigen Variabeln; Differentialgleichungen der Fuchs'schen Classe. Hülfssätze. H.

Sophus Lie Vorlesungen über continuirliche Gruppen. Mit geometrischen und anderen Anwendungen. Bearbeitet und herausgegeben von Dr. Georg Scheffers, Privatdocent an der Universität Leipzig. Mit Figuren im Text. Leipzig 1893. B. G. Teubner.

Theorie der Transformationsgruppen, dritter und letzter Abschnitt. Unter Mitwirkung von Prof. Dr. Friedrich Engel bearbeitet von Sophus Lie, Professor der Geometrie an der Universität Leipzig. Leipzig 1893. B. G. Teubner.

Die Teile des ersten Werkes sind folgende. Die allgemeine projective Gruppe der Ebene und einige Untergruppen; Theorie der projectiven Gruppen in der Ebene; die Gruppen in der Ebene; die grundlegenden Sätze der Gruppentheorie; lineare homogene Gruppen und complexe Zahlen; einige Anwendungen der Gruppentheorie. — Die Teile des zweiten Werkes sind folgende. Die endlichen continuirlichen Gruppen der geraden Linie und der Ebene; die des gewöhnlichen Raumes; die projectiven Gruppen des gewöhnlichen Raumes; Untersuchungen über verschiedene Arten von Gruppen des n-fach ausgedehnten Raumes; Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie; allgemeine Betrachtungen über endliche continuirliche Gruppen. H.

Digitized by Google

Essai sur le calcul de généralisation. Par Gabriel Oltramare, Professeur de mathématiques supérieures à l'université de Genève. Genève 1893. Stapelmohr.

Die hier so genannte Verallgemeinerungsrechnung geht von Verallgemeinerung des Begriffs des Differentialquotienten aus, erweitert Functionen und wird u. a. auf Integration von Differentialgleichungen und Differenzengleichungen angewandt. H.

Le calcul simplifié par les procédés mécaniques et graphiques. Par M. Maurice d'Ocagne, Ingénieur des ponts et chaussées, Répétiteur à l' École Polytechnique. Conférences faites au conservatoire nationale des arts et métiers, les 26 février, 5 et 19 mars 1892. Paris 1894. Gauthier-Villars et fils.

Nomographie. Les calculs usuels effectués au moyen des abaques. Essai d'une théorie générale. Régles pratiques. Exemples d'application. Par Maurice d'Ocagne, Ingénieur des ponts et chaussées. Paris 1891. Gauthier-Villars et fils.

Es werden die mechanischen, tabellarischen und graphischen Hülfsmittel zur Ausführung numerischer Rechnungen im weitesten Umfang durchgegangen und abgebildet. H.

Repetitorium der Differential- und Integralrechnung. Von Dr. Chr. Joh. Deter. Dritte Auflage. Berlin 1894. Max Rockenstein.

Die hier gegebene kurze Zusammenfassung der Lehren der Differential- und Integralrechnung ist mit Fleiss und Umsicht so bearbeitet, dass nichts wesentliches zu vermissen ist, alles exact dargestellt und wol geordnet. Den grössten Teil bilden Formeln und Uebungen. H.

Zahlentheorie. Versuch einer Gesamtdarstellung dieser Wissenschaft in ihren Hauptteilen. Von Paul Bachmann. Zweiter Teil. Die analytische Zahlentheorie. Leipzig 1894. B. G. Teubner.

Der erste Teil des Gesamtwerkes, erschienen 1892, hat den Titel: „Elemente der Zahlentheorie". Die analytische Zahlentheorie begreift in sich diejenigen Forschungen im Gebiete der höhern Arithmetik, welche auf analytische Methoden begründet sind. Die

Digitized by Google

Abschnitte sind folgende: Allgemeines über unendliche Reihen und Producte; die Zerfällung der Zahlen in Summanden; über die Dirichlet'schen Reihen; der Satz von der arithmetischen Progression, die Classenanzahl quadratischer Formen, Grundformel; Bestimmung der Classenanzahl durch eine unendliche Reihe; die Gauss'schen Summen; Berechnung der Classenanzahl; die Geschlechter der quadratischen Formen; Ausdehnung des Satzes von der arithmetischen Progression auf quadratische Formen; zahlentheoretische Functionen; die Häufigkeit der Primzahlen; die mittleren Werte zahlentheoretischer Functionen. H.

Einführung in die Functionentheorie. Eine Ergänzung zu allen Lehrbüchern der Differential- und Integralrechnung. Mit 23 in den Text gedruckten Figuren. Bearbeitet von Dr. W. Laska. Stuttgart 1894. Julius Maier.

Das Bedürfniss einer Ergänzung sei es aller oder vieler Lehrbücher der Differential- und Integralrechnung wird gewiss gern eingeräumt werden. Es beruht jedoch auf zwei sehr verschiedenen Desideraten, dem Mangel an Gründlichkeit und den zu eng begrenzten Zielen der Doctrin. Die Ungründlichkeit erklärt sich leicht aus dem Umstande, dass die Resultate und Anwendungen der Doctrin einen ohne Mühe zu erringenden grossen Gewinn darboten, während der Weg, dazu mit voller Einsicht zu gelangen, wegen gewisser Verirrungen schwierig schien. Zu den Erweiterungen der Principien aber führten Untersuchungen, welche hauptsächlich durch den genannten Mangel hervorgerufen waren. Der Ausdruck „Ergänzung" scheint nun den Anspruch zu erheben, dass durch Hinzufügung des hier Gegebenen die gedachten Lehrbücher definitiv zu einem „Ganzen" werden, das wenigstens in den berührten Beziehungen nichts mehr vermissen lasse. Die Bearbeitung macht nicht den Eindruck, als wenn der Verfasser sich diese Aufgabe gestellt hätte. Sie behandelt nur einen historisch vorgefundenen Lehrstoff, dessen Kenntnissnahme der Verfasser für notwendig hält, eben weil er vorhanden ist. Hiervon abgesehen, würde es eine verdienstvolle Leistung der Arbeit sein, wenn darin sorgfältig darauf geachtet wäre, dass jene Lehren für Anfänger verständlich würden, wie es in der Tat die Bezeichnung als „Einführung" verspricht. In den leichtesten Partien ist die erste Bedingung dazu, klare und bestimmte Rede, sehr wol erfüllt. Wo es sich aber um schwierigere Fragen handelt, mithin umsomehr Deutlichkeit not tut, wird die Sorgfalt mehr und mehr ausser Augen gesetzt, Zeichen bleiben hie und da unerklärt, Beziehungen werden

Digitized by Google

verschwiegen (z. B. S. 12. Z. 15, wo alle Rechenschaft über die Bedeutung fehlt). Der Inhalt des Buches ist: Grundbegriffe; geschichtliche Entwickelung des Functionsbegriffs; Riemann-Cauchy's Functionentheorie; Theorie der complexen Integrale; Fortsetzung der Functionen-Theorie nach Riemann's Anschauung; rationale Functionen; Theorie der Reihen; die Reihenfortsetzung; Begriff der Function nach Weierstrass; die Differentiation; Darstellung der eindeutigen Functionen.

Hoppe.

Mathematische und physikalische Bibliographie.

XLIII.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Fortschritte der Elektrotechnik. Vierteljährliche Berichte üb. d. neueren Erscheingn. auf d. Gesammtgebiet d. angewandten Elektricitätslehre mit Einschluss des elekt. Nachrichten- u. Signalwesens. Herausgeg. v. Karl Strecker. 5. Jahrg. (Das Jahr 1891). Berlin, J. Springer. 26 Mk.

Fortschritte, die, der Physik i. J. 1887. Dargestellt von der phys. Gesellschaft zu Berlin. 43. Jahrg. 2. Abt. (Physik d. Aethers, red. v. Dr. E. Budde). Berlin, G. Reimer. 18 Mk.

Jahrbuch d. Erfindgn. u. Fortschritte auf d. Gebieten d. Physik, Chemie u. chem. Technologie, d. Astronomie u. Meteorologie. Begründet von H. Gretschel u. H. Hirzel. Hrsg. v. G. Bornemann, Otto Müller u. A. Berberich. 29. Jahrg. Leipzig, Quandt & Händel. 6 Mk.

Jahrbuch über die Fortschritte d. Mathematik, begründet von Carl Ohrtmann, hersg. v. Emil Lampe. 22. Bd. (1890). 3. Hft. Berlin, G. Reimer. 13 Mk.

Methode und Principien.

Arndt, Rud., Kraft u. Kräfte. Greifswald, J. Abel. 1 Mk. 50 Pf.

Dedekind, Rich., Was sind u. was sollen die Zahlen? 2. Aufl. Braunschweig, F. Vieweg & Sohn. 1 Mk. 60 Pf.

Hartmann, Berthold, Der Rechenunterricht in der deutschen Volksschule vom Standpunkte des erziehenden Unterrichts. Ein method. Handbuch f. Lehrer und Seminaristen, zugleich eine

Digitized by Google

Anleitung zum Gebrauche des Hartmann-Ruhsamschen Rechenbuchs für deutsche Stadt- u. Landschulen. Frankfurt a./M., Kesselringsche Hofb. 5 Mk.

Scheffler, Herm., Die Aequivalenz d. Naturkräfte u. das Energiegesetz als Weltgesetz. Leipzig, F. Foerster. 9 Mk.

Lehrbücher.

Bussler, Fr., D. Elemente d. Mathematik f. d. Gymnasium bearb. 2 Tle. Dresden, L. Ehlermann. Kart. 3 Mk. 70 Pf.

Focke, M. & M. Krass, Leitfaden zur Einführg. in die Stereometrie u. Trigonometrie. Sonderausgabe für die Untersekunda, aus den gleichnamigen Lehrbüchern bearbeitet. Münster, Coppenrath. 50 Pf.

Repetitorium, kurzes, der höheren Mathematik. I. Differentialrechnung. Wien, M. Breitenstein. 1 Mk. 10 Pf.

Sammlungen.

Kleyer, A., Aufgaben-Sammlung aus allen Zweigen der Rechenkunst, der niederen u. höh. Mathematik, der Physik etc. 1228. — 1247. Hft. Stuttgart, Jul. Maier. à 25 Pf.

Lieber, H. u. A. Koehler, Arithmetische Aufgaben. Berlin, L. Simion. 2 Mk. 70 Pf,; Auflösungen 1 Mk. 50 Pf.

Lieb, Seyfferth, Tillmann, Rechenschule. Ausg. f. Lehrer. Mit Ergebnissen, method. Ausführgn. u. weiteren Uebungsaufgaben. C. IV. (Zur Schülerausg. A; 6. Hft., 6. Schuljahr). Nürnberg, F. Korn. 1 Mk. 50 Pf.

Maiss, Ed., Aufgaben üb. Elektricität u. Magnetismus. Für Studirende an Mittel- u. Gewerbeschulen, zum Selbststudium für angehende Elektrotechniker, Physiker u. a. Wien, A. Pichlers' Wwe. & Sohn. 2 Mk. 40 Pf.

Pfeiffer, Jak., Aufgabensammlg. z. Lehrb. d. Arithmetik f. Latein-, Real-, Bürger- u. gewerbl. Fortbildungsschulen v. Frdr. Ustrich. München, J. Lindauer. Gbd. 2 Mk.

Tabellen.

Jelinek, Laur., Mathemat. Tafeln f. techn. Anstalten, besonders f. höh. Gewerbeschulen. 2 Tle. (I. Tafeln. — II. Einrichtg. u. Gebrauch d. Tafeln). Wien, A. Pichler's Wwe. & Sohn. 2 Mk. 40 Pf.

Jordan, W., Logarithmisch-trigonometrische Tafeln für neue

Digitized by Google

(centesimale) Teilung mit 6 Decimalstellen. Stuttgart, K. Wittwer. 10 Mk.

Kämpfe, Bruno, Tafel des Integrals

$$\Phi(\gamma) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\gamma} e^{-t^2} dt.$$

Leipzig, W. Engelmann. 60 Pf.

Láska, W., Tafeln zur Auflösg. des Kepler'schen Problems. Prag, F. Rivnáč. 48 Pf.

Arithmetik, Algebra und reine Analysis.

Bergbohm, Jul., Entwurf einer neuen Integralrechnung auf Grund d. Potenzial-, Logarithmal- u. Numeralrechnung. 2. Hft.: d. irrationalen, exponentiellen, logarithmischen u. cyclometrischen Integrale. Leipzig, B. G. Teubner. 2 Mk.

Deter, Chr. Joh., Repetitorium der Differential- u. Integralrechnung. 3. Afl. Berlin, W. Rockenstein. Gbd. 2 Mk.

Dölp, H., Die Determinanten, nebst Anwendg. auf d. Lösg. algebraischer u. analyt.-geometr. Aufgaben. Elementar behandelt. 4. Afl. Darmstadt, L. Brill. 2 Mk.

Gegenbauer, Leop, Das Additionstheorem der Funktion $C_n^{\nu}(x)$. Wien, Tempsky. 30 Pf.

— Eine Anwendg. d. Zahlentheorie auf d. Integralrechng. Ebd. 40 Pf.

Goursat, E., Vorlesgn. üb. d. Integration d. partiellen Differentialgleichgn. I. Ordng. Bearb. v. C. Bourlet. Autoris. deutsche Ausg. von H. Moser. Mit e. Begleitwort von S. Lie. Leipzig, B. G. Teubner. 10 Mk.

Hauck, A. F., Lehrbuch d. Arithmetik u. Algebra f. Gymnasien, Real- u. Handelsschulen. (In 3 Tln.) 3. Tl. 1. Abtlg. 3. Afl. v. J. Brunotte. (Resultate.) Nürnberg, F. Korn. 1 Mk. 20 Pf.

Heinitz, Georg, Elementare Berechnung d. Zahl μ, welche den quadratischen Restcharakter bestimmt. Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht. 1 Mk.

Kohn, Gust., Ueb. e. Eigenschaft der Invarianten u. Covarianten. Wien, F. Tempsky. 30 Pf.

Kühl, J. H., Leitfaden der Arithmetik u. Algebra. Für den Schul- u. Selbstunterricht bearb. I. Tl. 2. Afl. Hamburg, J. Kriebel. Kart. 3 Mk.

Lerch, M., Sur une fonction transcendente. Prag, F. Rivnáč. 20 Pf.

Digitized by Google

Lerch, M., Sur un point concernant la théorie de la fonction gamma. Prag, Rivnáč. 20 Pf.

— Généralisation du theorème de Frullani. Ebd. 20 Pf.

— Sur deux transcendentes considérées par Legendre. Ebd. 20 Pf.

Lie, Sophus, Theorie der Transformationsgruppen. 3. und letzter Abschnitt. Unter Mitwirkg. v. Frdr. Engel bearbeitet. Leipzig, B. G. Teubner. 26 Mk.

— Vorlesgn. üb. continuirliche Gruppen m. geometrischen u. anderen Anwendgen. bearb. u. herausg. v. Geo. Scheffers. Ebd. 24 Mk.

Lieber, H. u. F. v. Lühmann, Leitfaden d. Elementar-Mathematik. 2. Tl.: Arithmetik. 5. Afl. Berlin, L. Simion. 1 Mk. 25 Pf.

— Unendliche Reihen. Elementare Theorie der Maxima u. Minima. Ebd. 40 Pf.

Olbricht, Rich., Lehrb. d. Prozent- u. Zinsberechnung nebst ihren Anwendgn., m. Einschluss d. Diskontrechng., d. Terminrechng., d. Kalkulationen u. Kontokorrente. Bearb. nach System Kleyer. Stuttgart, J. Maier. 6 Mk.

Pözl, W. und G. Effert, Lehrbuch d. allgem. Arithmetik u. Algebra (nebst Aufgabensammlg.) f. Gymnasien u. Realschulen. München, J. Lindauer. 3 Mk. 20 Pf.

Scheffler, Herm., Beleuchtg. u. Beweis e. Satzes aus Legendre's Zahlentheorie, Leipzig, F. Foerster. 1 Mk.

Schulze, Karl, Leitfaden u. Aufgabensammlg. f. d. arithmet. Unterr. an Realschulen. Dresden, G. Kühtmann. 2 Mk., kart. 2 Mk. 20 Pf.

Speckmann, G., Beiträge zur Zahlenlehre. Oldenburg, Eschen & Fasting. 2 Mk.

Thompson, Henry Dallas, Hyperelliptische Schnittsysteme u. Zusammenordng. d. algebraischen u. transcendentalen Thetacharakteristiken. Göttingen, Vandenhoeck & Rupprecht. 2 Mk.

Weierstrass, K., Formeln u. Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Functionen. Nach Vorlesgn. u. Aufzeichngn. des Hrn. K. W. bearb. u. hrsg. v. H. A. Schwarz. 2. Ausg. 1. Abt. Berlin, J. Springer. 10 Mk.

Geometrie.

Faber, F., Darstellende Geometrie m. Einschluss d. Perspektive, insbesondere zum Gebrauche an Fortbildungs- u. Baugewerksschulen, sowie zum Selbstunterricht. Nach d. Tode d. Verfassers hersg. v. Otto Schmidt. 2 Tle. Dresden, G. Kühtmann. 8 Mk.

Digitized by Google

Hecht, Benno, Anleitg. zur Krystallberechnung. Leipzig, J. A. Barth. 3 Mk.

Killing, Wilh., Einführg. in d. Grundlagen d. Geometrie. 1. Bd. Paderborn, F. Schöningh. 7 Mk.

Martus, H., Leitfaden f. d. Unterricht in d. Raumlehre I. Tl.: Ebene Figuren. Bielefeld, Velhagen & Klasing. 1 Mk. 20 Pf.

Močnik, Geometr. Formlehre f. d. 1. Klasse d. Realschulen. Bearb. v. Ferd. Maurer. 2. Aufl. Leipzig, G. Freytag. Kart. 90 Pf.

Müller, E. R., Lehrbuch d. planimetr. Konstruktionsaufgaben, gelöst durch geometr. Analysis. 2. Tl. Verwandlungs- u. Teilungsaufgaben, sowie Aufgbn. üb. ein- u. umbeschriebene Figuren. Bearb. nach System Kleyer. Stuttgart, J. Maier. 2 Mk.

Riess, C., Grundzüge d. darstellenden Geometrie, nebst e. Anhg. enth. die Anwendg. derselben auf Perspective u. Schlagschattenkonstruktion. Als Leitfaden beim Unterricht in Baugewerbeschulen, Fortbildungsschulen, höh. Bürgerschulen u. s. w. hrsg. 2. Aufl. Stuttgart, J B. Metzler's Verlag. Kart. 2 Mk. 80 Pf.

Roeder, Herm., Der Koordinatenbegriff u einige Grundeigenschaften der Kegelschnitte. Zunächst e. Ergänzg. d. Neubearbeitung d. Planimetrie von Kambly. Zum Gebrauche an Gymnasien nach d. neuen preuss. Lehrplänen bearbeitet. Breslau, F. Hirt. 60 Pf.

Rohn, E. u. E. Papperitz, Lehrbuch d. darstellenden Geometrie. (In 2 Bdn.) I. Bd. Leipzig, Veit & Co. 11 Mk.

Sachs, J., Lehrbuch d. ebenen Elementargeometrie (Planimetrie). 6. Tl. Proportionalität d. Strecken. Bearb. nach System Kleyer. Stuttgart, J. Maier. 4 Mk.

Sobotka, J., Ueb. Berührungscurven der Schraubungsregelflächen mit umschriebenen Cylinderflächen. Prag, F. Rivnáč. 1 Mk. 20 Pf.

Study, E., Sphärische Trigonometrie, orthogonale Substitutionen und ellipt. Functionen Eine analytisch-geometr. Untersuchg. Leipzig, S. Hirzel. 5 Mk.

Thomae, Joh., Die Kegelschnitte in rein projektiver Behandlg. Halle, L. Nebert. 6 Mk.

Waelsch, E., Ueber Tangentencongruenzen e. Fläche. Wien, F. Tempsky. 30 Pf.

Trigonometrie.

Lieber, H. u. F. v. Lühmann, Anfangsgründe d. Trigonometrie. Pensum der Untersekunda. Berlin, L. Simion. 40 Pf.

Praktische Geometrie, Geodäsie.

Jordan, W., Handbuch d. Vermessungskunde. 2. Bd. cplt.

Digitized by Google

(Feld- u. Landmessung.) 4. Aufl. Stuttgart, J. B. Metzler's Verlg. 20 Mk.

Verhandlungen der vom 27. Sept. bis 17. Okt. 1892 zu Brüssel abgehaltenen 10. allgemeinen Conferenz der internationalen Erdmessung und deren permanenten Commission. Red. vom ständ. Sekretär A. Hirsch. Zugleich mit den Spezialberichten üb. d. Fortschritte d. Erdmessg. u. d. Berichten d. Vertreter der einzelnen Staaten üb. d. Arbeiten in ihren Ländern. 2 Bde. Berlin, G. Reimer. 12 Mk.

Mechanik.

Dressler, L. S. J., Zur Orientirung in der Energielehre. Münster, Aschendorff'sche B. 1 Mk.

Finger, Jos., Ueber den Hauptpunkt e. beliebigen Axe eines materiellen Punktsystems. Wien, F. Tempsky. 50 Pf.

Klimpert, Rich., Lehrb. d. Bewegg. flüssiger Körper. (Hydrodynamik.) 2. Bd. 1. Hlfte. Die Bewegungserscheingn. d. Wassers in Kanälen u. Flüssen, sowie der dabei ausgeübte Stoss u. Widerstand. Bearb. nach System Kleyer. Stuttgart, J. Maier. 5 Mk.

Technik.

Bibliothek, polytechnische. 3. Tl. (Suppl. z. 1. Tl.) Wie ich mir eine kleine Dynamomaschine zu 12 Glühlampen u. später e. grössere zu 45 Glühlampen je zu 16 Normalkerzen nach den von Herrn Prof. Weiler i. 1. Teil der polyt. Bibliothek gegebenen Regeln u. Anweisgn. selbst erbaut. Mit 4 Abbilgn., 3 farb. Fig.-Taf, Kostenanschlag, Bezugsquellen etc. Von Clem. Leverin. Nebst Anh.: Berechng. einer Gleichstrommaschine f. Beleuchtg., e. Gleichstrommaschine f. Galvanoplastik, u. zweier kleiner Elektromotoren v. je 10 mkg. Mit 17 Abbildgn. Von Prof. Weiler. Magdeburg, Fabersche Buchdr. 2 Mk., gbd. 2 Mk. 50 Pf.

Chwolson, O., Actinometrische Untersuchungen zur Construction e. Pycheliometers u. e. Actinometers. Leipzig, Voss' Sort. 5 Mk. 25 Pf.

Elektrotechniker's literarisches Auskunftsbüchlein. Die Literatur der Electrotechnik, Elektricität, Elektrochemie, des Magnetismus, der Telegraphie, Telephonie u. Blitzschutzvorrichtung d. letzten 10 Jahre von 1884 bis 1893. Mit Schlagwortregister. Zusammengestellt v. Frdr. Schmidt-Hennigker. Leipzig, O. Leiner. 60 Pf.

Epstein, J., Ueberblick über d. Elektrotechnik. 6 populäre Experimental-Vorträge. 2. Afl. Frankfurt a./M., J. Alt. 2 Mk., kart. 2 Mk. 40 Pf.

Digitized by Google

Lorber, Frz., Das Nivelliren. Zugleich 9. Aufl. der theoret. u. prakt. Anleitg. zum Nivelliren von Stampfer. Wien, Gerold's Sohn. 15 Mk.

Safarich, A., Ueber Construction von metallischen Teleskopspiegeln nach neuen Grundsätzen. Prag, F. Rivnáč. 40 Pf.

Thompson, Silvanus P., Die dynamoelektrischen Maschinen. 4. Aufl. Deutsch v. C. Grawinkel. 12. (Schluss-)Heft. Halle a./S., W. Knapp. 2 Mk.

Weiler, Prof. W., Der prakt. Elektriker. Populäre Anleitg. zur Selbstanfertigg. elek. Apparate u. zur Anstellg. zugehör. Versuche nebst Schlussfolgergn., Regeln u. Gesetzen. 2. Aufl. Leipzig, M. Schäfer. 8 Mk.

Optik, Akustik und Elasticität.

Fletscher, L., Die optische Indicatrix. Eine geometr. Darstellung der Lichtbewegung in Krystallen. Uebers. von H. Ambron u. W. Koenig. Leipzig, J. A. Barth. 3 Mk.

Gänge, C., Anleitg. zur Spektralanalyse. Leipzig, Quandt und Händel. 2 Mk.

Schiötz, O. E., Ueber die Reflexion longitudineller Wellen v. e. rigid. unendl. ebenen Fläche. Christiania, J. Dybwad. 1 Mk.

Erd- und Himmelskunde.

Ergebnisse d. Beobachtungen an den Regenstationen u. Uebersicht über d. wichtigsten Beobachtungen an sämmtlichen Stationen i. J. 1890. Hrsg. v. kgl. preuss. meteorolog. Institut. Berlin, A. Asher & Co. 4 Mk. 50 Pf.

Giberne, Agnes, Sonne, Mond u. Sterne. Nach d. 20. Afl. v. 1893. Deutsch v. E. Kirchner. Autoris. Ausg. Berlin, S. Cronbach. 4 Mk., gebd. i. Leinwd. 5 Mk. 50 Pf.

Hann, J., Der tägl. Gang der Temperatur auf d. Obirggipfel (2140 m.) u. einige Folgerungen aus demselben. Wien, F. Tempsky. 70 Pf.

Huguenel, E., Beitrag zur Erklärung der Erdbeben u. d. schlag. Wetter. Potsdam, R. Hachfeld. 1 Mk.

Jäger, Gust., Wetteransagen u. Mondwechsel. Stuttgart, W. Kohlhammer. 3 Mk.

Jahrbuch, deutsches meteorologisches, f. 1891. Beobachtungssystem der deutschen Seewarte. Ergebnisse der meteorolog. Beobachtgn. an 10 Stationen II. Ordng. u. an 41 Signalstellen, sowie stündl. Aufzeichngn. an 2 Normal-Beobachtgs-Stationen. XIV. Jahrg.

Digitized by Google

(16. Jahrg. d. meteorolg. Beobachtgn. in Deutschld.), Herausg. v. d. Direktion d. dtschen. Seewarte. Hamburg, L. Friederichsen & Co. 13 Mk.

Jahrbuch, deutsches meteorologisches. Jahrg. 1892. Meteorologische Beobachtgn. in Württemberg. Mitteilgn. der mit dem kgl. statist. Amt verbund. Centralstation. Bearb. v. Dr. L. Meyer. Mit 2 Uebersichtskarten. Stuttgart, J. B. Metzler's Verlag. 3 Mk.

Lingg, Ferd., Construction d. Meridian-Quadranten auf dessen Sehne. Nach den Bessel'schen Erddimensionen durch Bestimmg. d. Lage, der Grad- u. Halbgrad-Punkte des Meridians, sowie der Richtg. ihrer Halbmesser u. Lothlinien, entworfen, berechnet u. in der Verjüngg. von 1 : 10 Millionen gezeichnet. München, Piloty u. Löhle. i. Mappe 10 Mk.

Mazelle, Ed., Der jährliche u. tägl. Gang u. d. Veränderlichkeit der Lufttemperatur. Wien, F. Tempsky. 1 Mk. 80 Pf.

Rusch, Gust. u. Ant. Wollensack, Beobachtungen, Fragen u. Aufgaben aus dem Gebiete d elementaren astronom. Geographie. 2. Afl. Wien, A. Hölder. 80 Pf.

Veröffentlichungen d. kgl. preuss. meteorolog. Instituts. Hersg. durch Wilh. v. Bezold. I. Ergebnisse der Beobachtungen an d. Stationen II. u. III. Ordnung i. J. 1893, zugleich deutsches meteorolog. Jahrb. f. 1893. 1. Hft.: Beobachtungssystem d. Königr. Preussen u. benachbarter Staaten. Berlin, A. Asher & Cie. 3 Mk.

Vierteljahrsschrift d. astronom. Gesellsch. 28. Jahrg. 3. Hft. Leipzig, W. Engelmann. 2 Mk.

Volkmann, P., Beiträge zur Wertschätzung der Königsberger Erdthermometerstation 1872—1892. Königsberg, W. Koch. 25 Pf.

Weiss, E., Ueber d. Bestimmung d. Bahn e. Himmelskörpers aus drei Beobachtgn. Wien, F. Tempsky. 2 Mk. 50 Pf.

Zusammenstellung der Beschlüsse der internationalen Meteorologen-Conferenzen von der Conferenz in Leipzig, Aug. 1872, bis u. m. d. Conferenz in München, Aug. 1891. Leipzig, Voss' Sort. 2 Mk. 50 Pf.

Nautik.

Rundschau, nautische. Internat. Organ f. Schiffs- u. Eisenbahnwesen. Hrsg.: Charles Friedmann, Red.: Aug. Parreyss. Wien, Seidel & Sohn. p. Jahrg. 16 Mk.

Segelhandbuch des engl. Kanals. III. Tl. Die Kanal-Inseln. Hersg. v. d. Direktion d. deutschen Seewarte. Hamburg, L. Friederichsen. 1 Mk.

Physik.

Bauernberger, Herm., Ueb. d. Stärke d. elektr. Wellen,

Digitized by Google

wenn der Primärfunke in Oel überspringt. Wien, F. Tempsky. 30 Pf.

Beetz, W. v., Leitfdn. d. Physik. 11. Afl. Nach d. Tode d. Verfassers herausg. v. J. Henrici. Leipzig, Th. Grieben. 3 Mk. 40 Pf.

Boltzmann, Ludw., Vorlesgn. üb. Maxwells Theorie d. Elektricität u. d. Lichtes. II. Tl. Verhältnis zur Fernwirkungstheorie; specielle Fälle d. Elektrostatik, stationäre Strömung u. Induction. Leipzig, J. A. Barth. 5 Mk.

Dinichert, Rob., Étude des courants faradiques à l'aide du galvanomètre et de l'elektrodynamomètre. Bern, H. Körber. 1 Mk. 20 Pf.

Fodor, Etienne de, Experimente m. Strömen hoher Wechselzahl u. Frequenz. Rev. u. m. Anmerkgn. versehen v. Nik. Tesla. Wien, Hartleben. 4 Mk.

Fornaschon, Ueber Irrlichter. Güstrow, Opitz & Co. 20 Pf.

Handbuch d. Physik. 18. u. 19. Lfg. Breslau, Ed. Trewendt. 7 Mk. 20 Pf.

Mach, Ludw., Notiz üb. e. Röhrenniveau v. variabler Empfindlichkeit. Wien, F. Tempsky. 20 Pf.

Mélanges physiques et chimiques tirés du Bulletin de l'Académie impériale des sciences de St. Petersbourg. Tome XIII. Livr. 2. Leipzig, Voss Sort. 2 Mk. 50 Pf.

Mühlau, A., Grundriss d. Physik u. Meteorologie. Ein Leitfaden, insbesondere f. Landwirtschaftsschulen, Ackerbauschulen, landw. Winterschulen etc. Leipzig, H. Voigt. 1 Mk.

Netoliczka, Eug., Experimentierkunde. Anleitg. zu physikal. u. chem. Versuchen in der Volks- u. Bürgerschule. 2. Aufl. v. Konr. Kraus. Wien, A. Pichler's Wwe. & Sohn. 2 Mk. 40 Pf.

Oettel, Felix, Anleitung zu elektrotechn. Versuchen. Freiberg, Craz & Gerlach. 4 Mk.

Pauli, Rob, Bestimmungen der Empfindlichkeitskonstanten e. Galvanometers m. astatischem Nadelpaar u. aperiodischer Dämpfung. Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht. 3 Mk.

Puluj, J, Ueb. e. Phasenindicator u. einige m. demselben ausgeführte Mssgn. Wien, F. Tempsky. 1 Mk. 20 Pf.

Reis, P., Lehrbuch d. Physik. Einschliesslich d. Physik des Himmels (Himmelskunde), der Luft (Meteorologie) u d. Erde (physik. Geographie). 8. Aufl. Leipzig, Quandt & Händel. 9 Mk.

Sahulka, J., Erklärung des Ferrantischen Phaenomens. Wien, F. Tempsky. 20 Pf.

— Messung d. Capacität von Condensatoren mit Wechselstrom. Ebd. 30 Pf.

Schollmeyer, G., Was muss der Gebildete von der Elektri-

Digitized by Google

cität wissen? Gemeinverständl. Belehrg. über d. Kraft d. Zukunft. Neuwied, Heuser's Verl. 1 Mk. 50 Pf.

Sumpf, K., Anfangsgründe der Physik. 6. Aufl. bearb. von A. Papst. Hildesheim, A. Lax. 1 Mk. 50 Pf.

Thompson, G. F., Der Elektromagnet. 2. Hft. Halle, W. Knapp. 3 Mk.

Urbanitzky, Alfr. v., Die Elektricität im Dienste der Menschheit. Eine populäre Darstellg. der magnet. u. elektr. Naturkräfte u. ihrer prakt. Anwendung. 1./6. Lfg. Wien, A. Hartleben. à Lfg. 50 Pf.

Voller, Aug., Die Grundlehren der Elektricität m. besond. Rücksicht auf die Praxis d. elektr. Beleuchtung. Nach Vorträgen. Bearb. v. H. Benrath. Neuer Abdr. d. Ausg. 1888 m. Zusätzen. Hamburg, Boysen & Maasch. Kart. 1 Mk. 25 Pf.

Vermischte Schriften.

Abhandlungen der kgl. sächs. Gesellschaft der Wissenschaften. 33. Bd. (Mathematisch-phys. Classe 20. Bd.) Leipzig, S. Hirzel. 21 Mk.

Berichte d. sächs. Ges. d. Wiss. Math.-phys. Klasse. 1893. II—VI. Ebd. 5 Mk.

Jahresbericht, 1., des Sonnenblick-Vereins f. d. J. 1892. Wien, Gerold & Co. 3 Mk.

Mechaniker, Der. Zeitschrift zur Förderung der Mechanik, Optik, Elektrotechnik u. verwandter Gebiete. Hrsg. v. Fritz Harrwitz. I. Jahrg. Berlin, M. Harrwitz. Vierteljährl. 1 Mk. 50 Pf.

Mélanges mathématiques et astronomiques tirés du Bulletin de l'académie impériale des sciences de St. Petersbourg. Tome VII. Livr. 2. Leipzig, Voss' Sortim. 3 Mk. 75 Pf.

Mémoire de l'académie impériale des sciences de St. Petersbourg. VII. série. Tome XLI. Nr. 2/3. Ebd. 7 Mk. 65 Pf.

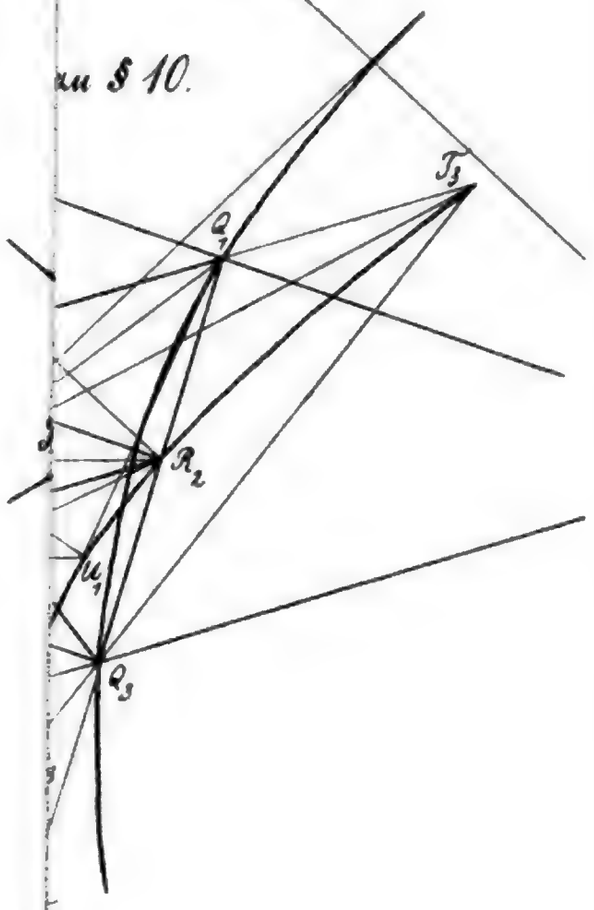
Sonne, J. & Th. Sänger, Mathemat. Wiederholungshefte, im Anschluss an die neuen Lehrpläne höherer Unterrichtsanstalten herausgeg. III. Hft. Marburg, O. Erhardt. 50 Pf.

Digitized by Google

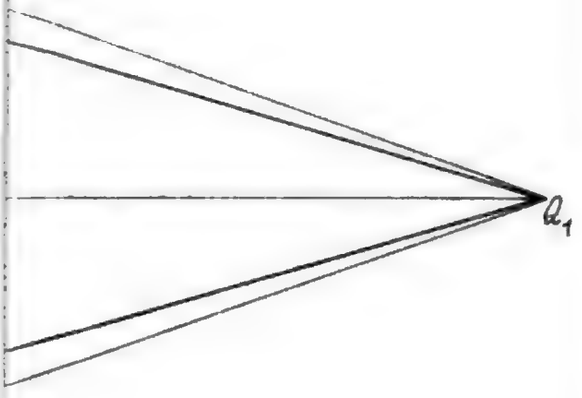
Tei

Taf. III.

zu § 10.



4. und 5.



Josef Dienger.

Am 27. November 1894 morgens 5 Uhr verschied nach langem Leiden der sehr bekannte Professor der Mathematik an der technischen Hochschule zu Karlsruhe Josef Dienger. Er ist geboren den 5. November 1818 zu Hausen an der Möhlin, Amt Staufen. Schon früh zeigte sich bei ihm eine ungewöhnliche Begabung für Mathematik. Er wurde deshalb von seinen Eltern für das Lehrfach bestimmt. Seine erste Ausbildung erhielt er auf der Präparandenschule zu Ettlingen, von wo er mit den besten Zeugnissen ausgerüstet, im Jahre 1838 an die katholische Kantonschule Graubündens, welche damals in Disentis war, berufen wurde. Nach 3jährigem Aufenthalte daselbst wandte er sich nach Genf, um sich in seinem Fache noch mehr zu vervollkommnen, und in der gleichen Absicht besuchte er im nächsten Jahre noch das Polytechnikum zu Karlsruhe i./B. Im Jahre 1843 wurde er Lehrer an der höheren Bürgerschule zu Ladenburg und im Jahre 1844 Lehrer an der gleichen Anstalt zu Sinsheim an der Elsenz. 1849 wurde er Vorstand der höheren Bürgerschule zu Ettenheim und 1850 Professor der Mathematik und Vorstand der mathematischen Schule am Polytechnikum zu Karlsruhe i./B. Nach 18jähriger erfolgreicher Tätigkeit sah er sich infolge eines Nervenleidens genötigt, seine Stelle niederzulegen. Von seinem schweren Leiden genesen widmete er von Ende 1868 an seine Dienste der allgemeinen Versorgungsanstalt im Grossherzogtum Baden, welcher Anstalt er bis 1888 als Director angehörte.

Dass diese Anstalt auf der heutigen Höhe dasteht, kann wesentlich als sein Verdienst angesehen werden, und wird ihm in der Geschichte dieser Anstalt ein bleibendes Andenken sichern.

Seit 1888, also mit Vollendung seines 70. Lebensjahres, entsagte er auf Anraten des Arztes jeder wissenschaftlichen Tätigkeit und suchte in stiller Zurückgezogenheit mit seiner Gemahlin die Früchte seines segensreichen Wirkens zu geniessen. Leider war ihm dies nicht lange beschieden. Ein schweres Herzleiden stellte sich ein und machte seinem tätigen Leben ein rasches Ende.

Digitized by Google

Ausser zahlreichen Abhandlungen — es sind deren über 100 —

in Crelles Journal für die reine und angewandte Mathematik Band 34—36,

in Grunerts Archiv der Mathematik und Physik, 84 Artikel von Teil 7 bis 47,

in Terquem und Geronos Nouvelles annales des Mathématiques,

in der von Tortolini in Rom herausgegebenen Zeitschrift Annali dei scienze mathematiche e fisiche,

in den kritischen Anzeigen in den Heidelberger Jahrbüchern der Litteratur 1847—1868,

in den Abhandlungen der königlich böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Prag,

in den Denkschriften der Wiener Akademie und

in Versicherungszeitschriften (Annalen des gesamten Versicherungswesens)

erschienen von ihm:

1) Grundzüge der algebraischen Analysis, Karlsruhe 1851,
2) Handbuch der ebenen Polygonometrie, Stuttgart 1854,
3) Handbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie, Stuttgart 1855 (in 3. Auflage 1867),
4) Ausgleichung der Beobachtungsfehler nach der Methode der kleinsten Quadratsummen, Braunschweig 1857,
5) Handbuch der Differential- und Integralrechnung, Stuttgart 1857 (in 3. Auflage 1867 in 3 Bänden),
6) Abbildung krummer Oberflächen auf einander und Anwendung derselben auf höhere Geodäsie, Braunschweig 1858,
7) Studien zur analytischen Mechanik, Stuttgart 1863,
8) Theorie der elliptischen Integrale und Funktionen, Stuttgart 1865,
9) Theorie und Auflösung der höheren Gleichungen, Stuttgart 1867.
10) Grundris der Variatiationsrechnung, Braunschweig 1867.

Von diesen Werken wurde das Handbuch der Differential- und Integralrechnung im Jahre 1861 ins Russische übersetzt.

Diengers Verdienste um die Mathematik wurden auch von wissenschaftlicher Seite gewürdigt, denn

1) verlieh ihm die Universität Giessen auf Grund seiner ersten von ihm veröffentlichten Abhandlung „die Lagrange'sche Formel und die Reihensummirung durch dieselbe" — sie erschien im Jahre 1846 in Crelles Journal Band 34 Seite 75—100 — das Doctor-Diplom summa cum laude, und
2) ernannte ihn die königlich böhmische Gesellschaft der Wissenschaften zu Prag zu ihrem auswärtigen Mitgliede.

Karl Dienger.

Digitized by Google

Litterarischer Bericht

LI.

Lehrbücher.

Anfangsgründe der Zahlen- und Raumgrössen-Lehre. Im Auftrage der früheren Königlich Preussischen General-Inspektion der Artillerie und mit Zustimmung der jetzigen Königlich Preussischen General-Inspektion der Fuss-Artillerie zum Gebrauche als Leitfaden bei dem mathematischen Unterrichte in den Regiments-Schulen der Artillerie, sowie zur Benutzung beim Selbstunterricht bearbeitet von R. Foth, Feuerwerks-Major a. D. Mit 135 in den Text gedruckten Holzschnitten. Vierte Auflage. Hannover 1894. Carl Meyer.

Die 3. Auflage ist im 25. litt. Bericht S. 1—3 besprochen. Zur allgemeinen Charakterisirung möchte wol diesem Berichte nichts hinzuzufügen sein. Der Plan des Ganzen, die Auffassung der dem besondern Zwecke entsprechenden Aufgabe und die didaktischen Grundsätze sind unverändert festgehalten; dagegen hat der Verfasser nicht aufgehört auf Grund immer neuer Erfahrungen die Lehrweise zu vervollkommnen, einfacher und einheitlicher zu gestalten. Was im vorigen Berichte als verfehlt bezeichnet worden ist, kommt in der neuen Auflage nicht vor. Gemäss dem Grundsatze, theoretische Lehren, die das Erlernen erleichtern und die Orientirung fördern, dem Praktiker nicht vorzuenthalten, mag hervorgehoben werden, dass auch an den vorgeschriebenen Grenzen des elementaren Gebietes stets die jenseitigen Begriffe nicht mit Stillschweigen übergangen, sondern exact erklärt werden. H.

Digitized by Google

Methodisches Lehrbuch der Elementar-Mathematik von Dr. Gustav Holzmüller, Direktor der Gewerbeschule (Realschule mit Fachklassen) zu Hagen i. W., Mitglied der Kais. Leop. Carol. Akademie der Naturforscher. Erster Teil, nach Jahrgängen geordnet und bis zur Abschlussprüfung der Vollanstalten reichend. Mit 142 Figuren im Text. — Zweiter Teil, für drei Oberklassen der höheren Lehranstalten bestimmt. Mit 210 Figuren im Text. — Leipzig 1894. B. G. Teubner.

Das Lehrbuch ist in hohem Grade eigenartig, doch stellt sich die Abweichung vom Gewöhnlichen nicht sowol in neuen leitenden Grundsätzen, als vielmehr in gänzlicher Ungebundenheit der Behandlung des Einzelnen dar. Zur Rechenschaft über diese ist jedem der beiden Teile eine abgetrennte (nicht für die Schüler bestimmte) Schrift beigegeben, die uns indes zur Beurteilung wenig darbietet, da die Methode mehr mit Schlagwörtern als mit Gründen verteidigt wird. Was das Buch selbst betrifft, so zeugt zunächst der Vortrag von ausserordentlicher Beherrschung des Lehrstoffs, Gewandtheit und Sicherheit in Gedanken und Ausdruck; alles wird sofort ohne künstliche oder umständliche Nachhülfe vollkommen exact und in bester Form ausgesprochen. Mit einer so hohen Begabung ist jedoch nicht immer eine erfreuliche Wirksamkeit verbunden; ob der Gebrauch, den der Verfasser von seiner vortrefflichen Befähigung macht, [eine solche erhoffen lasse, erscheint in hohem Grade fraglich. Er gehört zu denjenigen Autoren, welche den mathematischen Unterricht mit einer Propädeutik beginnen wollen. Die vorgängigen Unternehmen dieser Art, welche während der letzten 80 Jahre aufgetreten sind, haben einen guten Erfolg nicht so überzeugend dargetan, dass ihnen die Mehrzahl der erschienenen Lehrbücher nachgefolgt wäre. Von allen jenen Vorgängern unterscheidet sich nun das gegenwärtige Lehrbuch dadurch, dass es die Grenze zwischen Propädeutik und strengem Lehrcursus ganz fallen lässt und aus anfänglich disciplinfreier Vorführung allmählich annähernd zur euklidischen Form übergeht. Hiermit ist offenbar der Doctrin ihre Basis entzogen; sie kann nicht mehr als notwendige Folge bestimmter Principien begriffen werden. In der Tat hat der Verfasser nichts dafür getan, dass der Schüler die Idee apodiktischer Erkenntniss gewinnt, so vielen Lehren er auch Beweise folgen lässt. Er sagt selbst, dass,, was im Anfang als Beobachtungsergebniss vorgekommen ist, später als gültiger Satz angewandt wird. Es scheint ihm also zu genügen, wenn die Beweise als Plaidoyers zugunsten der Behauptungen angesehen werden und das Vertrauen auf deren Richtigkeit erwirken, deren Begründung dem Lehrer gewiss bekannt sein werde. Gleicherweise geringschätzig wie mit dem logischen

Digitized by Google

Zusammenhang wird mit der Systematik verfahren. Die Lehrsätze sind zumteil ausgesprochen, zumteil in allgemeinen, zumteil in speciell numerischen Aufgaben involvirt, wo man eine bestimmte Lehre zu suchen hat, nicht kenntlich gemacht, daher auch successiver Fortschritt und jeweiliger Standpunkt nicht zum Bewusstsein gebracht, vielmehr nur mit grosser Umsicht durch recht reichlichen Lehrstoff dafür gesorgt, dass in der Gesamtheit keine Lehre vermisst werden kann. In der Begleitschrift ist davon die Rede, dass der Lehrgang nicht bindend sein solle, nach Ermessen des Lehrers manches wegfallen oder in andrer Ordnung gegeben werden könne. Das hätte Sinn, wenn das Verhältniss des Dargebotenen und des Freigestellten das umgekehrte wäre, d. h. wenn das gedruckte, unveränderlich in Aller Händen befindliche Lehrbuch ein für allemal eine deutliche logische und systematische Verbindung aufgestellt und es dann der Einsicht des Lehrers überlassen hätte, im besondern Falle Entbehrliches zu übergehen. Hier wird im Gegenteil dem Lehrer gestattet, den logischen Zusammenhang und die systematische Ordnung, die er etwa vermisst, im besondern Falle herzustellen. Ferner ist der Verfasser beteiligt an der Ansicht, der geometrische Unterricht müsse mit dreidimensionalen Gebilden anfangen, weil diese sich der unmittelbaren Anschauung darböten. Wir wollen diese Ansicht nicht voreilig verwerfen; man kann versuchen, ob factisch durch Körperbetrachtung die Geometrie leichter zugänglich wird; der Verfasser beruft sich in diesem Punkte nicht auf Erfahrung: es ist eben nur sein Gedanke, der ihm natürlich und einwandfrei scheint. Dass er sehr mangelhaft erwogen ist, findet man bald. Er setzt erstens voraus, dass der Schüler mit dem alltäglich gesehenen Gegenstande bekannter und s. z. s. befreundeter sei als mit dem, welchen ihm die Schule, sei es auch nur auf dem Papiere, neu darbietet. Ein Kind geht gleichgültig an hundert Dingen vorbei, macht dagegen mit Lust und Eifer von einer neu erworbenen Fähigkeit bei jeder Gelegenheit Anwendung, ohne zu unterscheiden, was mehr oder weniger interessant ist; das spätere Alter wird mehr und mehr wählerisch. Daher ist es offenbar vernünftig, die unbedingt notwendigen Lehren, deren Wichtigkeit der Anfänger nicht einsehen kann, mit den jüngsten Schülern zu treiben. Nun ist aber exacte Wissenschaft nur möglich durch Isolirung der einfachen Elemente. Sollten die Schüler durch eigene Beobachtung finden, dass der Weg zur Geometrie Fixirung von Punkten und geraden Linien erfordert, so müssten sie in wenigen Jahren vollenden, was die Wissenschaft in Jahrtausenden erreicht hat. Es ist eine Errungenschaft aus alter Zeit, die durch den Unterricht rein überliefert wird ohne durch Motivirung der Methode irgend gewinnen zu können, so dass heutige Pädagogen auf den Gedanken verfallen, die ererbte Methode

Digitized by Google

sei ein blosses Herkommen. Das Zuwerkegehen des Verfassers spricht dafür, dass ihm jene wissenschaftliche Forderung, bewusster oder unbewusstermassen, nicht fremd ist, obgleich er den Blick davon ablenkt. Seiner Ansicht zufolge musste nun einmal der Schüler durch eine Reihe von Beobachtungen an einem Körper in die Anfangsgründe der Geometrie eingeführt werden. Er wählt dazu, ohne den Grund auszusprechen, den Würfel, einen Körper, der die einfachen Elemente so isolirt als möglich vor Augen stellt, indem er das Zu-Beachtende mehrfach, vom Nicht-zu-Beachtenden so wenig als möglich darbietet, und lässt die Schüler eine Reihe von Beobachtungen daran machen, d. h. er sagt ihnen, was sie erkennen sollen. Hiermit werden zwei Ziele, jedes mit halbem Erfolge, angestrebt, einerseits die Schüler zu der Meinung zu verlocken, als ob sie die Wissenschaft erfänden, andrerseits ihnen die elementaren Gegenstände der Geometrie zunächst anzuzeigen, ehe sie die Lehre von ihnen in gründlicher Weise empfangen. Beides möchte ihnen dazu schwerlich von Nutzen sein. Um kurz zusammenzufassen, so ist das Buch sehr reichhaltig, im einzelnen correct und zuverlässig, seine Einrichtung aber wenig geeignet, Anfängern die Mathematik fasslich zu machen. Hoppe.

Anfangsgründe der ebenen Geometrie. Nach den neuen Lehrplänen bearbeitet von Karl Schwering, Direktor des stiftischen Gymnasiums in Düren, und Wilhelm Krimphoff, Oberlehrer am Gymnasium in Paderborn. Mit 150 Figuren. —

Stereometrie für höhere Lehranstalten. Nach den neuen Lehrplänen bearbeitet von Karl Schwering, Direktor des stiftischen Gymnasiums in Düren. Mit 41 Figuren. —

Anfangsgründe der analytischen Geometrie für höhere Lehranstalten. Nach den neuen Lehrplänen bearbeitet von Karl Schwering, Direktor des stiftischen Gymnasiums in Düren. Mit 7 Figuren. — — Freiburg i. Br. 1894. Herder.

Die Lehrform schliesst sich der gewöhnlichen, im einzelnen bessernd, an. Durchgängig ausgesprochen ist eingeschaltete „Besprechung" jeder Lösung einer Aufgabe nach unmotivirter und durch keine Analysis vorbereiteter Vorschrift der Construction. Die Besprechung umfasst die Determination; als Hauptgegenstand aber und Hauptzweck erscheint die Orientirung durch Hinweisung auf alle, wenn auch grossenteils selbstverständliche Punkte, die zum Bewusstsein gezogen werden. Dagegen weicht der Entwickelungsgang nicht nur völlig vom gewöhnlichen ab, sondern es wird der Leser nicht

Digitized by Google

einmal zum Mitwisser des Princips gemacht. Der Schüler wird gleich im Anfang in eine Menge verschiedener verschiedenartiger geometrischen Erkenntnisse eingeführt, die sich auf mannigfache Elemente nicht gerade der einfachsten Gebilde beziehen. Einen Einblick in die Zusammengehörigkeit erhält er nicht, und wenn er wirklich, was nicht wahrscheinlich ist, keine der Lehren vergisst, so ist doch sein Wissen vom Einzelnen wenig darauf vorbereitet es anzuwenden, wo es nötig ist. Nun hat aber der Verfasser selbst, bei seinem unsystematischen Zuwerkegehen, eine wichtige und unentbehrliche Lehre mitzuteilen oder zum Bewusstsein zu bringen vergessen — wenigstens ist der angenommene Fall, dass er es vergessen hat, der einzige, der irgend Entschuldigung zuliesse. Da er in Erklärung von selbst einleuchtender Dinge soweit geht, dass er, bei der Aufgabe der Construction einer Figur aus gegebenen Stücken, es besonders ausspricht, dass diese Figur an beliebig verschiedener Stelle des Papiers gezeichnet werden könne — in der Tat dürfte auch diese Betrachtung bei der Determination nicht fehlen — so war es doch mindestens ebenso wichtig und zur Klarstellung der Begriffe notwendig die geometrische Addition superponirbarer Raumgrössen zu lehren. Die Addition der Strecken auf einer Geraden kommt im Anfang nicht vor: hier war gerade kein Anlass davon zu sprechen. Die Addition der Bogen eines Kreises ist schon in anderm Falle: sie liegt begrifflich der Teilung des Kreises in Grade und Messung der Bogen durch Grade zu Grunde, von der im Anfang die Rede ist; doch wird ihr auch hier keine Aufmerksamkeit zuteil. Soll man dies etwa in dem Sinne verstehen: das Nähere brauche der Schüler nicht zu wissen, weil er zur Bogenmessung ein Instrument hat? Das hiesse denn doch, das Ziel des mathematischen Unterrichts sehr niedrig stecken! Schlimmer wird das Unterlassen aller Erklärung bei der Addition der Winkel. Eine Definition des Winkels wird zunächst ausdrücklich abgelehnt. Soweit ist allerdings das Zuwerkegehen ganz correct: der Winkel ist zunächst die aus 2 Geraden bestehende Figur; eine Grösse wird er durch die Addition mittelst Aneinanderlegen. Letzteres verschweigt das Lehrbuch; es bestimmt die Grösse des Winkels durch Messung des um seinen Scheitel beschriebenen Kreisbogens. Da soll also der Leser, um den Sinn der Aussage zu begreifen, dass ein Winkel dopelt so gross als ein andrer ist, erst beide in Graden ausgedrückt denken (was beiläufig im allgemeinen gar nicht genau möglich ist, und das Zuerklärende schon vielfach involvirt). Bald darauf wird der Satz von der Winkelsumme des Dreiecks als Lehrsatz aufgestellt, und es folgt ihm unter der Bezeichnung „Beweis" eine Betrachtung, von der man leicht genug sieht, dass und warum sie zur Begründung nicht genügt. Da freilich vorher alles darauf

Digitized by Google

eingerichtet ist keinen exacten Begriff von der Grösse eines Winkels aufkommen zu lassen, so konnte der Verfasser sich wol gegen jeden Einwand der Schüler gesichert glauben. So wird denn der Schüler über ein ganzes Gebiet elementar geometrischer Begriffe beharrlich in Unkenntniss erhalten, damit er die Unrichtigkeit eines angeblichen Beweises für den Satz über die Winkelsumme des Dreiecks, der bekanntlich gar keine notwendige Folge der vorausgehenden Lehren ist, nicht fähig sein soll zu bemerken!

Der Vortrag der Stereometrie besteht in Vorführung und freier Besprechung einzelner Körper. Eine universelle, geordnete Lehre von der Lage der Ebenen und Geraden fehlt ganz. Es wird nur vorübergehend einiges daraus mitgeteilt und ein unentbehrlicher Satz exact bewiesen. Bevorzugt unter den mannigfaltigen Gegenständen sind überall die Inhaltsberechnungen. Die Beobachtungen erstrecken sich auch auf die Kegelschnitte.

Die „Anfangsgründe der geometrischen Geometrie" bestehen in der Einführung der ebenen Coordinaten und deren Anwendung auf Gerade, Kreis und Kegelschnitte. Hoppe.

Die Grundlehren der ebenen Geometrie. Ein Leitfaden für den Unterricht mit Uebungsaufgaben. Von Jos. Lengauer, Professor am k. alten Gymnasium zu Würzburg. Vierte, umgearbeitete Auflage der Ebenen Geometrie von A. Stegemann. Kempten 1893. Jos. Kösel.

Die 2. Auflage ist im 231. litterarischen Bericht S. 30 besprochen. Bei der Neubearbeitung, welche durch Lengauer zuerst in 3. Auflage in Ausgabe gekommen ist, haben manche nicht unwichtige Aenderungen, Verbesserungen, Ergänzungen und Vermehrungen stattgefunden: Beweise sind gekürzt, eine reichhaltige Sammlung von Rechnungs- und Constructionsaufgaben ist hinzugefügt worden. Erst in 4. Auflage ist eine zu misbilligende Anordnung, die bis dahin bestand, durch Rückkehr zur gewöhnlichen verbessert worden, indem jetzt die Fundamentalaufgaben zum Lehrsystem gehören. Angezeigte Fehler sind berichtigt. Dagegen steht auf Seite 3 der 4. Auflage die unwahre Behauptung: „Gebilde, welche für einander gesetzt werden können, werden gleich genannt." Wer dies stets täte, müsste unzählige absurde Folgerungen einräumen, er müsste z. B. alle Dreiecke einander gleich nennen; denn, lässt sich irgend ein Dreieckssatz an einem beliebigen Dreiecke A beweisen, so kann man für dieses Dreieck auch ein beliebiges anderes Dreieck B setzen, und B hiesse dann gleich A. Dass an jener Stelle hinzugefügt ist: „Es

Digitized by Google

wird stets angegeben werden; unter welcher Bedingung ein Gebilde ein anderes ersetzen kann" — macht das Unwahre nicht wahr. „Ersetzen" ist ein relativer, aber nicht mehrdeutiger Begriff. Seine Beschänkung auf Fälle quantitativer Gleichheit ist als Verstoss gegen anerkannten Wortgebrauch unzulässig und würde, wenn man sie gelten liesse, die gegenwärtige Erklärung der Gleichheit zu null machen. Sollte eine Definition der Gleichheit schwierig scheinen, so ist zu beachten, dass alle unsere Kunde von geometrischer Gleichheit durch Congruenz vermittelt ist. Innerhalb der linearen Geometrie besteben je zwei gleiche Gebilde aus congruenten Teilen, und alle Beweise der Gleichheit nach gewöhnlicher Methode beruhen auf diesem Umstande. Folgende Definition trifft daher das Wesen der Sache: Zwei Gebilde, deren entsprechende Teile einander congruent sind, heissen einander gleich. Will man aber den Begriff der Gleichheit in seiner Totalität zum Ausdruck bringen, d. h. so, dass krumme Linien nicht ausgeschlossen sind, so darf man auch die Gleichheit, sofern sie nur einfachster Fall der Grössenvergleichung ist, nicht gesondert von der Ungleichheit (Grössen-Comparation) behandeln. Sind die Begriffe Grösser und Kleiner definirt, so wird nach dem bekannten Verfahren der Grenzeneinschliessung die Gleichheit in Fällen, wo sie nicht direct evident ist, daraus deducirt. Auch dies stimmt mit der gebräuchlichen Lehrmethode überein. Endlich ist auch die hier erforderte nachträgliche Erweiterung anfangs nur in engerem Umfange aufgestellter Begriffe ein bereits anerkanntes Lehrverfahren, ganz analog dem, welches beim Begriffe der Multiplication geübt zu werden pflegt. Hoppe.

Anfangsgründe der Trigonometrie. Pensum der Untersecunda. Herausgegeben von Dr. H. Lieber, Professor am Friedrich-Wilhelm-Real-Gymnasium in Stettin, und F. von Lühmann, Professor am Gymnasium in Königsberg i. d. Neumark. Mit 6 Figuren im Text. Berlin 1893. Leonhard Simion.

Das Buch erteilt einige Kenntniss von der Trigonometrie, hinreichend um die leichtern Rechnungsaufgaben zu lösen; doch ist die Begrenzung des Gegebenen weder ausgesprochen noch ein Princip ersichtlich, nach dem sie sich richtet. So kommen zwar Winkel > 1 Rechter und negative Functionswerte vor, doch wird nur bezüglich auf diese Fälle das Nötige angegeben, das Allgemeine darüber und die Periodicität nicht als Gegenstand der Lehre betrachtet. Goniometrische Relationen fehlen nicht ganz, wol aber die Formeln für die Functionen der Summen von Winkeln. Soviel indes Aufnahme gefunden hat, ist correct, in guter Ordnung und leichtfasslich behandelt, so dass das Pensum wenigstens nicht grösser scheint, als

Digitized by Google

es von Natur ist. Die Anforderungen an das Rechnen sind äusserst gering, die Erklärungen recht ausführlich und mannigfaltige Beispiele zur Uebung beigefügt. Das Buch enthält als zwei getrennte Teile die Berechnung des rechtwinkligen und des schiefwinkligen Dreiecks.

Hoppe.

Lehrbuch der Geometrie für höhere Lehranstalten. Von Dr. H. Rumpen und Dr. Aug. Blind. I. Teil. Planimetrie. Zweite nach den „Lehrplänen der höheren Schulen" verbesserte Auflage, Köln u. Leipzig 1893. Albert Ahn.

Das Buch war anfänglich für höhere Bürgerschulen bearbeitet, wird aber in jetziger Gestalt für alle höhern Schulen bestimmt. Der Charakter entspricht indes noch immer der Mittelstufe mathematischer Ausbildung. Auf Selbstdenken und strenge Schlüsse wird wenig Wert gelegt, dagegen durch Eingehen auf's Kleinste recht fleissig gesorgt den Schüler mit vielem doctrinären Wissen bekannt zu machen.

Hoppe.

Lehrbuch der Geometrie für Höhere Lehranstalten. Von Prof. Dr. Rumpen und Prof. Dr. Blind. II. und III. Teil. Trigonometrie und Stereometrie. (Erste Auflage.) Köln u. Leipzig 1893. Albert Ahn.

Die Trigonometrie, geteilt in die Lehre vom rechtwinkligen und schiefwinkligen Dreieck, zeigt kaum eine charakteristische Eigentümlichkeit: sie ist geeignet die Schüler durch anhaltende Beschäftigung in vielseitiger Weise mit der numerisch trigonometrischen Rechnung vertraut zu machen; zum Verständniss ist das Nötige reichlich gegeben. — Die Stereometrie nach vorliegender Darstellung lehrt einige Eigenschaften einiger Körper und gibt gelegentlich einige allgemeine Sätze über die Lage der Geraden und Ebenen.

Hoppe.

Der Coordinatenbegriff und einige Grundeigenschaften der Kegelschnitte. Zum Gebrauche an Gymnasien nach den neuen preussischen Lehrplänen bearbeitet von Hermann Roeder, Oberlehrer am Lyceum I zu Hannover. Mit 36 Figuren. Breslau 1893. Ferdinand Hirt.

Die Lehre von den Coordinaten sowol wie die von den Kegelschnitten sind beide nach synthetischem Princip entwickelt und fügen sich deswegen ganz harmonisch in den Schulunterricht ein.

Digitized by Google

Wenn daher auch manches in analytischer Weise hätte einfacher erklärt und hergeleitet werden können, so ist doch der darauf verwandte Fleiss alles selbst bei grösserer Inanspruchnahme der Vorstellungskraft vollständig deutlich zu machen als zweckmässig anzuerkennen. Construction und Rechnung sind gleicherweise berücksichtigt. Die Kegelschnitte werden als Oerter definirt, dann auch aus dem Kegel hergeleitet. H.

Leitfaden der elementaren Mathematik. Von Adolf Sickenberger, k. Gymnasialprofessor und Rector der Luitpold-Kreisrealschule in München. Zweiter Teil. Zweite Auflage. München 1893. Theodor Ackermann.

Die 1. Auflage ist im 25. litt. Bericht besprochen. Die zweite ist im wesentlichen unverändert. Einige Uebungsbeispiele sind hinzugekommen. H.

Leitfaden für den Unterricht in der Raumlehre. Von Prof. H. Martus, Director des Sophien-Realgymnasiums in Berlin. 1. Teil: Ebene Figuren. — 2. Teil: Dreiecksrechnung und Körperlehre. Bielefeld und Leipzig 1893. Velhagen u. Klasing.

Der Leitfaden ist als Auszug aus dem Hauptwerke des Verfassers, „Raumlehre für höhere Schulen" (erschienen 1890 und 1892, besprochen im 37. litt. Ber. S. 8 und im 46. litt. Ber. S. 21) in Rücksicht auf solche Schulen herausgegeben, welchen eine geringere Zeit für mathematischen Unterricht zu Gebote steht. H.

Leitfaden der Stereometrie nebst einer grossen Anzahl von Uebungsaufgaben. Zum Gebrauche an höheren Lehranstalten bearbeitet von Dr. E. Wrobel, I. Lehrer der Mathematik am Gymnasium zu Rostock. Zweite, verbesserte Auflage. Rostock 1895. Wilh. Werther.

Die 1. Auflage ist im 13. litt Bericht S. 9 besprochen. In der 2ten ist Charakter und Tendenz unverändert geblieben, manches einzelne verbessert worden, der gerügte Fehler aber im Beweise des 2. Lehrsatzes ist nicht berichtigt. Der Verfasser hält es nämlich für unmöglich, dass in verschiedenen Ebenen sich eine und dieselbe Gerade ziehen lässt! Hoppe.

Digitized by Google

Lehrbuch der darstellenden Geometrie. Von Dr. Karl Rohn, Professor der Mathematik an der k. s. technischen Hochschule zu Dresden, und Dr. Erwin Papperitz, Professor der Mathematik und darstellenden Geometrie an der k. s. Berg-Akademie zu Freiberg. In zwei Bänden. Erster Band. Mit zahlreichen Figuren im Text. Leipzig 1893. Veit u Comp.

Die Bedeutung der darstellenden Geometrie kann man unter drei Gesichtspunkte stellen. Sie löst erstens ein geometrisches Problem, das sich wenn man will auch erweitern und verändern lässt. Zweitens ist sie ein Organ stereometrischer Forschung, durch welches innerhalb dreifacher Variation eine zweifache isolirt erscheint. Drittens dient sie als angewandte Geometrie technischem Zwecke. Im vorliegenden I. Bande waltet der zweite Gesichtspunkt vor. Es soll mittelst der Darstellung eine umfassende räumliche Anschauung gepflegt werden. Das Mittel der Darstellung ist die Projection. Die Projectionslehre ist in vortrefflicher Weise so bearbeitet, dass sie von Anfängern ohne Mühe verstanden wird: die höhere projective Geometrie wird nicht als bekannt vorausgesetzt, sondern die Projection von Ebene auf Ebene ganz ausführlich behandelt und dabei die grundlegenden Begriffe entwickelt, alle Lehren und Erklärungen jedoch concinn und ohne Umschweife, entsprechend dem Standpunkte vollendeter elementarer Vorbildung, ausgesprochen.

H.

Lehrbuch der ebenen Elementar-Geometrie. Sechster Teil: Proportionalität der Strecken. Nebst einer Sammlung gelöster und ungelöster Aufgaben, mit den Ergebnissen der ungelösten Aufgaben. Mit 378 Erklärungen und 90 in dem Text gedruckten Figuren. Für das Selbststudium und zum Gebrauche an Lehranstalten bearbeitet nach System Kleyer von Prof. Dr. J. Sachs. Stuttgart 1893. Julius Maier.

Das Eigentümliche der Abfassung besteht darin, dass jeder Lehre eine Frage vorausgeht. Ueber deren Zweck lassen sich höchstens Vermutungen aufstellen.

H.

Digitized by Google

Mathematische und physikalische Bibliographie.

XLIV.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Berthold, Gerh., der Magister Joh. Fabricius u. die Sonnenflecken nebst e. Excurse über Dav. Fabricius. Leipzig, Veit & Co, 1 Mk. 80 Pf.

Cantor, Mor., Vorlesgn. üb. Geschichte d. Mathematik. 1. Bd. Von den ältesten Zeiten bis z. J. 1200 n. Chr. 2. Aufl. Leipzig, B. G. Teubner. 22 Mk.

Dirichlet, P. G. Lejeune, Vorlesgn. üb. Zahlentheorie. Hersg. u. m. Zusätzen versehen v. Prof. R. Dedekind. 4. Aufl. Braunschweig, F. Vieweg & Sohn. 14 Mk.

Fortschritte, die, der Physik i. J. 1887. Dargestellt von der physikal. Gesellschaft zu Berlin. 43. Jahrg. 3. Abtlg. (Physik d. Erde. Red. v. Prof. Dr. Assmann). Berlin, G. Reimer. 17 Mk.

dasselbe. i. J. 1888. 44. Jahrg. 1. Abt. (Physik d. Materie. Red. v. Rich. Börnstein). Braunschweig, Fr. Vieweg & Sohn. 20 Mk.

Jahrbuch üb. d. Fortschritte der Mathematik, begründet von Carl Ohrtmann, hrsg. v. Emil Lampe. 23. Bd. Jahrg. 1891. (In 3 Hftn.) 1. Hft. Berlin, G. Reimer. 13 Mk.

Kronecker, Leop., Vorlesgn. üb. Mathematik. Hrsg. unter Mitwirkg. einer v. der kgl. preuss. Akademie d. Wissenschaften eingesetzten Commission. 1. Bd. Vorlesungen üb. die Theorie der einfachen u. vielfachen Integrale. Hrsg. v. Eugen Netto. Leipzig, B. G. Teubner. 12 Mk.

Planck, Max, Heinrich Rudolf Hertz. Rede. Leipzig, J. A. Barth. 60 Pf.

Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften. Nr. 44. (Das Ausdehnungsgesetz der Gase. Abhandlgn. von Gay-Lussac,

Digitized by Google

Dalton, Dulong u. Petit, Rudberg, Magnus, Regnauld. [1802–1842]. Hrsg. v. W. Ostwald). Leipzig, W. Engelmann. 3 Mk.

dasselbe. Nr. 45. (Elektrochem. Untersuchgn. von Humphry Davis). Ebd. Kart. 1 Mk. 20 Pf.

Sammlung populärer Schriften, hrsg. v. der Gesellschaft Urania zu Berlin. Nr. 22. Galileo Galilei. Vortrag von Prof. Dr. v. Braumühl. Berlin, H. Paetel. 60 Pf.

Webers, Wilh., Werke. Hrsg. von d. kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. 4. u. 6. (Schluss-) Bd. Berlin, J. Springer. à 16 Mk. Gbd. à 18 Mk. 50 Pf.

Methode und Principien.

Reum, A., der mathemat. Lernstoff f. d. Unter-Secundaner des Gymnasiums, des Realgymnasiums u. d. Oberrealschule, sowie für den Primaner der Realschule. I. Anfangsgründe der Trigonometrie u. Berechng. v. Dreiecken. II. Die notwendigsten stereometr. Sätze üb. Ebenen v. Geraden; die einfachen Körper, ihre Zeichng. u. die Berechng. ihrer Oberflächen u. Inhalte. III. Die Lehre von den Potenzen, Wurzeln, Logarithmen u. der quadrat. Gleichg., in entwickelnder Lehrweise bearb. Essen, G. D. Baedeker. 60 Pf.

Lehrbücher.

Haller v. Hallerstein, F., Lehrb. d. Elementar-Mathematik. Nach d. Lehrplane f. das kgl. Kadetten-Korps bearb. v. Bruno Hülsen. 2. Tl. Pensum f. Ober-Tertia. 3. Aufl. Berlin, A. Nauck & Co. Geb. 3 Mk. 40 Pf.

Holzmüller, Gust., method. Lehrbch. d. Elementar-Mathematik. I. Tl., nach Jahrgängen geordnet u. bis zur Abschlussprüfung der Vollanstalten reichend. Leipzig, B. G. Teubner. Geb. 2 Mk. 40 Pf.

Sammlungen.

Bussler, Fr., Sammlung mathem. Aufgaben. Für den Gebrauch in den oberen Klassen höherer Lehranstalten zusammengestellt. Dresden, L. Ehlermann. Kart. 1 Mk. 40 Pf.

Donadt, A., Rechenbuch f. höh. Schulen. 2. Hft. Leipzig, O. R. Reisland. Geb. 1 Mk. 20 Pf.

Egger, Jak., Uebungsb. für den geometr. Unterr. an Sekundarschulen u. anderen Schulanstalten. 2. Tl.: I. Planimetrie. 3. Aufl. Bern, K. J. Wyss. Kart. 1 Mk.

Digitized by Google

Fetscher, Max, Aufgaben f. d. Rechenunterr. in den unteren Klassen der Gymnasien, Realgymnasien u. verwandter Lehranstalten. 1. u. 2. Bdchn. Stuttgart, A. Bonz & Co. 1. Bdchn. 45 Pf., 2. 50 Pf.

— dasselbe. Schlüssel. 1. u. 2. 40 Pf. bzw. 45 Pf.

Genau, A., Rechenb. f. Lehrerseminare. Verb. v. A. Genau u. P. A. Tüffers. 2 Bde. Gotha, E. F. Thiemann's Verlag. à 1 Mk. 80 Pf.

Heiland, F. u. K. Mathesius, Rechenb. f. Volksschulen. In amtl. Auftr. bearb. 5. Hft. Ausg. f. Lehrer. Weimar, H. Böhlau. 1 Mk. 70 Pf.

Hellermann, K. u. L. Krämer, Aufgaben f. das Kopfrechnen zum Gebrauch f. Lehrer. In 3 Hftn. bearb. Berlin, L. Oehmigke's Vlg. 5 Mk. 60 Pf.

Kleyer, A., Aufgaben-Sammlung aus allen Zweigen der Rechenkunst, der niederen u. höheren Mathematik, der Physik etc. 1248. bis 1267. Heft. Stuttgart, J. Maier. à 25 Pf.

Klunzinger, 500 Aufgaben f. d. mündl. u. schriftl. Rechnen. Ein stufenmässig geordneter Lehrgang f. d. Alter von 12—14 Jahren. 3. Aufl. Esslingen, A. Lung. 50 Pf.

Mehler, F. G., Hauptsätze d. Elementar-Mathematik zum Gebrauch an höh. Lehranstalten. 18. Aufl. Berlin, G. Reimer. 1 Mk. 60 Pf.; geb. 2 Mk.

Menzel, J., Rechenbuch. Hft. B. u. C. (f. d. Lehrer). 2. Aufl. Bielefeld, Velhagen u. Klasing. à 50 Pf.

Rocke, G., G. Röger u. F. Wolf, Aufgaben f. schriftl. Rechnen. 4 Hfte. Leipzig, Dürr'sche B. 95 Pf.

Rorschach, J., Raumberechnungen. Geometr. Rechnungsaufgaben f. Mittelschulen. II. Hft. Körperberechngn. 3. Aufl. St. Gallen, Huber & Co. Kart. 60 Pf.

Utescher, Otto, Rechenaufgaben f. höh. Schulen. In 3 Hftn. nach d. preuss. Lehrplänen bearb. Breslau, F. Hirt. 1 Mk. 10 Pf.

— dasselbe. Ergebnisse. 1. Hft. Ebd. 30 Pf.

Weinmeister, Paul, Sammlg. mathemat. Formeln u. Sätze. Ein Nachschlage- u. Wiederholungsbuch f. Schüler höh. Lehranstalten. Leipzig, Sigismund & Volkening. 1 Mk. 50 Pf.; kart. 1 Mk. 80 Pf.

Wyder, H., Aufgaben für d. Unterr. im Rechnen. VI. Hft. VI. Schuljahr (Ausg. f. Bezirks- u. Sekundarschulen.) Ausg. B. für Lehrer. 3. Aufl. Aarau, H. R. Sauerländer & Co. 70 Pf.

Arithmetik, Algebra und reine Analysis.

Braun, Ch., Anleitg. zum Denkrechnen für Schüler reiferen Alters. Landexamenaufgaben aus den J. 1871—1893. Stuttgart, A. Bonz & Co. 85 Pf.

Digitized by Google

Durège, H., Elemente der Theorie d. Funktionen e. complexen veränderlichen Grösse. Mit besond. Berücksicht. d. Schöpfgn. Riemann's bearb. 4. Aufl. Leipzig, B. G. Teubner. 6 Mk. 80 Pf.

Gegenbauer, Ludw., Notiz üb. die zu e. Fundamentaldiscriminante gehörigen Bernoulli'schen Zahlen. [Aus: „Sitzungsbericht der k. Akademie d. Wissensch.] Wien, F. Tempsky. 20 Pf.

— Ueber e. Theorem d. Herrn Baker. Ebd. 50 Pf.

Heffter, Lothar, Einleitung in die Theorie der linearen Differentialgleichungen m. einer unabhängigen Variabeln. Leipzig, B. G. Teubner. 6 Mk.

Heilermann, H. u. J. Dieckmann, Lehr- u. Uebungsbuch für d. Unterr. in der Algebra an den höh. Schulen. II. Tl. 4. Aufl. Essen, G. D. Bädeker. Geb. 2 Mk. 25 Pf.

Hochheim, Ad., Leitfaden f. den Unterr. in d. Arithmetik u. Algebra an höh. Lehranstalten. 1. Hft. 5. Aufl. Berlin, E. S. Mittler & Sohn. 3 Mk.

Kobald, E., üb. einige particulare Lösungen der Differentialgleichung für die Wärmeleitung in e. Kreiscylinder u. deren Anwendung. Wien, F. Tempsky. 30 Pf.

Lieb, Seyfferth u. Tillmann, Rechenschule. Ausg. f. Lehrer. Mit Ergebnissen, method. Ausführgn. u. weiteren Uebungsaufgaben C I u. III. Nürnberg, F, Korn. à 1 Mk. 20 Pf.

dasselbe. D I. Ebd. 1 Mk. 50 Pf.

Littmann, Otto, G. A., curso di aritmetica en el circulo de uno à ciento (comprendiendo los dos primero annos exolares) segun el método objetivo, para el uso de los maestros y alumnos normalistas. Freiburg i. Br., Herder's Vlg. Kart. 60 Pf.

Liznar, J., e. neue magnetische Aufnahme Oesterreichs. V. u. letzter vorläuf. Bericht. Wien, F. Tempsky. 20 Pf.

Mertens, F., Ueb. die Fundamentalgleichung e. Gattungsbereiches algebraischer Zahlen. Ebd. 70 Pf.

Pfeiffer, E., Lehrb. d. Arithmetik u. Algebra f. höhere Schulen, nach method. Grundsätzen bearb. u. hersg. 1. Tl. 2. Aufl. Jena, F. Mauke. Kart. 2 Mk. 40 Pf.

Rogel, Frz., üb. e. besondere Art v. Reihen. Prag, F. Rivnáč 60 Pf.

Geometrie.

Czuber, Prof. Eman., Ueb. Curvensysteme u. d. zugehörigen Differentialgleichgn. Wien, F. Tempsky. 1 Mk.

Diesener, H., die ebene Geometrie. Prakt. Unterrichtsbuch zur leichten Erlerng. der Planimetrie. Bearb. für d. Selbstunterricht u. zum Gebrauche an Baugewerkschulen u Fortbildungsschulen. 2. Aufl Halle, L. Hofstetter. 2 Mk. 70 Pf.

Digitized by Google

Focke, M. u. M. Krass, Lehrb. d. Geometrie zum Gebrauch an Gymnasien, Realgymnasien u. anderen höheren Lehranstalten. 2. Tl. (Stereometrie.) 6. Aufl. Münster, Coppenrath'sche B. 1 Mk. 40 Pf.; geb. 1 Mk. 80 Pf.

Kambly, Elementar-Mathematik. 2. Tl. Planimetrie. 10. Aufl durchgesehen v. H. Roeder. Breslau, F. Hirt. 1 Mk. 65 Pf.

Martus, H., Leitfaden für d. Unterricht in d. Raumlehre. 2. Tl. Dreiecksrechng. u. Körperlehre. Bielefeld, Velhagen u. Klasing. 1 Mk. 80 Pf.; geb. 2 Mk. 20 Pf.

Mehler, F. G., Ueber den Coordinatenbegriff u. einige Grundlehren von d. Kegelschnitten. Berlin, G. Reimer. 20 Pf.

Mock, Heinr. Aug., Wegweiser in d. Geometrie zum prakt. Schulgebrauche in Volks- u. Fortbildungsschulen f. Seminaristen u. Lehrer, in Wiederholungsfragen, Antworten u. Aufgaben nebst Zeichng., method. bearb. Hamm, Breer & Thiemann. 1 Mk. 80 Pf.

Molenbroek, Dr. P., Anwendung der Quaternionen auf die Geometrie. Leiden, E. J. Brill. 7 Mk.

Puchta, Ant., Aufstellg. eines neuen dreifach orthogonalen Flächensystems. Wien. F. Tempsky. 20 Pf.

Schotten, Heinr., Inhalt u. Methode d. planimetr. Unterrichts. Eine vergleichende Planimetrie. 2. Bd. Leipzig, B. G. Teubner. 8 Mk.

Schwering, Karl, Anfangsgründe der analytischen Geometrie f. höh. Lehranstalten. Nach d. neuen Lehrplänen bearb. Freiburg i. Br., Herder's Vlg. 40 Pf.

— Anfangsgründe der Raumlehre f. 6 stufige Schulen u. Lehrerseminare, nach d. neuen Lehrpl. bearb. Ebd. 20 Pf.

— Stereometrie f. höh. Lehranstalten. Nach d. neuen Lehrplänen bearb. Ebd. 80 Pf.; gbd. 1 Mk. 20 Pf.

Waelsch, Emil, üb. Flächen constanter Krümmung. Wien, F. Tempsky. 40 Pf.

Weiss, Wilh., Ueb. e. algebraische Theorie der Schaaren nichtadjungirter Berührungscurven, welche zu e. algebraischen Curve gehören. Ebd. 30 Pf.

Zwicky, M., Grundris d. Planimetrie u. Stereometrie nebst Uebungsaufgaben. 2. Tl.: Stereometrie. Bern, Schmid, Francke & Co. Kart. 1 Mk. 20 Pf.

Trigonometrie.

Focke, M. u. M. Krass, Lehrb. d. ebenen Trigonometrie, nebst den Grundzügen der sphär. Trigonometrie, zum Gebrauch an Gymnasien, Realgymnasien u. anderen höh. Lehranstalten. 7. Aufl. Münster, Coppenrath'sche B. 1 Mk. 20 Pf; geb. 1 Mk. 55 Pf.

Mehler, F. G., Trigonometrie. Berlin, G. Reimer. 20 Pf.

Digitized by Google

Praktische Geometrie, Geodäsie.

Arbeiten, astronomische, des k. k. Gradmessungsbureaux, ausgeführt unter d. Leitg. Theod. v. Oppolzer's. Nach dessen Tode hrsg. v. Edm. Weiss u. Rob. Schram. 5. Bd. Längenbestimmgn. Leipzig, G. Freytag. 16 Mk.

Dreiecknetz, das schweizerische, (der internat. Erdmessung) hrsg. v. der schweizer. geodät. Commission. 6. Bd. (Lotabweichgn. in der Westschweiz. Bearb. v. J. B. Messerschmitt.) Zürich, Fäsi & Beer. 10 Mk.

Kesslitz, Wilh. u. S. Schluet v. Schluetenberg, magnetische Aufnahme von Bosnien u. d. Herzegowina, ausgeführt i. J. 1893 i. Auftr. der Kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien. Wien, F. Tempsky. 2 Mk. 70 Pf.

Vogler, Ch. Aug., Lehrb. der prakt. Geometrie. 2. Tl. Höhenmessgn. 1. Halbbd. Anleitg. zum Nivelliren u. Einwägen. Braunschweig, F. Vieweg & Sohn. 11 Mk.

Wörmann, R. W. A., u. H. Godemann, das prakt. Feldmessen u. seine Anwendung in der Gärtnerei u. Landwirtschaft. 2. Aufl. Leipzig, H. Voigt. 3 Mk.

Technik.

Bauer, J. B., Hemmungen u. Pendel f. Praecisionsuhren u. die Uhren des Riefler'schen Systems. München, Literar.-artist. Anstalt. 1 Mk. 50 Pf.

Biscan, Wilh., die Bogenlampe. Physikalische Gesetze, Funktionen, Bau u. Konstruktion derselben; für Mechaniker, Installateure, Maschinenschlosser, Monteure etc., sowie als Anleitung zur Anfertigung v. Bogenlampen leichtfasslich dargestellt. Mit 74 Abbildgn. u. Konstruktionszeichnungen. Leipzig, O. Leiner. 2 Mk.; geb. 2 Mk. 50 Pf.

— die Dynamomaschine. Zum Selbststudium für Mechaniker, Installateure, Maschinenschlosser, Monteure etc., sowie als Anleitg. zur Selbstanfertig. von Dynamomaschinen leicht fasslich dargestellt. 3. Aufl. Mit 95 Abbildgn. u. Konstruktionszeichnungen. Ebd. 2 Mk.; geb. 2 Mk. 50 Pf.

Dehio, G., Untersuchgn. üb. das gleichseit. Dreieck als Norm. gotischer Bauproportionen. Stuttgart, J. G. Cotta'sche B. Nachf. 3 Mk.

Fortschritte der Elektrotechnik. Vierteljährliche Berichte üb. d. neueren Erscheingn. auf d. Gesammtgebiete der angewandten Elektricitätslehre m. Einschl. d. elektr. Nachrichten- u. Signalwesens

Digitized by Google

hrsg. v. Dr. Karl Strecker. 6. Jahrg. Das J. 1892. 1. u. 2. Hft. Berlin, J. Springer. 11 Mk.

Grünwald, F., der Bau, Betrieb u. d. Reparaturen der elektr. Beleuchtungsanlagen. Ein Leitfaden f. Monteure, Werkmeister, Techniker etc. 4. Aufl. Halle, W. Knapp. 3 Mk.

— die Herstellung u. Verwendg. der Akkumulatoren in Theorie u. Praxis. Ebd. 3 Mk.

Hilfsbuch zur Anfertigung v. Projekten u. Kostenanschlägen f. elektr. Beleuchtungen u. Kraftübertragung. Hrsg. von der allgem. Elektricitäts-Gesellschaft, Berlin. Berlin, Jul. Springer. Geb. 10 Mk.

Neureiter, F., die Verteilung d. elektr. Energie in Beleuchtungsanlagen. Leipzig, O. Leiner. 6 Mk.; geb. 7 Mk. 50 Pf.

Reinbertz, C., Mitteilgn. einiger Beobachtgn. üb. die Schätzungsgenauigkeit an Maassstäben, insbesondere an Nivellirskalen. Leipzig, W. Engelmann. 10 Mk.

Raetz, Th, Geometrie u. deren Anwendg. auf d. techn. Gewerbe f. Künstler u. Handwerker. Ein Lehrbuch für den Schul- u. Selbstunterr. Mit e. Atlas. 10. Aufl. Strassburg, Druckerei u. Verlagsanstalt. Kart. 4 Mk.

Schwartze, Thdr., Katechismus d. Elektrotechnik. 5. Aufl. Leipzig, J. J. Weber. Geb. 4 Mk. 50 Pf.

Vademecum für Elektrotechniker. Prakt. Hilfs- u. Notizbuch für Ingenieure, Elektrotechniker, Mechaniker, Werkmeister etc. Begründet von F. Rohrbach, fortgesetzt v. Arth. Wilke. 4. Aufl. Halle, W. Knapp. 4 Mk.

Zeitschrift f. Elektrotechnik u. Elektrochemie. Hrsg. v. Arth. Wilke & W. Borchers. 1. Jahrg. 12 Nrn. Ebd. 12 Mk.

Optik, Akustik und Elasticität.

Heath, R. S., Lehrb. der geometr. Optik. Deutsche Ausgabe von R. Kanthack. Berlin, J. Springer. 10 Mk.

Kayser, H. u. C. Runge, üb. die Spektren des Elementes, 7. Abschn. [Aus: „Abhandlgn. der kgl. preuss. Akademie der Wissenschaft."]. Berlin, G. Reimer. Kart 2 Mk.

Mach, Ludw., Ueb. e. Interferenzrefractometer. (II. Mittlg.) Wien, F. Tempsky. 90 Pf.

Schumann, Vict., üb. ein neues Verfahren zur Herstellg. ultraviolettempfindlicher Platten. Wien, F. Tempsky. 60 Pf.

Wanka, J., üb. Condensationsschwingungen. Ebd. 60 Pf.

Erd- und Himmelskunde.

Albrecht, Th., Formeln u. Hülfstabellen f. geograph. Ortsbestimmg. 3. Aufl. Leipzig, W. Engelmann. 17 Mk.; geb. 19 Mk.

Digitized by Google

Aus dem Archiv der deutschen Seewarte. XVI. Jahrg. 1893. Hamburg, L. Friederichsen & Co. 15 Mk.

Ballif, Ph., Ergebnisse der meteorologischen Beobachtungen über Temperatur, Niederschlag u. Bewölkung in Bosnien u. d. Herzegowina 1889. (Aus: „Wissensch. Mitteilgn. aus Bosnien u. d. Herzegowina" 1. Bd) Wien, C. Gerold's Sohn. 40 Pf.

Beobachtungen, deutsche überseeische meteorologische. Gesammelt u. hersg. von der deutschen Seewarte. VI. Hft. Hamburg, L. Friederichsen & Co. 7. Mk.

Cohn, Fritz, die klimatischen Verhältnisse v. Königsberg, nach 45jähriger meteorolog. Beobachtg. dargestellt. Königsberg, W. Koch. 3 Mk.

Elster, J. u. H. Geitel, Beobachtgn. d. normalen atmosphärischen Elektricität auf d. Sonnblick. Wien, F. Tempsky. 60 Pf.

Förster, W. u. E. Blenck, populäre Mitteilgn. zum astronomischen u. chronologischen Teile des preussischen Normalkalenders f. 1895. Berlin, Verlag d. kgl. statist. Bureaus. 1 Mk.

— u. P. Lehmann, die veränderlichen Tafeln des astronomischen u. chronologischen Teils des preussischen Normalkalenders f. 1895. Nebst e. allgem. statist. Beitrag v. E. Blenck. Ebd. 5 Mk.

Fritsche, H., magnetische Lokalabweichgn. bei Moskau u. ihre Beziehungen zur dortigen Lokal-Attraction. St. Petersburg, Selbstverlag. 3 Mk.

Gyldén, Hugo, traité analytique des orbites absolues des huit planètes principales. Tome I. Théorie générale des orbites absolues. Berlin, Mayer u. Müller. 28 Mk.

Hann, J., Beiträge zum tägl. Gange der meteorologischen Elemente in den höh. Luftschichten. Wien, F. Tempsky. 90 Pf.

Hoppe, O., oberirdische u. unterirdische Wirkungen eines Blitzstrahls. Leipzig, W. Engelmann. 75 Pf.

Jahrbuch, Berliner astronomisches f. 1896 m. Angaben f. die Oppositionen d. Planeten (1)—(334) f. 1894. Hrsg. von d. Recheninstitute d. kgl. Sternwarte zu Berlin unter Leitg. v. F. Tietjen. Berlin, F. Dümmler's Vlg. 12 Mk.

Jahrbuch f. Astronomie u. Geophysik. Enth. die wichtigsten Fortschritte auf d. Gebiete der Astrophysik, Meteorologie u. physikal. Erdkunde. Unter Mitwirkung v. Fachmännern hersg. v. J. Herm. Klein. 4. Jahrg. 1893. Leipzig, E. H. Mayer. Kart. 7 Mk.

Jahrbuch, deutsches meteorologisches f. 1892. Beobachtungs-System der deutschen Seewarte. Ergebnisse der meteorolog. Beobachtgn. an 10 Stationen II. Ordng. u. an 45 Signalstellen, sowie stündl. Aufzeichngn. an 2 Normal-Beobachtgs-Stationen. XV. Jahrg. hersg. von der Direktion der Seewarte. Hamburg, L. Friederichsen & Co. 13 Mk.

Digitized by Google

Jahrbuch, meteorologisches f. 1890. Beobachtungssytem des Königr. Preussen u. benachbarter Staaten. Ergebnisse der meteorolog. Beobachtgn. i. J. 1890. 3 Hft. Hrsg. von d. kgl. preuss. meterolog. Institut durch Wilh. von Bezold. Berlin, A. Asher & Co. 22 Mk.

Jahrbuch d. meteorolog. Beobachtgn. der Wetterwarte d. Magdeb. Zeitg. Herausg. v .A. W. Grützmacher. XI. Bd. XII. Jahrg. 1892. Magdeburg, Faber'sche B. Kart. 6 Mk.

Instruktion f. die Beobachter d. meteorolog. Stationen der Schweiz. 2. Aufl. Zürich, Fäsi & Beer. 2 Mk.

Klein, Herm. J., Katechismus d. mathem. Geographie. 2. Aufl. Leipzig, J. J. Weber. Geb. 2 Mk. 50 Pf.

Knipping, Erwin, die jährliche Periode der mittleren Richtung d. Winde, unteren u. oberen Luftströmgn. in Japan. Leipzig, W. Engelmann. 7 Mk.

Lersch, B. Max, Notizen üb. Kometenerscheingn. in früheren Jahrhunderten. (II. Mitteilg.) Wien, F. Tempsky. 40 Pf.

Margules, Max, Luftbewegungen in e. rotirenden Späroidschale. 3. Tl. Ebd. 1 Mk. 20 Pf.

Martin, Paul, Untersuchungen üb. die wahrscheinlichste Bahn des Cometen 1825. I. u. üb. seine Identität m. dem Cometen 1790. III. Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht. 3 Mk. 60 Pf.

Mayer's, Tobias, Sternverzeichnis. Nach den Beobachtgn. auf der Göttinger Sternwarte in d. Jahren 1756–1760. Neu bearb. v. Arth. Auwers. Leipzig, W. Engelmann. 22 Mk.

Neudrucke v. Schriften u. Karten üb. Meteorologie u. Erdmagnetismus, hrsg. v. G. Hellmann. Nr. 3: „Luke Howard, on the modifications of clouds. London 1803". Berlin, A. Asher & Co. 3 Mk.

Oerter, mittlere, von 622 Sternen u. scheinbare Oerter von 450 Sternen nebst Reduktions-Tafeln f. d. J. 1896 u. e. Anhg, enth. mittl. Oerter v. 303 südl. Sternen f. 1896, O. Berlin, F. Dümmler's Verlag 6 Mk.

Pernter, J. M., zur Erklärung des tägl. Ganges der Windgeschwindigkeit. Wien, F. Tempsky. 30 Pf.

Sack, Gust., üb. d. tägliche, jährliche u. elfjährige Periode d. Variationen d erdmagnetischen Kraft zu Greenwich. Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht. 3 Mk. 60 Pf.

Schmid, Rud., Wandtafeln zur mathem. Geographie. 3 Blatt à 61 × 81,5 cm. Leipzig, Leipziger Schulbilderverlag. F. E. Wachsmuth. à 1 Mk 40 Pf.

— dasselbe. Erläuterungen. Ebd. 20 Pf.

Schück, A., magnetische Beobachtgn. an der Unterelbe. Angestellt i. J. 1893. Hamburg, Selbstverlag. 1 Mk.

Tischner, Aug., le système solaire se mouvant. Leipzig, G. Fock. 80 Pf.

Digitized by Google

Veröffentlichungen d. Commission f. Erforschung d. östl. Mittelmeers. Vorläufiger Bericht üb. d. physikalisch-oceanograph. Arbeiten i. Sommer 1893 v. J. Luksch. Wien, F. Tempsky. 80 Pf.

Vierteljahrsschrift d. astronom. Gesellschaft. 28. Jahrg. 4. Hft. Leipzig, W. Engelmann. 11 Mk.

Nautik.

Effemeridi astronomico-nautiche per l'anno 1895, publicate per incarico dell' i. r. governo marittimo dall' i. r. osservatorio astronomico meteorologico in Trieste. Edizione italiana redatta da Ferd. Anton. Annata IX. Triest, F. H. Schimpf. Kart. 2 Mk. 70 Pf.

Jahrbuch, kleines nautisches, f. 1894 33. Jahrg. Hrsg. W. Ludolph. Bremen, M. Heinsius Nachf. 75 Pf.

Ludolph, W., Leuchtfeuer u. Schallsignale d. Erde. 23. Jahrg. 7. Aufl. Ebd. geb. 7 Mk. 50 Pf.

— dasselbe in Ostsee, Nordsee u. Kanal. 23. Jahrg. 7. Aufl. Ebd. 3 Mk.

Richter, M. M., die Lehre von der Wellenberuhigung. Berlin, R. Oppenheim. 2 Mk.

Verzeichnis der Leuchtfeuer u. Nebelsignalstationen aller Meere. Hrsg. v. dem hydrograph. Amt des Reichs-Marine-Amtes 1.—5. Hft. Abgeschlossen Mitte Febr. 1894. Berlin, E. S. Mittler & Sohn. 4 Mk. 50 Pf.; geb. 5 Mk.

— dasselbe. Anhang zum 6.—8. Heft. Abgeschlossen a. 1. März 1894. Ebd. 60 Pf.

Zeitschrift f. Luftschiffahrt u. Physik der Atmosphäre. Hrsg. v. dem deutschen Vereine zur Förderung der Luftschifffahrt in Berlin u. dem flugtechn. Vereine in Wien. Red. von Dr. V. Kremser. 13. Jahrg. 1894. 12 Hfte. Berlin, Mayer u. Müller. 12 Mk.

— dasselbe. Vollst. Inhaltsverzeichn. d. Jahrgänge VI—X. 1887 bis 1891). Ebd. 40 Pf.

Physik.

Annalen der Physik u. Chemie. Neue Folge. Hrsg. v. G. u. E Wiedemann. Namensregister zum 151.—160. Bd. (1874—1877), nebst Ergänzungsbänden VII u. VIII der Poggendorffschen Reihe u. zu Bd. 1—50 (1877—1893) der Reihe v. Wiedemann. Zusammengestellt v. P. Spindler. Leipzig, J. A. Barth. 4 Mk.

Annalen des physikal. Central-Observatoriums, hrsg. von H. Wild. (Russisch u. deutsch.) Jahrg. 1892. 2 Tle. Leipzig, Voss' Sort. 25 Mk. 60 Pf.

Digitized by Google

Baenitz, C., Leitf. f. d. Unterr. in d. Physik. Nach method. Grundsätzen unter Mitwirkg. v. W. Weiler bearb. 5. Aufl. Bielefeld, Velhagen & Klasing. Geb. 1 Mk. 60 Pf.

Benischke, Gust., zur Frage der Wärmestörg. durch die elektrische Polarisation. Wien, F. Tempsky. 20 Pf.

Bois, H. du, magnetische Kreise, deren Theorie u. Anwendg. München, R. Oldenbourg. Geb. 10 Mk.

Cantor, Mathias, üb. d. Zerstreuung d. Elektricität durch das Licht. Wien, F. Tempsky. 20 Pf.

Dechant, J., üb. magnet. Verzögergn. in Eisenkernen infolge periodisch wechselnder magnetisirender Kräfte. Ebd. 1 Mk.

Forschungen in der Agrikulturphysik. 16. Bd. 5. Hft. Heidelberg, Winter'sche Univers. Bhlg. 6 Mk.

Fricke, A., Leitfaden für den Unterricht in der Physik. In 2 konzentr. Kursen f. gehobene Bürger- u. höh. Mädchenschulen bearb. 2. Kurs. 4. Aufl. Braunschweig, Appelhaus & Pfennigstorff. Geb. 1 Mk. 75 Pf.

Handbuch der Physik. 20. Lfg. Breslau, E. Trewendt. 3 Mk. 60 Pf.

Hoppe, Edm., Lehrb. d. Physik f. höh. Lehranstalten. Mit 1 Karte d. Isogonen u. Isoklinen. Leipzig, J. A. Barth. 2 Mk. 20 Pf.

Kirchhoff, Gust, Vorlesungen üb. math. Physik. 4. Bd. Vorlesg. üb. d. Theorie d. Wärme. Hrsg. von Max Planck. Leipzig, B. G. Teubner. 8 Mk. (kplt.: 39 Mk.)

Koppe's Anfangsgründe d. Physik m. Einschluss d. Chemie u. mathem. Geographie. Für d. Unterr. an höh. Lehranstalten, sowie zur Selbstbelehrg. Ausg. A. 19. Aufl. bearb. v. H. Koppe. Essen, G. D. Baedeker. 4 Mk. 80 Pf.; geb. 5 Mk. 45 Pf.

Müller-Pouillet's Lehrb. der Physik u. Meteorologie. 9. Aufl. v. Leop. Pfaundler unter Mitwirkg. v. Otto Lummer. (In 3 Bdn.). 2. Bd. 1. Abt. 1. Lfg. Braunschweig, Fr. Vieweg u. Sohn. 4 Mk.

Münch, Arth., üb. e. exactes Verfahren zur Ermittlung der Entzündungstemperatur brennbarer Gasgemische. Berlin, R. Friedländer & Sohn. 1 Mk.

Neumann, Frz., Vorlesgn. üb die Theorie der Capillarität. Hrsg. von A. Wangerin. Vorlesgn. üb. math. Physik. VII. Heft. Leipzig, B. G. Teubner. 8 Mk.

Ostwald, Wilh., Elektrochemie. Ihre Geschichte u. Lehre. 1. Lfg. Leipzig, Veit & Co. 2 Mk.

Scherling, Chr., Grundris d. Experimentalphysik f. höhere Unterrichtsanstalten. 5. Aufl. bearb. v. W. Schaper. Leipzig, H. Haessel. 4 Mk.; geb. 4 Mk. 40 Pf.

Schollmeyer, G., was muss der Gebildete v. d. Elektrizität

Digitized by Google

wissen? Gemeinverständl. Belehrg. üb. die Kraft der Zukunft. 2. Aufl. Neuwied, Heuser's Vlg. 1 Mk. 50 Pf.

Thompson, S. P., der Elektromagnet. 3. Hft. Halle, W. Knapp. 3 Mk.

Tuma, Jos., Zur Theorie d. Herstellung hochgespannter Ströme v. hoher Frequenz mittelst oscillatorischer Condensatoren-Entladungen. Wien, F. Tempsky. 30 Pf.

Urbanitzky, die Elektrizität. 2. Aufl. 7.—12. Lfg. Wien, A. Hartleben. à 50 Pf.

Volksbibliothek, wissenschaftliche. Nr. 21—25. (Experimentalphysik. Leicht ausführbare Experimente ohne Apparate. Belehrende Unterhaltung im häusl. Kreise. Von James Cary.) Leipzig, S. Schnurpfeil. Geb. 1 Mk. 40 Pf.

Wiedemann, Gust., die Lehre von der Elektricität. 2. Aufl. 2. Bd. Braunschweig, F. Vieweg & Sohn. 28 Mk.; geb. 30 Mk.

Wiesengrund, Bernh., die Elektricität. Ihre Erzeugung, prakt. Verwendgn. v. Messg. Für Jedermann verständlich kurz dargestellt. Frankfurt a./M, H. Bechhold. 1 Mk.

Vermischte Schriften.

Abhandlungen der kgl. bayer. Akademie d. Wissenschaften. Mathematisch-physikal. Klasse. 18. Bd. 2. Abt. München, G. Franz' Verlag. 8 Mk.

Berichte üb. die Verhandlungen der kgl. sächs. Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Mathematisch-physikal. Classe. 1893 VII—IX. Leipzig, S. Hirzel. 3 Mk.

Anzeiger, Göttinger gelehrter, unter d. Aufsicht der kgl. Gesellschaft der Wissenschaften. Red.: Dr. Bechtel. Jahrg. 1894. 12 Nrn. Mit Nachrichten von d. kgl. Gesellschaft der Wissenschaften. Göttingen, Dietrich's Verlag. 30 Mk.; Nachrichten, mathem.-physikal. Klasse allein 5 Mk.

Berichte, math. aus Ungarn. 10. Bd. 2. Hlfte. u. 11. Bd. 1. Hlfte. Budapest, F. Kilian. à 4 Mk.

Blank, Frz., mathem. Unterrichtsbriefe. Für das Selbststudium Erwachsener. Mit besond. Berücksicht. der angewandten Mathematik bearb. 65.—81. Brief. Gera, C. B. Griesbach's Verlag. à 60 Pf.

Blätter, periodische für naturkundl. u. mathemat. Schulunterricht. Hrsg. unter Mitwirkung hervorrag. Fachleute d. Rob. Neumann. 1. Jahrg. 1894. 8 Hfte. Znaim, Fournier & Haberler. 5 Mk.

Denkschriften der kaiserl. Akademie der Wissenschaften. Mathemat.-naturwiss. Klasse. 60. Bd. Wien, F. Tempsky. Kart. 60 Mk.

Digitized by Google

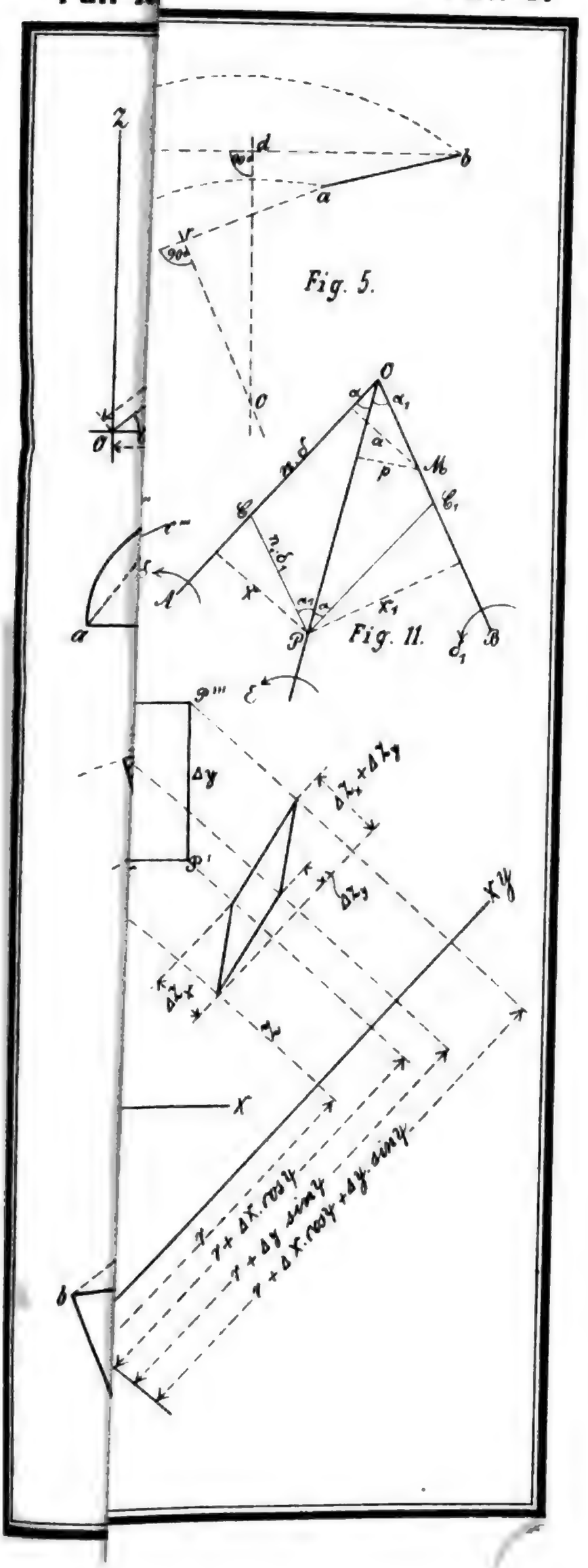


Fig. 5.
Fig. 11.
Δy
r + Δx.cosψ
r + Δy sinψ
r + Δx.cosψ + Δy.sinψ

Litterarischer Bericht

LII.

Lehrbücher.

Lehrbuch der darstellenden Geometrie Von J. Schlotke, Lehrer der allgemeinen Gewerbeschule in Hamburg. — II. Teil. Schatten- und Beleuchtungslehre. Mit 79 Figuren. 1893. — III. Teil. Perspective. Mit 133 Figuren 1894. — Dresden, Gerhard Kühtmann. 60 + 381 S.

Die Einleitung zur Schattenlehre hätte allen Grund gehabt hier exacte Rede zu führen, weil der allgemeine Wortgebrauch hier gerade nicht exact ist. Aber gerade hier lässt es der Verfasser am Nötigen fehlen. Die Nominalerklärungen sind unzureichend, „Schatten" und „Eigenschatten" werden gar nicht definirt, „Schlagschatten" etwas undeutlich. Anstatt der Confusion der Begriffe zu wehren, macht sich der Verfasser selbst derselben schuldig, sagt z. B. Seite 2, Zeile 2 Raum statt Flächenstück, Zeile 11 Schatten statt Schlagschatten.

Der 3. Teil behandelt die Projection räumlicher Gebilde aus endlich fernem Centrum und zwar hauptsächlich von Geraden und Ebenen begrenzter Körper, ausserdem auch Rotationskörper berücksichtigend. Die allgemeinen Grundsätze der Bearbeitung sind, darf man annehmen, aus dem 1. Teile zu erkennen. Nur soviel ist hier im Vorwort ausgesprochen, dass Versuche die mathematische Vor-

Digitized by Google

bildung entbehrlich zu machen, wie sie öfters aufgetreten sind, gänzlich verworfen werden müssen und sich als verfehlt erwiesen haben. Es werden Beispiele aus einer ohne Mathematik auf blosse Anschauung gebauten Belehrung angeführt. Die Verfasser scheinen stets vorauszusetzen, dass die Schüler freundlichst zuvorkommend die Worte nicht wie gesagt sind, sondern wie sie gemeint sind, zu verstehen suchen werden. Hoppe.

Elementarphysik unter Zugrundelegung des Grundrisses der Experimentalphysik von E. Jochmann und G. Hermes für den Anfangsunterricht in höheren Lehranstalten herausgegeben von V. Hermes. Mit 186 Holzschnitten. Berlin 1892. Winkelmann u. Söhne. 188 S.

Das Lehrbuch verfolgt nur das eine Ziel, die Gesetze der Erscheinungen in der leblosen, unorganischen Natur klar, unumwunden und exact darzulegen und leistet in dieser Beziehung vorzügliches. Die Wege der Entdeckung und Forschung durch Beobachtung, Experiment und Rechnung lässt es unberührt, auch die theoretische Begründung macht es sich nicht allgemein zur Aufgabe; was zu ganz einfacher Begründung der Lehren hinzugefügt ist, erreicht noch lange nicht die Grenzen elementarer Mathematik. Die Lehren werden auch nicht zu Systemen gestaltet, sondern in Gruppen der Erscheinungen geordnet und werden sich wol so am besten einprägen. H.

Lehrbuch der Physik für höhere Lehranstalten, sowie zur Einführung in das Studium der neueren Physik. Von Dr. H. Börner, Director des Realgymnasiums in Elberfeld. Mit 470 in den Text gedruckten Abbildungen. Berlin 1892. Weidmann. 584 S.

Das Buch stellt sich als ein pädagogischer Thesaurus dar, der den Lehrstoff des physikalischen Unterrichts im weitesten Umfang für eine Reihe von Classen zur Auswahl nach Ermessen des Lehrers fertig bearbeitet darbietet. Da auf sehr verschiedenen Standpunkt der Vorbildung, namentlich der mathematischen, gerechnet werden musste, so hat es der Verfasser für nötig befunden, das Lehrbuch in 2 Teile: erste und zweite Stufe, zu teilen. Mechanik, Akustik, Optik, Wärme, Elektricität und Magnetisismus werden im zweiten Teile aufs neue behandelt, doch betreffen die einzelnen Lehren nicht dieselben Gegenstände wie im ersten. Um auch dem Bedürfniss mehr als gewöhnlich begabter Schüler zu genügen, geht der 2. Teil

Digitized by Google

ziemlich weit auf Theorien ein, die eigentlich noch Gegenstand der Forschung sind. Was diese betrifft, hätte der Verfasser wenigstens nicht es bei Darstellungsweisen, wie er sie vielleicht in Originalschriften gefunden hat, belassen dürfen; in einem Lehrbuche für Schulen musste gründliche Aufklärung über die Begriffe gegeben werden. So sind z. B. Arbeit und lebendige Kraft der Erklärung zufolge ideelle Begriffe, die sich auf absolute Wegstrecken beziehen und auf relative Wegstrecken und Geschwindigkeiten, wie sie in Wirklichkeit allein existiren, gar nicht bezogen werden können. Dennoch gibt das Lehrbuch über diesem Punkt keinen Aufschluss. Bei Einführung des Begriffs der Entropie ist von Summen derselben die Rede, und sie kommt als positiv und negativ in Rechnung. Beides hat offenbar, so lange ihr keine Quantität zugeschrieben wird, keinen Sinn, und von ihrem Quantum steht kein Wort im Buche. Dies ist um so verwirrender, weil es zu dem Irrtum verleitet, das Quantum verwandelter Energie als Quantum der Entropie zu betrachten, was zu Widersprüchen führt. Hoppe.

Leitfaden für den Anschauungsunterricht in der Physik. Von Dr. Max Pieper, Oberlehrer am Herzoglichen Friedrichs-Gymnasium zu Dessau. Dessau 1891. Paul Baumann. 55 S.

Die Lehrweise ist die beschreibende. Ueberdies ist sie mehr darauf bedacht, auf Naturvorgänge aufmerksam zu machen und deren gebräuchliche Benennung mitzuteilen als auf den Zusammenhang der Vorgänge hinzuleiten. Dass man, selbst für den sehr niedrigen Standpunkt der Lernenden, wie ihn der Verfasser voraussetzt, sehr viel zu sagen hat um den Sinn für die Aufgabe der Physik zu wecken, ist leicht zu sehen. Es brauchte sich also auch dieser Leitfaden nicht auf die einzelnen mit Sinnen wahrnehmbaren Erscheinungen zu beschränken, vielmehr hätte es ihm in der Tat auch obgelegen, das Sichtbare durch das, was wir zur Erklärung annehmen müssen, zu einer ursachlich zusammhangenden Vorstellung zu ergänzen. Hoppe.

Sammlungen.

Sammlung von arithmetischen und algebraischen Fragen und Aufgaben, verbunden mit einem systematischen Aufbau der Begriffe, Formeln und Lehrsätze der Arithmetik für höhere Schulen. Von

Dr. Hermann Schubert, Professor an der Gelehrtenschule des Johanneums in Hamburg. Erstes Heft: Für mittlere Classen. Dritte Auflage. 1890. 224 S. — Zweites Heft: Für obere Classen. 1888. Zweite Auflage. — — 228 S.

Aufgaben aus der Arithmetik und Algebra für Real- und Bürgerschulen. Ein Auszug aus der Sammlung von arithmetischen und algebraischen Fragen und Aufgaben. — — Erstes Heft 1892. — Zweites Heft 1893. — 194 S.

Resultate zur Sammlung von arithmetischen und algebraischen Aufgaben für höhere Schulen. Ausgewählte Resultate zu beiden Heften. Zweite Auflage 1892. — Von Dr. Hermann Schubert. — — Potsdam. August Stein. 77 S.

Dies in 5 Heften enthaltene Werk zeichnet sich dadurch aus, dass es die Einübung der Lehren der Arithmetik und Algebra, d. h. des numerischen und algebraischen Rechnens, in allen erdenklichen Formen zum Ziele nimmt. Der Umfang ist den höhern Unterrichtsanstalten angemessen. Die Uebungsbeispiele schliessen sich in grosser Anzahl dem Lehrgange an. Die Lehren selbst, Erklärungen, Sätze und Formeln ohne Beweise, gehen jedem Abschnitt voraus. Resultate sind im betreffenden Hefte nur von solchen Aufgaben aufgestellt, „bei welchen eine Beruhigung des Schülers über die Richtigkeit der gefundenen Lösung wünschenswert erscheint, bei welchen jedoch die Kenntniss des Resultats ihm die Denkbarkeit nicht abnimmt". Wünschenswert bleibt freilich immer, dass der Schüler sich die Beruhigung und Vergewisserung durch Probe selbst geben und sich von einer fremden Hülfe, die er im spätern Leben doch entbehren muss, unabhängig machen lerne. H.

Mathematisches Uebungsbuch. Erster Teil. Für den Gebrauch in den mittleren Classen höherer Lehranstalten (Untertertia bis Untersecunda). Zusammengestellt von Fr. Bussler, Professor am Sophien-Gymnasium zu Berlin. Dresden 1894. L. Ehlermann. 80 S.

Sammlung mathematischer Aufgaben. Ein Uebungsbuch für die oberen Classen höherer Lehranstalten. Zusammengestellt von Fr. Bussler, Professor am Sophien-Gymnasium zu Berlin. Dresden 1894. L. Ehlermann. 120 S.

Beide Sammlungen sind durchgehends nach den Gymnasialclassen eingeteilt, zu deren Pensen die Aufgaben gehören. Zu jeder Lehre gehören 4 Aufgaben. Die Aufgaben sind arithmetische (mit Buchstaben), Gleichungen, trigonometrische (mit Logarithmen), geome-

Digitized by Google

trische (Sätze und Constructionen). Bei den Sätzen, wo die Frage nicht dabei steht, darf man wol annehmen, dass der Beweis verlangt wird. H.

Arithmetische Aufgaben. Herausgegeben von Dr. H. Lieber, Professor am Friedrich-Wilhelm-Realgymnasium zu Stettin, und Dr. A. Köhler, Oberlehrer am Friedrich-Wilhelm-Realgymnasium zu Stettin. Berlin 1894. Leonhard Simion. 222 S.

Auflösungen zu den arithmetischen Aufgaben. Herausgegeben von Dr. H. Lieber, Professor am Friedrich-Wilhelm-Realgymnasium zu Stettin und Dr. A. Köhler, Oberlehrer am Friedrich-Wilhelm-Realgymnasium zu Stettin. Berlin 1894. Leonhard Simion. 79 S.

Die Aufgaben schliessen sich an den Leitfaden der Arithmetik von Lieber und Lühmann an und sind für die Classen Untertertia bis Obersecunda bestimmt. Es sind vorzüglich solche gewählt, die einfache Resultate ergeben. Die „Auflösungen" geben die Resultate aller Aufgaben ohne irgend welche Bemerkung. H.

Recueil de problèmes de mathematiques. Arithmétique, algèbre élémentaire, trigonométrie. A l'usage des classes de mathematiques élémentaires. Par C. A. Laisant, Docteur ès sciences, Ancien élève de l'École Polytechnique. Paris 1893. Gauthier Villars et fils. 86 S.

Das Vorliegende ist eine geordnete Sammlung der interessantesten Aufgaben, welche der Herausgeber in Zeitschriften aus den Jahren 1842 bis jetzt gefunden hat, nebst Angabe der Autoren und Verweisung auf die Lösungen, soweit sie bekannt sind, ohne Unterschied, ob die Aufgaben sich zum Gebrauch an Schulen eignen.
H.

Geometrische Analysis und Synthesis. Eine Sammlung von 636 planimetrischen Constructions-Aufgaben mit rein geometrischer Lösung. Für höhere Lehranstalten sowie zum Gebrauch beim Selbstunterricht systematisch geordnet und bearbeitet von W. Adam, Königl. Seminarlehrer a. D. Zweite Auflage. Potsdam 1893. Aug. Stein. 219 S.

Die erste Auflage ist in 1. Reihe, 219. litt. Bericht S. 8 besprochen. Die 2te scheint unverändert zu sein. Insbesondere lassen

die einleitenden Erklärungen noch ebensowenig Geschick in verständlicher Rede erkennen. Sämtliche Aufgaben sind mit wenigstens angedeuteter Lösung nebst Beweis versehen, so dass der Schüler den Weg der Lösung nie zu suchen braucht. Hoppe.

Analytische Geometrie der Ebene. Sammlung von Lehrsätzen und Aufgaben nebst Erläuterungen und Resultaten. Von J. Schlotke, Lehrer der Allgemeinen Gewerbeschule in Hamburg. Mit 37 Figuren. Dresden 1891. Gerhard Kühtmann. 217 S.

Die Aufgaben, welche sich der Lehre von den Geraden, Kreisen und Kegelschnitten mit Gebrauch der Coordinaten anschliessen, sind im Buche ausführlich allgemein gelöst, und es bleibt für den Schüler nur die Arbeit übrig, numerisch gegebene Beispiele danach auszurechnen. H.

Lehrbuch der planimetrischen Constructionsaufgaben gelöst durch geometrische Analysis. Dritter Teil: Verwandlungs- und Teilungsaufgaben über ein- und umbeschriebene Figuren, Mit 519 gelösten und ungelösten Aufgaben, 40 Anmerkungen, 72 Erklärungen und 54 in den Text gedruckten Figuren. Für das Selbststudium und zum Gebrauch an Lehranstalten bearbeitet nach System Kleyer von E. R. Müller. Stuttgart 1893. Julius Maier. 86 S.

Die zu den genannten Gebieten gehörenden Aufgaben hat der Verfasser systematisch behandelt. Reihen von Anmerkungen geben die Gesichtspunkte der Anordnung. Zu jeder Aufgabe wird der Weg der Lösung nebst Verweisung auf die anzuwendenden frühern Aufgaben angezeigt. H.

Recueil d' exercices sur la mécanique rationnelle à l'usage des candidats à la licence et à l' agrégation des sciences mathématiques. Par A. de Saint-Germain, Professeur de Mécanique à la Faculté des Sciences de Caen. Deuxième édition, entièrement refondue. Paris 1889. Gauthier Villars et fils. 560 S.

Das Buch enthält eine sehr reiche Sammlung von Uebungsaufgaben aus der Statik, Kinematik und Dynamik, jede mit ausführlicher Lösung. Obgleich vor jedem Abschnitt die Theorie entwickelt wird, so bilden die Aufgaben den Zweck der Herausgabe. Der Verfasser spricht sich dahin aus, dass es bei der Lösung weniger auf ein formulirtes Resultat, als vielmehr darauf ankomme, dass die

Digitized by Google

Natur der Bewegung in allgemeinster Weise ans Licht gestellt sei, die öfters aus der Differentialgleichung besser als aus dem Integral erkennbar sei. H.

Tabellen.

Logarithmisch-trigonometrische Tafeln für neue (centesimale) Teilung mit sechs Decimalstellen. Von W. Jordan, Professor an der Kgl. techn. Hochschule zu Hannover. Stuttgart 1894. Konrad Wittwer. 420 S.

Mit Herausgabe dieses Werkes ist ein neuer Schritt zu dem ersehnten Ziele getan die 3 überflüssigen goniometrischen Benennungen, Grad, Minute, Secunde, abzuschaffen und dem Rechner die dadurch aufgebürdeten Reductionen zu ersparen. Laut Vorwort steht der „neuen" „centesimalen" Winkelteilung noch sehr der Mangel an ausreichenden trigonometrischen Tafeln entgegen. Die 7 stelligen sind vergriffen, nur 5 stellige sind zu haben. Der Verfasser enthüllt indes den Stand der Sache nur sehr oberflächlich. Nachdem schon solange Zeit das Ziel ins Auge gefasst und dann und wann ein Beitrag dafür geliefert worden ist, sind wir noch nicht einmal so weit, dass das Unternehmen überhaupt als gesichert erscheint. Alle, die daran arbeiten, treten noch so auf, als böten sie neben der gebräuchlichen Rechnungsweise eine zweite dar, die Manchen besser gefiele, und als käme es niemandem in den Sinn die alte Winkelteilung in Wegfall zu bringen. Wenn selbst diejenigen, in deren Interesse es liegt, die Annahme der Decimalteilung soweit als möglich auszubreiten, einen so traurigen Prospect eröffnen, wo Jeder, der Decimalteilung anwendet, für alle Zeit mit beiden Rechnungsweisen vertraut bleiben und für beide die nötigen Tafeln besitzen muss, so kann man sich nicht wundern, dass die Beteiligung von Seiten der Anwender und der Herausgeber bis jetzt so gering geblieben ist. Das Gesagte trifft auch das vorliegende Werk. Die Einrichtung lehnt sich an die alte Winkelteilung an, gleich als sollte letztere durchaus erhalten bleiben. Die dreifache Benennung, Grad, Minute, Secunde, die jetzt ganz überflüssig ist, wird, noch dazu mit störender Bedeutungsänderung, auf das neue System übertragen. Auf dem Titel steht: „Für neue (centesimale) Teilung" statt einfach zu sagen: „Für decimale Teilung des rechten Winkels." Uebereinstimmend nämlich ist zwischen beiden Systemen die oberste Benennung R — 1 rechten Winkel, unverrückbar als volles Intervall für alle Zahlenwerte aller Kreisfunctionen. Eine fernere Bestätigung

des obigen Urteils über die vorliegende Einrichtung bietet eine Reductionstafel zwischen der alten und neuen Tafel, am Schluss hinzugefügt. Wenn diese einen Zweck haben soll, so kann es doch nur im Dienste der alten Tafeln sein. Dass die gegenwätige Tafel die Logarithmen nur auf 6 Stellen gibt, (eine Zahl die rücksichtlich des Volumens im ganzen unvorteilhaft ist) mag durch die besondere Bestimmung für Landesvermesser motivirt erscheinen. Handelt es sich aber um Ueberwindung der Herrschaft eines unpraktischen Herkommens, so ist ein Stehenbleiben auf halbem Wege ganz unzweckmässig. Soll die Decimalteilung der Winkel in Aufnahme kommen, so dürfen die käuflichen trigonometrischen Tafeln in keiner Hinsicht, weder in Stellenzahl noch in Detaillirung, hinter den 7 stelligen von Vega-Bremiker zurückstehen. Von dieser Bedingung hängt nicht nur die freie Wahl der einzelnen Rechner, sondern auch die Möglichkeit der Einführung auf allen Lehranstalten, auch derer, die nur 5 stellig rechnen, ab. Denn wenn die Schüler im spätern Beruf genötigt wären Tafeln mit alter Teilung zu Hülfe zu nehmen, so müsste deren Gebrauch auch gelehrt werden. Wenn endlich ein Zweifel, ob Mühe und Kosten durch reichlichen Absatz ihren Lohn finden würden, die Unternehmer von der Herausgabe grösserer Tafeln zurückhielte, so wäre die Besorgniss ganz ohne Grund. Zunächst ist durch die mehr als 60 Auflagen der Veja'schen Tafeln die Häufigkeit des 7 stelligen Rechnens und das Bedürfniss 7 stelliger Tafeln überhaupt genügend dargetan. Der Umstand, dass die 7 stelligen trigonometrischen Tafeln mit Decimalteilung sämtlich vergriffen sind, spricht sehr dafür, dass, wenn nur solche vorhanden wären, es an deren Anwendung nicht fehlen würde. Ausserdem ist ersichtlich, dass Einschaltung von Zwischenstufen keine Erleichterung des Unternehmens im ganzen gewähren, sondern es nur weniger einträglich und mühevoller machen kann. Daher ist mit der gegenwärtigen Herausgabe von 6, vorläufig statt 7 stelligen Tafeln der eigene Vorteil gar nicht wol bedacht. Nur zu erwähnen ist noch der ganz nichtige Einwand, den man noch öfters hört: um die alte Winkelteilung entbehrlich zu machen, müssten erst alle darauf eingerichteten Instrumente und Apparate abgeändert werden. Die Scalen der Apparate sind meistens unabhängig von der Benutzung der Beobachtungsdaten gewählt, und niemand sieht in ihrer Reduction eine beträchtliche Mehrarbeit; jedenfalls ist letztere viel geringer als die beständige Reduction während jeder Rechnung. — In dem vorliegenden Werke geht der Tafel der Logarithmen der Kreisfunctionen die gleichfalls 6 stellige Tafel der Logarithmen der Zahlen voraus, sie selbst ist detaillirt bis auf die hundertel Rechte, ihr folgen noch vielstellige Tafeln für die Logarithmen gewisser besonders bedeutsamer Zahlen.

Digitized by Google

Mathematische und geodätische Hülfstafeln. Neunte Auflage. Herausgegeben von Dr. W. Jordan, Professor an der technischen Hochschule in Hannover. Hannover 1895, Helwing. 120 S.

Das Ganze ist eine Zusammenstellung von 34 kleinen Tafeln. Das Buch ist bereits durch seinen praktischen Gebrauch so bekannt, dass der Herausgeber nicht für nötig befunden hat, die Bedeutung der Tafeln zu erklären.

Tafel des Integrals

$$\Phi(\gamma) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\gamma} e^{-t^2} dt$$

zusammengestellt von Bruno Kämpfe. Leipzig 1893. Wilhelm Engelmann.

Die Tafel ist 4 stellig, detaillirt auf 3 Bruchstellen von γ bis $\gamma = 1{,}5$, von da an auf 2. Für $\gamma > 2{,}86$ ist der Unterschied von $\Phi(\infty) = 1$ in 4ter Stelle nicht mehr merklich. Das Ganze steht auf wenig mehr als 3 Seiten 8°. — Die Werte sind aus Meyer's „Wahrscheinlichkeitsrechnung" entnommen und daselbst bis $\gamma = 1{,}51$ durch Interpolation unter Benutzung der 2ten Differenzen erhalten worden. H.

Berechnung von Renten und Lebens-Versicherungen. An der Hand von Beispielen erläutert von Jos. Thannabaur, k. k. Ober-Real-Professor in Olmütz. Wien, 1893. Karl Graeser. 132 S.

Zinseszinsen- und Rententafeln. Ein Hilfsmittel zur Berechnung des Bar- und Endwertes von Capitalien und Renten oder Annuitäten, der Höhe der letzteren bei gegebenem Bar- oder Endwert, sowie zur Berechnung des Zinsfusses oder der Zeit. Zum praktischen Gebrauch für Sparcassen-, Bank-, Assecuranz-, Forst-Beamte etc., sowie zum Schulgebrauch für Bürgerschulen, gewerbliche Fortbildungs- und Gremial-Handelsschulen. Berechnet und durch zahlreiche Beispiele erläutert von Jos. Thannabaur, k. k. OberReal-schul-Professor. Wien 1893. Karl Graeser. 80 S.

Auf ersteres Buch, welches die vielen Arten von Renten und Versicherungen erklärt, müssen wir verweisen, wenn es sich um Bedeutung und Gebrauch der 4 im erstern und der 12 im letztern enthaltenen Tafeln handelt. Sämtliche Tafeln sind 7 stellig.

H.

Erd- und Himmelskunde.

Grundlehren der mathematischen Geographie und elementaren Astronomie für den Unterricht bearbeitet von Dr. Siegmund Günther, Professor der technischen Hochschule München. Dritte, durchaus umgearbeitete und revidierte Auflage. München 1893. Theodor Ackermann. 131 S.

Die 2. Auflage ist im 13. litt. Bericht, S. 22 besprochen. Die dritte erscheint mit vielen eingehenden Verbesserungen. Die 3 Stufen der Weltanschauung, nach denen die Entwickelung der Lehre fortschreitet, sind deutlich geschieden. Die Lehre auf erster, dem festen Horizont entsprechender Stufe enthält noch nichts von Geographie. Die Himmelserscheinungen werden einzeln durchgegangen und formulirte Lehrsätze darüber aufgestellt. Ob diese zu einer guten Orientirung hinreichend sind, scheint wenig bedacht zu sein. Da sich sehr wol einfache Gesichtspunkte geben lassen, nach denen man sich ohne höhere Kenntnisse eine Anschauung von der Bewegung des Sonnensystems bilden kann, und gemäss der im Vorwort ausgesprochenen Bestimmung des Buches gerade dieses besonders erstrebt werden musste, so kann man von der gegenwärtigen Bearbeitung gewiss nicht sagen, dass sie das Erreichbare schon erreicht habe. Der zweite Teil der Lehre, der auf geometrischem Grunde steht, die Erde aber anfangs consequent als Kugel betrachtet, geht geometrisch zuwerke, nimmt mehr und mehr die Präcisionsfragen auf und umfasst auch geodätische Aufgaben. Der dritte Teil, auf heliocentrischem Standpunkte, ist so ausführlich, als man es bei elementarer Darstellung nur wünschen kann. Ueber die Ursachen von Flut und Ebbe hat sich der Verfasser noch keine Klarheit verschafft. Was er sagt, ist sinnlos. Da der Entwickelungsgang der Lehre mit der Geschichte der Forschung nahe übereinstimmt, so war es ganz zweckmässig alle zugehörigen historischen Angaben zu machen, was auch in anerkennenswerter Weise geschehen ist.

Hoppe.

Elementare Rechnungen aus der mathematischen Geographie für Freunde der Astronomie in ausgewählten Capiteln gemeinverständlich begründet und vorgeführt von O. Weidefeld, Oberrossarzt a. D., Mitglied der Vereinigung von Freunden der Astronomie und kosmischen Physik. Mit einer Figurentafel. Berlin 1894, Ferd. Dümmler. 64 S.

Als notwendige Vorkenntnisse werden betrachtet die Lehren von den trigonometrischen Functionen und von den brigg'schen

Digitized by Google

Logarithmen; dieselben werden im voraus vorgetragen. Der Umfang des Lehrstoffs ist gering: es handelt sich um Bestimmung des Laufes der Sonne in Bogen, Azimut und Höhe; die Genauigkeit wird nach Möglichkeit streng genommen. Die Lehrweise zeichnet sich durch klare, correcte Sprache aus. H.

Der Erdmagnetismus nach seiner Ursache, sowie nach seiner Bedeutung für die Wetterprognose erläutert von Dr. B. Saubert. Mit 8 Tafeln und 1 Figur im Text. Hannover 1895. Helwing. 44 S.

Die Schrift erweckt Hoffnung, mit Hülfe erdmagnetischer Beobachtungen uns der Erkenntniss der atmosphärischen Vorgänge nähern zu lernen. Die Möglichkeit gründet sich darauf, dass die erdmagnetischen Erscheinungen teils von constanten Kräften des Erdkörpers teils von veränderlichen äussern Wärmezuständen abhangen. Das Gegenwärtige macht zur Anbahnung der Untersuchung durch Vergleichung der Declinations-, Inclinations-, Intensitäts- und thermischen Curven auf Beziehungen aufmerksam, die auf gesetzmässigen Zusammenhang hinzudeuten scheinen. H.

Anmerkungen und Zusätze zur Entwerfung der Land- und Himmelscharten. Von J. H. Lambert (1772) Herausgegeben von A Wangerin. Mit 21 Textfiguren. Leipzig 1894. Wilhelm Engelmann. 95 S.

Die Schrift gehört zu „Ostwald's Klassiker der exacten Wissenschaften" als Nr. 54. Sie bespricht die grosse Anzahl in Anwendung gekommener Projectionsweisen nach ihren bevorzugten Zwecken. Der Herausgeber fügt am Schlusse die Erklärung der stereographischen und Mercator'schen Projectionen bei. H.

Ueber Kartenprojektion. Abhandlungen von Lagrange (1779) und Gauss (1822). Herausgegeben von A. Wangerin. Mit 2 Textfiguren. Leipzig 1894. Wilhelm Engelmann. 101 S.

Die Schrift bildet Nr. 55. in Ostwald's Kl. d. ex. W. Sie enthält zuerst 2 zusammengehörige Abhandlungen von Lagrange, in denen die Aufgabe der conformen Abbildung der Rotationsflächen behandelt und auf die Erde angewandt wird Dann folgt die Bearbeitung der Aufgabe der königl. Gesellschaft der Wissenschaften von Gauss betreffend die Abbildung der Flächen nach Aehnlichkeit der kleinsten Teile. H.

Astronomischer Kalender für 1895. Berechnet für den Meridian und die Polhöhe von Wien (16° 20′ 22″,3 = 1^h 5^m 21^s,9 östliche Länge von Greenwich, 48° 13′ 55″,4 nördliche Breite). Herausgegeben von der k. k. Sternwarte. Der ganzen Reihe 57. Jahrgang, der neuen Folge 14. Jahrgang. Wien, Carl Gerold's Sohn. 162 S.

Die Beilagen geben folgende Verzeichnisse: Grosse Fixsterne, veränderliche Sterne, Nebelflecken und Sternhaufen, Bahnelemente der grossen Planeten (Saturnsringe), der Satelliten, Asteroiden, ihre Bahnelemente, periodische Kometen, geographische Positionen, Elemente des Erdmagnetismus in Oesterreich, normale fünftägige Temperaturmittel, Jupiter und seine Monde, neue Planeten und Kometen.

H.

Annuaire pour l'an 1895, publié par le bureau des longitudes. Avec des notices scientifiques. Prix: 1 fr. 50 c^m. Paris, Gauthier-Villars et fils. 825 S.

Comme tous les ans à pareille époque l' *Annuaire du Bureau des Longitudes* vient de paraitre. L'Annuaire pour 1895 renferme une foule de renseignements pratiques réunis dans ce petit volume pour la commodité des travailleurs. On y trouve également des articles dus aux savants les plus illustres sur les Monnaies, la Statistique, la Géographie, la Minéralogie, etc., enfin les Notices suivantes: *Les Ondes atmosphériques lunaires;* par M. Bouquet de la Grye. — *Sur le Congrès géodésique d'Inspruck;* par M. E. Tisserand. — *L'observatoire du mont Blanc;* par M. J. Janssen. — *La Photométrie photographie;* par M. J. Janssen. — *Rapport sur les propositions d'unification des jours astronomique et civil;* par M. H. Poincaré. In-18 de IV-1826 pages, avec 2 Cartes magnétiques.

Gauthier-Villars et fils.

Mathematische und physikalische Bibliographie.

XLV.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Bezold, Wilh. v., August Kundt. Gedächtnisrede. Leipzig. J. A. Barth. 60 Pf.

Cantor, Mor., Vorlesgn. üb. Geschichte der Mathematik. 3. Bd. Vom J. 1668 bis zum J. 1759. 1. Abt. Die Zeit von 1668 bis 1699. Leipzig, B. G. Teubner. 6 Mk.

Fortschritte, die, der Physik i. J. 1888. Dargestellt v. der physikal. Gesellschaft zu Berlin. 44. Jahrg. 2. Abth.: Physik d. Aethers. Red. v. Rich. Börnstein. Braunschweig, F. Vieweg & Sohn. 30 Mk.

Herz, Norb., Geschichte der Bahnbestimmung von Planeten u. Kometen. II. Tl.: Die empir. Methode. Leipzig, B. G. Teubner. 10 Mk.

Jahrbuch üb. die Fortschritte d. Mathematik. Hrsg. v. Emil Lampe, 23. Bd. Jahrg. 1891. 2. Hft. Berlin, G. Reimer. 9 Mk.

Kiebel, Aurel, Galilei's Untersuchung der Fallbewegung. Czernowitz, H. Pardini. 50 Pf.

Obenrauch, Ferd. Jos., Monge, der Begründer der darstellenden Geometrie als Wissenschaft. Eine mathematisch-histor. Studie. II. Brünn, Selbstverlag. 1 Mk.

Steinweller, F, Kurzer Abriss der Geschichte des Rechenunterrichts, sowie Beschreibg. der wichtigsten Lehrmittel für denselben. Leipzig, Hirt & Sohn. 30 Pf.

Methode und Principien.

Heinze u. Max Hübner, Methodik des Rechnens. Lehrer-Ausg. des Rechenbuches A. Anh. zum 4. Hft. f. Schulen, welche

m. diesem Hefte abschliessen wollen. 2. Aufl. Breslau, F. Goerlich. 60 Pf.

Nieden, Eug zur, der Beweis in der Geometrie. Ein Beitrag zur Reform des geomet. Unterrichts. Leipzig, G. Fock. 60 Pf.

Preston, S., üb. das gegenseitige Verhältniss einiger zur dynamischen Erklärung der Gravitation aufgestellten Hypothesen. Ebd. 80 Pf.

Räther, Heinr., Theorie u. Praxis des Rechenunterrichts. Im Anschluss an das Uebungsbuch f. mündl. u. schriftl. Rechnen v. H. Räther u. P. Wahl bearb. 3. (Schluss) Teil. (Die Bruchrechnung im Zusammenhange u. die bürgerl. Rechnungsarten.) Breslau, E. Morgenstern. 3 Mk. 30 Pf.

Reishaus, Th., zur Parallel-Frage. Beweis des Parallelen-Satzes u. des Satzes v. der Winkelsumme im Dreiecke ohne Hülfe irgend e. zweifelhaften Axioms. Stralsund, Bremer's B. 1 Mk.

Lehrbücher.

Holzmüller, Gust., method. Lehrbuch der Elementar-Mathematik. 2. Tl., f. die 3 Oberklassen d. höheren Lehranstalten bestimmt. Leipzig, B. G. Teubner. Geb. 3 Mk.

Repetitorium, kurzes, der höheren Mathematik. II. Tl.: Integralrechnung. Wien, M. Breitenstein. 1 Mk. 10 Pf.

Sammlungen.

Bussler, Fr., Mathemat. Uebungsbuch. 2 Tle. Für den Gebrauch an höh. Lehranstalten. Dresden, L. Ehlermann. Kart. 2 Mk. 40 Pf.

Elsner, A. u. R. Sendler, Rechenbuch f. Lehrerseminare. Im Anschlusse an Dorns Rechenhefte bearb. Resultate. Breslau, H. Handel. 75 Pf.

Fenkner, Hugo, Arithmet. Aufgaben. Unter besond. Berücksicht. v. Anwendgn. auf dem Gebiete der Geometrie, Physik u. Chemie. Für den mathem. Unterricht an höh. Lehranst. bearb. Pensum der U.-Tertia, O.-Tertia u. U.-Sekunda der 9 stuf. bzw. der Tertia, Sekunda u. Prima der 6 stuf. Anstalten. 2. Aufl. Braunschweig, O. Salle. 2,20 Mk.; geb. 2,60 Mk.

Findeisen, C. F., Beispiele u. Aufgaben, f. den Unterr. im kaufm. Rechnen zum Gebrauch an Handels-, Industrie-, Gewerbe-, Real- u. höheren Bürgerschulen. II. Das höh. kaufm. Rechnen. 4. Aufl. v. Wilh. Treuber. Leipzig, Hirt & Sohn. Geb. 3 Mk.

Fuss, Konr., Sammlung v. Aufgaben z. mündlichen u. schrift-

lichen Rechnen. Für Lehrer- und Lehrerinnenbildungsanstalten, sowie zum Selbstunterricht bearb. 2. Aufl. Leipzig, A. Deichert Nchf. 1 Mk.

— dasselbe. Resultate u. Andeutgn. zur Auflösg. 2. Aufl. Ebd. 60 Pf.

Geiss, Gg., Rechenbuch. Methodisch bearb. Aufgabensammlg. f. das mündl. u. schriftl. Rechnen. 5. Hft. Ausg. A. Für höhere Lehranst., Mittelschulen u. mehrklass. Volksschulen. 4. Aufl. Darmstadt, E. Zernin. Kart. 60 Pf.

Graf, H. G., geometrische Uebungsaufgaben in schulgemässer Behandlg. Neuwied, Heuser's Vlg. 2 Mk 50 Pf.

Heis, Ed., Sammlung v. Beispielen u. Aufgaben aus der allgem. Arithmetik u. Algebra. In systemat. Folge bearb. f. Gymnasien, Realschulen, Gewerbeschulen u. gleichsteh. Lehranstalten. Ausg. f. die Schulen Oesterreichs. 2. Aufl. Köln, M. Du Mont-Schauberg 3 Mk.

Hennecke, Fr., Aufgabenheft f. d. Rechenunterricht in der Oberklasse u. den Seminarklassen an höh. Mädchenschulen. Mit e. ausführl. Tabelle zur Zinseszins- u. Rentenrechng. Arnsberg, Stahl. 60 Pf.

Heuer's, Ferd, Uebungsbuch f. den Rechenunterricht. Ausg. C. Hft. 4, 5, 6 u. 6^b. Lehrerheft. Bearb. v. K. H. L. Magnus. Hannover, C. Meyer. 2 Mk. 25 Pf.

— dasselbe, f. Mädchenschulen. Ausg. D. Hft. 4, 5, 6 u. 6^b. Lehrerheft. Ebd. 2 Mk. 25 Pf.

Kleyer, A., Aufgabensammlg. 1268.—1307. Hft. Stuttgart, J. Maier. à 25 Pf.

Koenigbauer, Joach., geometrische Aufgaben f. Mittelschulen u, Lehrerbildungsanstalten. Resultate u. Lösungs-Andeutgn. 3. Aufl. Regensburg, J. Habbel. 60 Pf.

Lieb, Seyffert u. Tillmann, Rechenschule, Ausg. f. Lehrer. Mit Ergebnissen, method. Ausführgn. u weiteren Uebungsaufgaben. C. 5. Nürnberg, F. Korn. 1 Mk. 50 Pf.

Müller, E. R., planimetrische Konstruktionsaufgaben, nebst Anleitg. zu deren Lösg., für höh. Schulen. Method. bearb. 3. Aufl. Oldenburg, G. Stalling. Kart. 1 Mk. 20 Pf.

Roeder, Herm., trigonometr. u. stereometr. Lehraufgaben der Unter-Sekunda. Zum Gebrauche an höh. Lehranstalten nach den neuen preuss. Lehrplänen bearb. [Aus: „Kambly's Planimetrie, Neubearbeitg."] Breslau, F. Hirt. 50 Pf.

Schellen, H., Aufgaben f. den Unterr. im Rechnen. 2. Tl. Für die mittleren u. oberen Klassen der Realschulen, Seminarien u. kaufm. Lehranst. bearb. 7. Aufl. bearb. v. H. Lemkes. Münster, Coppenrath'sche B. 2 Mk.; geb. 2,40 Mk.

Schellen, H., Materialien f. den Unterr. im Rechnen 2. Tl. Ein Handb. f. Lehrer u. zur Selbstbelehrg. angeh. Kaufleute, sowie zum Gebrauche beim Rechenunterricht in den mittleren u. oberen Klassen an Realschulen, Seminarien u. kaufm. Lehranstalten. 5. Aufl. bearb. v. H. Lemkes. Ebd. 3 Mk. 60 Pf.; geb. 4 Mk. 10 Pf.

Stockmayer, Herm. u. Geo Thomass, Aufgaben f. den Rechenunterricht in den mittleren Klassen der Gelehrtenschulen, der Realschulen u. verwandter Lehranstalten. 1. Bdchn.: für 10—11-jährige Schüler (III. Klasse.) 6. Aufl. Stuttgart, A. Bonz & Co. Kart. 80 Pf.

Wolf, F. Chr. u G. Röger, Aufgabensammlg. f. das mündl. u. schriftl. Rechnen in der Volksschule. Leipzig, O. R. Reisland. 1 Mk. 50 Pf.

Zahn, A., Prüfungsaufgaben für das Lehramt der Mathematik u. Physik an den kgl. bayerischen humanistischen u. technischen Unterrichtsanstalten. 1873—1893. Ansbach, Brügel & Sohn. 1 Mk. 20 Pf.

Tabellen.

Albrecht, Th., vierstellige Logarithmentafel. Ster.-Ausg. Leipzig, W. Engelmann. Kart. 1 Mk. 20 Pf.

Bremicker, C, Tafeln vierstelliger Logarithmen. 2. Aufl. besorgt v. A. Kallius. Berlin, Weidmann. 60 Pf.

Bruhns, C., neues logarithmisch-trigonometrisches Handbuch auf 7 Decimalen. 4. Ausg. Leipzig, B. Tauchnitz 4 Mk. 20 Pf.

Gezeitentafeln f. d. J. 1895. Hrsg. v. Reichs-Marine-Amt. Red.: Observatorium zu Wilhelmshaven. Berlin, E. S. Mittler & Sohn. 1 Mk. 50 Pf.

May, Osc., Rechentafel Leipzig, F. W. v. Biedermann. 2 Mk.

Stegemann, Tabelle der wichtigsten Formeln aus der Integral-Rechnung. Hrsg. v. Ludw. Kiepert. Hannover, Helwing'sche V, 50 Pf.

Wiebe, H. F., Tafeln üb. die Spannkraft des Wasserdampfes zwischen 76 u. 101,5 Grad. Auf Grund der Ergebnisse neuer Versuche berechnet u hersgeg. Braunschweig, Vieweg & Sohn. 2 Mk.

Arithmetik, Algebra und reine Analysis.

Bachmann, Paul, Zahlentheorie. Versuch e. Gesammtdarstellg. dieser Wissenschaft in ihren Haupttheilen. 2. Thl. Die analyt. Zahlentheorie. Leipzig, B. G. Teubner. 12 Mk.

Bardey, Ernst, zur Formation quadratischer Gleichungen. 2 Ausg. Ebd 3 Mk.

Digitized by Google

Brenner, Ant., der Rechenunterricht in der Mittelklasse der Volksschule. Freising, F. P. Datterer. 2 Mk.

Breuer, Pet. Jos., die gemeinen Logarithmen. 2. Aufl. Leipzig, B. G. Teubner. 60 Pf.

Czuber, Eman., zur Theorie der partiellen Differentialgleichgn. 1. Ordng. Wien, F. Tempsky. 50 Pf.

Féaux, B., Buchstabenrechnung u. Algebra, nebst Uebungs-Aufgaben. 9. Aufl. besorgt durch Fr. Busch. Paderborn, F. Schöningh. 2 Mk. 40 Pf.

Gegenbauer, Leop., üb. die Anzahl der Darstellgn. einer ganzen Zahl durch gewisse Formen. Wien, F. Tempsky. 30 Pf.

— Einige Bemerkungen zum quadratischen Reciprocitätsgesetze. Ebd. 30 Pf.

Kühl, J. H., Leitfaden der Arithmetik u. Algebra f. den Schul- u. Selbstunterricht. Resultate zum I. Tl. Hamburg, J. Kriebel. 80 Pf.

Lerch, M., sur quelques théorèmes d'arithmétique. Prag, F. Rivnáč. 20 Pf.

Močnik, Frz. v., Lehrbuch der Arithmetik f. Unter-Gymnasien. 2. Abth. f. d. III. u. IV. Klasse. 25. umgearb. Aufl. bearb. v. W. Pscheidel. Wien, C. Gerold's Sohn. Geb. 1 Mk. 60 Pf.

Noodt, Gust., arithm. Handbuch f. Lehrer u. Seminaristen. Ein Leitfaden f. den Rechenunterr. an Volks- u. Mittelschulen. Berlin, G. Grote. 2 Mk 50 Pf.

Otto, Aug., das grösste Problem der Rechenkunst gelöst. Rationelle u. an Einfachheit unübertreffbare Methode zur Auflösg. v. numer. Gleichgn. belieb. Grades. Mit Anh.: Ein neuer Satz der Planimetrie. Der mutmassl. Schlüssel zum Malfatti'schen Problem. Berlin, G. Priewe. 50 Pf.

Puchberger, Eman., e. allgemeinere Integration der Differentialgleichungen. 1. Hft. Wien, Gerold's Sohn. 1 Mk.

Schwarze's B., Unterrichtsbriefe des gesamten Rechnens. 3. Aufl. neu bearb. v. Th. Kolbe. Berlin, Liebel'sche B. 3 Mk.

Seeger, H., Bemerkgn. üb. Abgrenzg. u. Verwertg. des Unterrichts in den Elementen der Infinitesimalrechng. Güstrow, Opitz & Co. 50 Pf.

— Leitfaden f. den arithmetischen Unterricht in der Prima e. 9 klassigen Realschule. 1. u. 2. Tl. Wismar, Hinstorff's Verl. 2 Mk.

Stegemann, M., Grundriss der Differential- u. Integralrechrechnung. II. Thl: Integral-Rechng. 5. Aufl., hrsg. v. Ludw. Kiepert. Hannover, Helwing'sche V. 11 Mk. 50 Pf.

Stroh, Emil, Theorie der Combinanten algebraischer Formen. München, M. Kellerer. 1 Mk.

Digitized by Google

Studnička, Dr. F. J., neue Lehrsätze, Summen von Quadratzahlen betreffend. Prag, F. Rivnáč. 20 Pf.

Vieck, Edward Burr von, zur Kettenbruchsentwickelung Lamé'scher und ähnlicher Integrale. Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht. 3 Mk. 60 Pf.

Zsigmondy, K., üb. die Anzahl derjenigen ganzen ganzzahligen Functionen $n$ten Grades v. x, welche in Bezug auf e. gegebenen Primzahlmodul e. vorgeschriebene Anzahl v. Wurzeln besitzen. Wien, F. Tempsky. 30 Pf.

Geometrie.

Brückner, Max, die Elemente der vierdimensionalen Geometrie m. besond. Berücksichtig. d. Polytope. Zwickau, Gebr. Thoost. 2 Mk.

Féaux, B., Lehrbuch der ebenen Planimetrie. 8. Aufl. besorgt durch Fr. Busch. Paderborn, F. Schöningh. 2 Mk. 50 Pf.

Focke, M. u. M. Krass, Lehrb. der Geometrie zum Gebrauche an Gymnasien, Realgymnasien u. anderen höh. Lehranstalten. 1. Tl.: Planimetrie, nebst. e. Anh. üb. Koordinaten u. Kegelschnitte sowie e. Sammlg. v. Aufgaben u. e. systemat. Anleitg. zu ihrer Lösg. 11. Aufl. Münster, Coppenrath'sche B. 2 Mk.; geb. 2 Mk. 40 Pf.

Fort, O. u. O. Schlömilch, Lehrb. der analyt. Geometrie. 1. Tl. Analyt. Geometrie der Ebene v. O. Fort. 6. Aufl. besorgt v. R. Heger. Leipzig, B. G. Teubner. 4 Mk.

Ganter, H. u. F. Rudio, die Elemente der analyt. Geometrie der Ebene. Zum Gebrauch an höh. Lehranstalten, sowie zum Selbststudium dargestellt u. m. zahlreichen Uebungsbeispielen versehen. 2. Aufl. Ebd. 2 Mk. 40 Pf.

Koenig, Max, die geometr. Teilung des Winkels. Mit 44 Abbildgn. Berlin, G. Siemens. 2 Mk.

Močnik, Frz., Geometrische Anschauungslehre f. Unter-Gymnasien. 2. Abth. (f. die 3. u. 4. Klasse). 18. Aufl. Von Frz. Wallentin. Wien, C. Gerold's Sohn. Geb. 1 Mk 30 Pf.

Neve, Jul., kleine Geometrie für Volksschulen. 1. Tl. m. vielen Konstruktionsaufgaben f. die Hand der Schüler. 2. Aufl. Berlin, M. C. Neve. 15 Pf.

Schoute, P. H., Regelmässige Schnitte u. Projektionen des Achtzelles, Sechszehnzelles u. Vierundzwanzigzelles im vierdimensionalen Raume. Amsterdam, J. Müller. 1 Mk.

Schwering, Karl u. Wilh. Krimphoff, Anfangsgründe der ebenen Geometrie. Nach den neuen Lehrplänen bearb. Freiburg i. B., Herder's Verlag. 1 Mk. 80 Pf.; geb. 2 Mk. 15 Pf.

Digitized by Google

Simon, Max, Geometrie f. höh. Bürgerschulen (Realschulen) u. Lehrer-Seminarien. Ein method. Leitfaden in heurist. Darstellg. 4. Aufl. Breslau, F. Hirt. Kart. 1 Mk.

Spieker, Th., Lehrbuch der ebenen Geometrie m. Uebungs-Aufgaben f. höh. Lehranstalten. (Ausg. A.) 21. Aufl. Potsdam, A. Stein. 2 Mk. 50 Pf.

— dasselbe. Ausg. B. f. mittl. Klassen. 4. Aufl. Ebd. 1 Mk. 60 Pf.

— dasselbe. Ausg. C. Abgekürzte Kurse. Ebd. 1 Mk. 20 Pf.

Struve, Kurt, Elemente der Mathematik. 1. Tl.: Geometrie d. Ebene. 2. Aufl. Berlin, P. Parey. 75 Pf.

Temme, J., Grundlehren der analyt. Planimetrie. Warendorf, J. Schnell. 50 Pf.

Uth, K., Leitfaden für den Unterricht in der Planimetrie. 5. Aufl, hrsg. v. R. Franz. Cassel, E. Hühn. Geb. 1 Mk. 80 Pf.

Veronese, Giuseppe, Grundzüge der Geometrie v. mehreren Dimensionen u. mehreren Arten gradliniger Einheiten in elementarer Form entwickelt. Uebers. v. Ad. Schepp. Leipzig, B. G. Teubner, 20 Mk.

Vonderlinn, J., darstellende Geometrie für Bauhandwerker. Zum Gebrauche an Baugewerkschulen u. ähnl. techn. Lehranstalten, sowie zum Selbstunterricht f. Bauhandwerker. II. Tl. Stuttgart, J. Maier. 3 Mk.

Weyr, Emil, üb. e. symbolischen Calcul auf Trägern v. Geschlechte Eins u. seine Anwendung. Wien, F. Tempsky. 1 Mk. 40 Pf.

Wiese, B., W. Lichtblau u. K. Backhaus, Raumlehre für Lehrerseminare. 2. Tl. Die Körperlehre. Breslau, F. Hirt. 90 Pf.

Trigonometrie.

Wendt, Frz., Katechismus der Trigonometrie. 2. Aufl. Leipzig, J. J. Weber. Geb. 1 Mk. 80 Pf.

Praktische Geometrie, Geodäsie.

Koordinaten u. Höhen sämmtlicher v. der trigonometrischen Abtheilg. der Landesaufnahme bestimmten Punkte im Reg.-Bez. Frankfurt. Berlin, E. S. Mittler & Sohn. 2 Mk.

Kutscher, H., Geometrie, Feldmessen u. Nivelliren. Berlin, P. Parey. Geb. 1,40 Mk.

Steinitz, Ernst, üb. d. Construction der Configurationen n_3. Leipzig, K. F. Köhler. 1 Mk.

Veltmann, W. u. Otto Koll, Formeln der niederen u. höheren Mathematik, sowie f. die Theilung d. Grundstücke u. f. Tracirungsarbeiten. Zum Gebrauch beim geodät. Studium u. in der geodät. Praxis bearb. 2. Aufl. Bonn, E. Strauss. Geb. 4 Mk.

Verhandlungen der vom 12. bis 18. Sept. 1893 in Genf abgehaltenen Conferenz der permanenten Commission der internat. Erdmessg Red. v. A. Hirsch. Zugleich m. den Berichten üb. die Fortschritte d. Erdmessg. in den einzelnen Ländern während des letzten Jahres. Berlin, G. Reimer. 6 Mk.

Mechanik.

Clauner, Thdr., üb. den Verlauf v. Potentialfunktionen im Raum. Leipzig, Gust. Fock. 1 Mk. 20 Pf.

Hertz, Heinr., gesammelte Werke. III. Bd.: Die Prinzipien der Mechanik, in neuem Zusammenhange dargestellt. (Hrsg. v. Ph. Lenard.) Mit e. Vorwort v. H. v. Helmholtz. Leipzig, J. A. Barth. 12 Mk.; geb. 13 Mk. 50 Pf.

Klimpert, Rich., Lehrb. der Bewegung flüssiger Körper (Hydrodynamik). 2. Bd. 2. Hälfte. Stuttgart, J. Maier. 3 Mk. 50 Pf.

Korn, Arth., e. Theorie der Gravitation u. der elektr. Erscheinungen auf Grundlage der Hydrodynamik. II. Tl.: 1. Abschn. Berlin, F. Dümmler. 3 Mk.

Technik.

Abhandlungen, wissenschaftliche der physikalisch-technischen Reichsanstalt. 1. Bd. (Thermometrische Arbeiten betr. die Herstellung u. Untersuchung der Quecksilber-Normalthermometer unter Leitg. v. J. Pernet, ausgeführt v. W. Jäger u. E. Gumlich.) Berlin, J. Springer. 30 Mk.

Anweisung (IX) vom 25. Okt. 1881 f. die trigonometrischen u. polygonometrischen Arbeiten bei Erneuerung der Karten u. Bücher des Grundsteuer-Katasters. 2. Ausg. Berlin, R. v. Decker. Geb. 6 Mk.

Arnold, E., die Theorie u. Berechng. der asynchronen Wechselstrom-Motoren. Berlin, Polytechn. Buchhandlg. 1 Mk. 60 Pf.

Cooke, T. u. Sons, die Iustirung u. Prüfg. von Fernrohrobjektiven. Uebers. v. R. Straubel. Berlin, J. Springer. 2 Mk.

Corsepius, Max, Leitfaden zur Konstruktion v. Dynamomaschinen u. zur Berechng v. elektr. Leitungen. 2. Aufl. München, R. Oldenbourg. Geb. 3 Mk.

Encyklopaedie der Photographie. 6.—8. Hft. Halle, W. Knapp. 9 Mk.

Kapp, M. Gisb., Dynamomaschinen f. Gleich- u. Wechselstrom u. Transformatoren. Deutsch v. L. Holborn u. K. Kahle. Berlin, J. Springer. Geb. 7 Mk.

Kraftübertragung u. Kraftverteilung, elektrische. Nach Ausführgn. durch die allgemeine Elektricitätsgesellschaft Berlin. Ebd. Geb. 3 Mk.

Kratzert, Heinr., Grundriss der Elektrotechnik. Für den prakt. Gebrauch f. Studirende der Elektrotechnik u. zum Selbststudium. 1. Tl. Wien, F. Deuticke. 6 Mk.; geb. 7 Mk.

Krüger, E. O., Die Herstellg. der elektrischen Glühlampe. Leipzig, O. Leiner. 3 Mk.; geb. 3 Mk. 50 Pf.

Orff, Carl v., telegraphische Längenbestimmungen f. die kgl. Sternwarte zu Bogenhausen. II. Tl. München, G. Franz. 4 Mk.

Rühlmann, Grundzüge der Elektrotechnik. Eine gemeinfassl. Darstellg. der Grundlagen der Starkstrom-Elektrotechnik. 1. Hälfte. Leipzig, O. Leiner. 6 Mk.

Vogel, H. W., Handbuch d. Photographie. 4. Aufl. 2. Tl. Berlin, R. Oppenheim. 9 Mk.; geb. 10 Mk 50 Pf.

Optik, Akustik und Elasticität.

Eder, J. M. u. E. Valenta, Absorptionsspektren von farblosen u. gefärbten Gläsern, mit Berücksicht. des Ultraviolett. Wien, F. Tempsky. 1 Mk. 60 Pf.

Gänge, C., Die Polarisation des Lichtes. Kurze Darstellg. ihrer Lehre u. Anwendg. Leipzig, Quandt & Händel. 1 Mk. 80 Pf.

Robel, Ernst, die Sirenen. Ein Beitrag zur Entwicklungsgeschichte der Akustik. 2. Tl. Die Arbeiten deutscher Physiker üb. die Sirene in dem Zeitraum v. 1830 bis 1856. Berlin, R. Gaertner. 1 Mk.

Schlemüller, Wilh., die Fortpflanzungs-Geschwindigkeit des Schalles in e. theoretischen Gase. Bearb. auf Grund der dynam. Gastheorie. Prag, H. Dominicus. 50 Pf.

Erd- und Himmelskunde.

Annalen der k. k. Universitäts-Sternwarte in Wien. Hrsg. v. Edm. Weiss. IX. Bd. Wien, A. W. Künast. 15 Mk.

Brust, G. u. H. Berdrow, die Elemente der mathemat. Geographie u. der Astronomie. Für den Schulgebrauch bearb. 4. Aufl. Berlin, E. Mecklenburg. 20 Pf.

Falb, Rud., neue Wetter-Prognosen für die Monate Juli-Dez. 1894. Berlin, H. Steinitz. Kart. 1 Mk.

Galle, J. G., Verzeichnis der Elemente der bisher berechneten Cometenbahnen, nebst Anmerkgn. u. Litteraturnachweisen, neu bearb., ergänzt u. fortgesetzt bis 1894. Leipzig, W. Engelmann. 12 Mk.

Hess, Clem., die Hagelschläge in der Schweiz u. Theorie der Entwickelung u. des Verlaufes der Hagelwetter. Frauenfeld, J. Huber. 3 Mk. 60 Pf.

Homén, Thdr., bodenphysikalische u. meteorologische Beobachtungen m. besond. Berücksichtigung des Nachtfrostphaenomens. Berlin, Mayer & Müller. 6 Mk.

Huber, G., Sternschnuppen, Feuerkugeln, Meteorite u. Meteorschwärme. Bern, K. J. Wyss. 1 Mk.

Jäger, Gust., über die Beziehung zwischen Helligkeit u. Eigenbewegung der Fixsterne. Wien, F. Tempsky. 40 Pf.

— Wetter u. Mond. Nachtrag zu Wetteraussagen u. Mondwechsel. Stuttgart, W. Kohlhammer. 2 Mk.

Jahrbuch, deutsches, meteorologisches. f. 1893. Beobachtungssystem d. Koenigr. Sachsen. Ergebnisse d. meteorolog. Beoachtgn. i. J. 1893. Hrsg. v. Paul Schreiber. I. Hälfte des Jahrbuches des kgl. sächs. meteorolog. Institutes. Jahrg. XI. I. u. II. Abth. Chemnitz, M. Bülz. 10 Mk.

— deutsches meteorologisches, f. 1893. Meteorolog. Station I. Ordng. in Bremen. Ergebnisse der meteorolog. Beobachtungen' Stündliche Aufzeichngn. der Registrierapparate. Dreimal tägl. Beobachtungen in Bremen u. an 4 Regenstationen. Hrsg. v. Paul Bergholz. IV. Jahrg. Bremen, M. Nössler. 3 Mk.

Jahres-Bericht des Centralbureaus f. Meteorologie u. Hydrographie im Grsshzt. Baden, m. den Ergebnissen der meteorolog. Beobachtgn. u. Wasserstandsaufzeichngn. am Rhein u. an seinen grösseren Nebenflüssen f. d. J. 1893. Karlsruhe, G. Braun. 6 Mk.

Mémoires de l'académie impérale des sciences de St. Petersbourg. VII. série. Tome XLII No. 4. Beobachtungen des Neptunstrabanten am 30zölligen Pulkowaer Refractor. Von Herm. Struwe. Leipzig, Voss' Sort. 2 Mk. 50 Pf.

— No. 6. Ueber die Bestimmung der absoluten magnetischen Declination im Konstantinow'schen Observatorium zu Pawlowsk. Von H. Wild. Ebd. 2 Mk. 10 Pf.

Obermayer, A. u. A. Schindler, die trigonomtr. Höhenbestimmg. des Hohen Sonnblicks in der Goldberggruppe der Hohen Tauern. Wien, F. Tempsky. 20 Pf.

Observations de Poulkovo, publiées par anc. Dir. Otto Struve. Vol. X. (Mesures mikrométriques des étoiles doubles. Leipzig, Voss' Sort. 20 Mk.

Digitized by Google

Pfeil, L. Graf, Temperaturverändergn. auf der Erdoberfläche. 2. Aufl. Leipzig, E. H. Mayer. 1 Mk.

Pieper, M., mathematische Erdkunde. Als Anh. zu Sumpf's „Schulphysik" u. „Grundriss d. Physik" bearb. Hildesheim, A. Lax. 50 Pf.

Publications de l'observatoire centrale Nicolas sous la direction de Th. Brédikhine. Sér. II, vol. I. (Observations faites au cercle verticale par M. Nyrén. Leipzig, Voss' Sort. 48 Mk.

Publikationen des astrophysikalischen Observatoriums zu Potsdam. Hrsg. v. H. C. Vogel. Nr. 31. IX. Bd. (Photometrische Durchmusterung des nördl. Himmels, enth. alle Sterne der B. D. bis zur Grösse 7,5. I. Tl. Zone 0^0 bis $+ 20^0$ Declination. Von G. Müller u. P. Kempf.) Leipzig, W. Engelmann. 20 Mk.

— dasselb. Nr. 32. X. Bd. 1. Stück. (Beobachtgn. v. Sonnenflecken in d. J. 1885 bis 1893. Bearb. v. G. Sporer.) Ebd. 12 Mk.

Repertorium f. Meteorologie, hrsg. v. der kaiserl. russ. Akademie der Wissenschaften, red. v. Heinr. Wild. 16 Bd. Leipzig, Voss' Sort. 37 Mk. 30 Pf.

Schiötz, O. E., Resultate der im Sommer 1893 in dem nördlichen Theile von Norwegen ausgeführten Pendelbeobachtungen, nebst e. Untersuchg. üb. d. Einfluss v. Bodenerschüttergn. auf die Schwingungszeit e. Pendels. Christiania, J. Dybwad. 1 Mk. 60 Pf.

Seeger, H., der Unterricht in der mathemat. Geographie auf dem Güstrower Realgymnasium. Güstrow, Opitz & Co. 50 Pf.

Sohncke, Leonh., Gewitterstudien auf Grund v. Ballonfahrten. München, G. Franz's Vlg. 1 Mk. 80 Pf.

Veröffentlichungen des kgl. preuss. meteorolog. Instituts. Hrsg. durch Wilh. v. Bezold. Ergebnisse der Niederschlags-Beobachgn. i. J. 1892. Berlin, A. Asher & Co. 10 Mk.

— dasselbe 1893. II. Hft. (Ergebnisse der Beobachtungen an den Stationen II. & III. Ordng i J. 1893, zugleich deutsches meteorolog. Jahrbuch f. 1893. Beobachtungssystem d. Koenigr. Preussen u. benachbarter Staaten. 2. Hft.) Ebd. 3 Mk.

Vierteljahrsschrift d. astronom. Gesellschaft. 29. Jahrg. 2. Hft. Leipzig, W. Engelmann. 2 Mk.

Weidefeld, O., elementare Rechnungen aus der mathemat. Geographie, f. Freunde d. Astronomie in ausgewählten Kapiteln gemeinverständlich begründet u. vorgeführt. Berlin. F. Dümmler. 2 Mk.

Nautik.

Bolte, Fr., die Methoden der Chronometer-Kontrole an Bord zum Zwecke der Längenbestimmung, nebst Tafeln zur Erleichterg. der Reduktion. Hamburg, L. Friederichsen & Co. 2 Mk.

Digitized by Google

Jahrbuch, nautisches, oder Ephemeriden u. Tafeln f. d. J. 1897 — zur Bestimmg. der Zeit, Länge u. Breite zur See nach astronomischen Beobachtgn. Hrsg. v. Reichsamt des Innern. Unt. Red. v. Prof. Tietjen. Berlin, C. Heymann's Vlg. Kart. 1 Mk. 50 Pf.

Jahrbuch, kleines nautisches f. 1895. 34. Jahrg. Hrsg.: W. Ludolph. Bremen, M. Heinsius Nachf. 75 Pf.

Segel-Handbuch f. die Ostsee. Hrsg. v Reichs-Marine-Amt 5. Abth. Die Ostküste v. Schweden. Der bottn. Meerbusen u. die Ålands-Inseln. 2. Aufl. Berlin, D. Reimer. Geb. 3 Mk.

Verzeichniss der Zeitsignal-Stationen aller Meere. Hrsg. vom Reichs-Marine-Amt. Berlin, E S. Mittler & Sohn. 50 Pf.

Physik.

Anderssohn, Aurel, physikalische Prinzipien der Naturlehre. Halle, G. Schwetschke. 1 Mk. 60 Pf.

Börner, H, Leitfaden der Experimentalphysik f. Realschulen, zugleich f. Oberrealschulen: 1. Stufe des Lehrbuchs der Physik f. höh. Lehranstalten. 2. Aufl. Berlin, Weidmann'sche B. Geb. 2 Mk. 20 Pf.

Christiansen, C., Elemente der theoret. Physik. Deutsch v. Joh. Müller. Mit e. Vorwort v. E. Wiedemann. Leipzig, J. A. Barth. 10 Mk.

Drude, Paul, Physik des Aethers auf elektromagnetischer Grundlage. Stuttgart, F. Enke. 14 Mk.

Farvager, A., die Elektrizität u. ihre Verwertung zur Zeitmessg. Uebers. (nach d. 2. französ. Aufl.) von M. Loeske. Bautzen, Ed. Hübner. 7 Mk.; geb. 7 Mk. 80 Pf.

Feldmann, Clarence Paul, Wirkungsweise, Prüfung u. Berechng. der Wechselstrom-Transformatoren. 1. Tl. Leipzig, O. Leiner. 6 Mk.

Föppl, A., Einführg. in die Maxwell'sche Theorie der Elektricität. Mit e. einleit. Abschnitte üb. das Rechnen mit Vectorgrössen in der Physik. Leipzig, B. G. Teubner. 10 Mk.

Fuss, Konr. u. Geo Hensold, Lehrbuch d. Physik f. den Schul- u. Selbstunterr. Mit vielen Uebungsaufgaben, 1 Spektraltafel in Farbendr. u. 342 in den Text gedr. Abbildgn. 2. Aufl. Freiburg i. B., Herder'sche V. 4 Mk. 20 Pf.; geb. 4 Mk. 85 Pf.

Grimsehl, die Vorgänge beim elektr. Strome, veranschaulicht durch Flüssigkeitsströme. Hamburg, Herold'sche B. 1 Mk. 50 Pf.

Handbuch d. Physik. 21. u. 22. Lfg. Breslau, Ed. Trewendt. 7 Mk 20 Pf.

Hankel, W. G. u. H. Lindenberg, elektrische Untersuchgn. 20. Abhandlg. (Ueber die thermo- u. piëzoelektrischen Eigenschaften

Digitized by Google

der Krystalle des brom- u. überjodsauren Natrons, des Asparagins, des Chlor- u. Brombaryums, sowie des unterschwefelsauren Baryts u. Strontians.) Leipzig, S. Hirzel. 1 Mk. 60 Pf.

Heussi, Jac., Lehrbuch d. Physik f. Gymnasien, Realgymnasien, Oberrealschulen u. andere höhere Bildungsanstalten. 6. Aufl. neu bearb. v. A. Leiber. Braunschweig, O. Salle. 5 Mk.

Holtz, Alfr., die Schule des Elektrotechnikers. Lehrhefte f. die angewandte Elektricitätslehre. Hrsg. i. Verein mit H. Vieweger u. H Stapelfeldt. 1. Hft. Leipzig, M. Schäfer. 75 Pf.

Jelinek, C., Psychrometer-Tafeln f. das 100teilige Thermometer, nach H. Wild's Tafeln bearb. 4. Aufl. Leipzig, W. Engelmann. 3 Mk.

Kapp, Gisb., elektrische Wechselströme. Autoris. deutsche Ausg. v. Herm. Kaufmann. Leipzig, O. Leiner. 2 Mk.; geb. 2 Mk. 50 Pf.

Koppe's, K, Anfangsgründe der Physik m. Einschluss der Chemie u. mathemat. Geographie. 20. Aufl. Ausg. B. in 2 Lehrgängen. Für höhere Lehranstalten nach den preuss. Lehrplänen v. 1892 bearb. v. A. Husmann. I. Tl.: Vorbereitender Lehrgang. Essen, G. D. Baedeker. Geb. 2 Mk. 20 Pf.

Mach's, Grundriss der Physik, f. die höheren Schulen des Deutschen Reiches bearb. v. Ferd. Harbordt u. Max Fischer. II. Tl.: Ausführlicher Lehrgang. Leipzig, G. Freytag. Geb. 3 Mk.

Nagl, A., Lehrbuch der Elektricität u. d. Magnetismus. 2. Aufl. 1. Tl. Mittweida, Polytechn. Buchhlg. 6 Mk.

Niemöller, Frdr., Apparate u. Versuche f. physik. Schülerübgn. Osnabrück, G. E. Lückerdt. 80 Pf.

Pockels, F., üb. den Einfluss des elektrostatischen Feldes auf das optische Verhalten piëzoelektrischer Krystalle. Göttingen, Dietrich's Verl. 22 Mk.

Streintz, Frz., üb. e. Beziehg. zwischen der elektromotor. Kraft des Daniell-Elementes u. dem Verhältnisse des Salzgehaltes seiner Lösungen. Wien, F. Tempsky. 20 Pf.

Sumpf's, K., Grundriss d. Physik. Ausg. A. 4. Aufl. bearb. v. A. Pabst. Hildesheim, A. Lax. 3 Mk. 20 Pf; geb. 3 Mk. 70 Pf.

— Schulphysik. Methodisches Lehr- u. Uebungsbuch f. höh. Schulen in 2 Lehrstufen. 5. Aufl. bearb. v. A. Pabst. Ebd. 4 Mk 50 Pf.; geb. 5 Mk.

Thompson, Silvanus, Der Elektromagnet. 4. u. 5. (Schluss-) Hft. Halle, W. Knapp. 6 Mk.

Tumlirz, O., üb. die Unterkühlung v. Flüssigkeiten. (II. Mittlg.) Wien, F. Tempsky. 40 Pf.

Tyndall, John, die Wärme betrachtet als e. Art v. Bewegung. Autoris. deutsche Ausg. bearb. v. Anna v. Helmholtz u. Clara

Wiedemann nach der 8. Aufl. des Originals. 4. Aufl. Braunschweig, F. Vieweg & Sohn. 12 Mk.

Urbanitzky, A. v., Elektricität. 2. Aufl. 13.—22. Lfg. Wien, A. Hartleben. à 50 Pf.

Velde, Wilh., Die magnetischen Kraftlinien im physikalischen Unterricht. Berlin, R. Gärtner. 1 Mk.

Vermischte Schriften.

Abhandlungen, mathematische der kgl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Aus d. J. 1893. Berlin, G. Reimer. Kart. 4 Mk.

—, physikalische. Ebd. 10 Mk.

Berichte, mathematische u. naturwissenschaftliche, aus Ungarn. Red. v. J. Fröhlich. 11. Bd. (Okt. 1892 — Okt. 1893.) 2. Hälfte. Budapest, Verlagsbureau d. Akademie d. Wissensch. 4 Mk.

Denkschriften der kaiserl. Akademie der Wissenschaften. Mathematisch-naturwissenschaftl. Classe. Register III zu den Bdn. 41—60. Wien, F. Tempsky. 2 Mk. 10 Pf.

Flammarion Camille, Urania. Ins Deutsche übertr. v. Karl Wenzel. Pforzheim, O. Riecker. 3 Mk. 50 Pf.; geb. 4 Mk. 50 Pf.

Grassmann's, Herm., gesammelte mathematische u. physikalische Werke. Auf Veranlassg. der mathem.-physikal. Klasse der kgl. sächs. Gesellschaft d. Wissenschaften u. unter Mitwirkung v. Jul. Lüroth, Ed. Study, Justus Grassmann, Herm. Grassmann d. J., Geo Scheffers hrsg. v. Ferd. Engel. I. Bd. I. Tl. Die Ausdehnungslehre v. 1844 u. die geometr. Analyse. Leipzig, B. G. Teubner. 12 Mk.

Hagen, Joh. G., Synopsis der höh Mathematik. 2. Bd. Geometrie der algebraischen Gebilde. Berlin, F. L. Dames. 30 Mk.

Nachrichten v. der kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathemat.-physikal. Klasse, nebst geschäftl. Mitteilgn. 1894. Göttingen, Dietrich's Verlag. 5 Mk.

Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften. Nr. 46, 47, 52 u. 53. Leipzig, W. Engelmann. Kart. 46. Abhandlungen üb. Variations-Rechnung. Hrsg. v. P. Stäckel. I. Thl. Abhandlg. v. Joh. Bernoulli (1696), Jac. Bernoulli (1697) u. Leonh. Euler (1744). 2 Mk. — 47. Dasselbe 2. Thl.: Abhandlgn. v. Lagrange (1762, 1770), Legendre (1786) u. C. G. J. Jacobi (1837). 1 Mk. 60 Pf. — 52. Abhandlg. üb. die Kräfte der Elektricität bei der Muskelbewegung von Alois. Galvani (1791). Hrsg. v. A. J. v. Oettingen. 1 Mk. 40 Pf. — 53. Die Intensität der erdmagnet Kraft auf absolutes Maass zurückgeführt, v. Carl Frdr. Gauss. In der Sitzg. der kgl. Gesellschaft d. Wissenschaften zu Göttingen, am 15. Dez. 1832 vorgelesen. Hrsg. v. E. Dorn. 1 Mk.

Sitzungsberichte der kgl. böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften. Mathematisch-naturwissenschaftl. Classe. Jahrg. 1893. Prag, F, Rivnáč. 24 Mk.

Sitzungsberichte, Münch., d. mathem.-phys. Classe. 1894. 1. Hft. München, Franz's Vlg. 1 Mk. 20 Pf.

—, Wiener. Math.-naturw. Classe. Wien, F. Tempsky. Abth. I. 102. Bd. 8. u. 10. Hft. 9 Mk. 50 Pf. Abth. II a. 9. u. 10. Hft. 5 Mk. 60 Pf. Abth. II b. 9. u. 10. Hft. 2 Mk. Abth. III. 8.—10. Hft. 2 Mk. 20 Pf. Abth. I. 103. Bd. 1.—5. Hft. 8 Mk. 70 Pf. Abth II a. 3.—5. Hft. 2 Mk. 40 Pf. Abth. II b. 4. u. 5. Hft. 2 Mk. 20 Pf. Abth. III. 1.—4. Hft. 4 Mk. 20 Pf.

Weierstrass, Karl, mathematische Werke. Hrsg. unter Mitwirkg. e. v. der kgl. preuss. Akademie der Wissenschaften eingesetzten Commission. 1. Bd. Abhandlungen I. Berlin, Mayer u. Müller. 21 Mk.; geb. 24 Mk.

Tal VII

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32
33
34
35
36
37
38
39
40
41
42
43
44
45
46
47
48
49
50
51
52
53
54
55
56
57
58
59
60
61
62
63
64
65
66
67
68
69
70
71
72
73
74
75
76
77
78
79
80
81
82
83
84
85
86
87
88
89
90
91
92
93
94
95
96
97
98
99
100

ARCHIV

der

MATHEMATIK UND PHYSIK

mit besonderer Rücksicht

auf die Bedürfnisse der Lehrer an höheren Unterrichtsanstalten.

Gegründet von

J. A. Grunert,

fortgesetzt von

R. Hoppe,

Dr. ph. Prof. an d. Univ. Berlin.

Zweite Reihe.

Vierzehnter Teil.

Leipzig.

C. A. Koch's Verlagsbuchhandlung,

(H. Ehlers & Co.)

1896.

Inhalts-Verzeichniss

des vierzehnten Teils.

Nr. der Abhandlung.		Heft.	Seite.
	Arithmetik, Algebra und reine Analysis ohne Integralrechnung.		
II.	Potenzcongruenzen. Von G. Speckmann . .	I	112
XIV.	Bezirke der 3 Wurzelformen der Gleichung 4. Grades. Von R. Hoppe	IV	398
XVI.	Ueber die Factoren der Zahlen. Von G. Speckmann	IV	441
XVI.	Ueber unbestimmte Gleichungen x ten Grades. Von G. Speckmann	IV	443
XVI.	Ueber die Auflösung der Congruenz $x^2 = a$ (mod. p). Von G. Speckmann	IV	445
	Integralrechnung.		
III.	Ueber die Transformation der elliptischen Functionen. Von Fritz Beer	II	113
VII.	Integration der Differentialgleichung $\Delta_2 f = k^2 f$ für elliptische und parabolische Coordinaten. Von J. H. Hartenstein	II	170

Digitized by Google

Nr. der Abhandlung		Heft.	Seite.
	Geometrie der Ebene.		
II.	Zum Pythagoräischen Lehrsatze. Von K. Zahradnik	I	105
V.	Zur Theorie des Kegelschnittbüschels. Von A. Wiman	II	149
VIII.	Ueber die Curven, deren Bogen der Tangente des Leitstrahlwinkels proportional ist, und die damit verwandten Curvenscharen. Von August Velde.	II	200
X.	Dreizehn Auflösungen des Malfatti'schen Problems. Fortsetzung von T. XIII. Nr. II. Von C. Davids	III	276
XI.	Einige durch den Ausdruck des Bogens bestimmte Curven. Von R Hoppe	III	328
XII.	Ueber Isotimen und Isophasen der Function $f(x) = (x+1)(x-1)(x-2)$. Von Ulrich Bigler .	IV	337
XIII.	Conforme Abbildung der inneren Fläche eines Kreises in die innere Fläche eines regulären Vielecks. Von Ulrich Bigler	IV	360
	Geometrie des Raumes.		
I.	Ueber die Differentialgleichungen von Rotations- und Regelflächen. Von Eduard Doležal . .	I	1
II.	Notiz über das eigentliche Oval. Von Armin Wittstein	I	109
XVI.	Nachtrag dazu	IV	441
IV.	Elementare Bestimmung der Lage der gleichseitigen Hyperbel im Kegel, Von G. D. E Weyer . .	II	139
VI.	Ein Beitrag zur Theorie der Flächen zweiten Grades. Von Stephan Glaser	II	156
IX	Zur Theorie der Spiralflächen. Von Ebner . .	III	241
XI.	Abwickelbare Schraubenfläche. Von R. Hoppe.	III	332
XV.	Die Amsler'schen Flächensätze im Gebiete affin veränderlicher Systeme und auf Flächen constanter Gauss'scher Krümmung. Von Joh. Kleiber .	IV	405
XVI	Gleichseitig hyperbolischer Schnitt der Fläche 2. Grades. Von R Hoppe	IV	436

Digitized by Google

Litterarische Berichte.

LIII. Börnstein (Portschr. d. Phys. 1888, 1889, 1893). Assmann (F. d. Ph. 1888). M. Cantor (Gesch. d. Math. bis 1200 und 1668 bis 1759). G. Winslow-Pierce (l. rom. Pierce). Engel (Grassmann Werke). Bierens de Haan (Leben van den Berg). Fink (Carnot Leb, Werke). Sitll (Firmic. Matern.) Obenrauch (Monge) Stäckel (Joh. Bernoulli, Jos. B., Euler, Jacobi). Heiberg u. Menge (Euclid. op.) Weyrauch (Rob. Mayer) Oettingen (Galvani). Dorn (Gauss).

LIV. Laurent (alg.). Haussner (bern., eul. Z.). Glaser (Reih.) Levi Cività (num. num. prim.). Henke (kl. Quadr.). Levi Cività (grupp. op.) Henry (fct. ell.) Schlesinger (lin. Diffgl.) Weiler (part. Dffgl. I. O.) Graf (*I'f.*, eul. Int.) Heinitz (Berechn. π). Autenheimer (Diff., Int.) Nernst u. Schönflies (Dff. u. Int.) Blermann (Dff., Alg., Fct.) H. Weber (Alg.) Lieber u. von Lühmann (Reih.) Pauly (Dek. — Schnellr.) Petrini (Fadencv.) (convex. Cont.)

LV. Schonte (120 u. 600 zell.) Kapteyn (merkw. P.) Muth (Anw. Inv.) Brückner (4 dimen. Geb.) Van Oss (Bew. 4 dim. Geb.) Veronese (übers. Scheppe) (G. mehr. Dim.) Ganter u. Rudio (anal, Geom. d. Eb.) Schlömich (anal. G.) Laisant (g. anal. probl.) Weyer (parab. Spir.) Niewenglowski (g anal.) Faber (darst. G.) Schlotke (darst. G.) Molenbrock) Quat. Geom.). Dorr (Wink 3 teil.) Laisant (probl. géom.) Böcher (Reih Potent.) Haas (Diff. Geom.) Stuhlmann (Zirkel). Vogler (prakt. Geom.) Hoffmann (Terr.) J. J. A. Müller (triang.) Heath (übers. Kauthack) (Opt.) König (Spectr.) C. Neumann (Lins, Syst.) Bojes (strek.) Love (Elast.)

LVI. Hartenstein (Lohrmann) Klein (math. Fragen.) Wundt Math.) Seeger (Inf. i. Schul.) Freycinet (philos. scient.) Killing (Grdl. Geom.) Seeger (math. Geogr.) Winter (Trig. — Ster.) Mahler (eb. G.) Gille (Geom., Trig.)

Holzmüller (für Prima). Koppe (Dickmann) (Geom.) Sickenberger (Ar. — Alg. — Ster., Trig.) Brandt Köstler (eb. G.) Walberer (Recknagel) (Mech.)

Drucktehler.

Seite 110 Zeile 6 v. unt.	statt	Formen	setze	Curven
Seite 111 Zeile 1 u. 2 v. ob.	„	λ	„	2 im Nenner

I.

Ueber Differential-Gleichungen von Rotations- und Regelflächen.

Von

Eduard Doležal,

Professor an der technischen Mittelschule in Sarájevo.

Vorrede.

Die vorliegende Studie ist entstanden aus dem Thema: Wie beurteilt man, ob eine Fläche, deren Gleichung in Punkt- oder Ebenencoordinaten vorliegt, eine Rotationsfläche, wie, ob sie eine Regelfläche sei? Beispiele, welche dem Autor vom Herrn Professor an der k. k. technischen Hochschule zu Wien Dr. Jos. Kolbe als häusliche Prüfungsarbeit zur Erlangung der Lehrbefähigung für Mittelschulen gegeben wurden.

Bei der Ausarbeitung war der Verfasser bestrebt, womöglich eine einheitliche Ableitung der verschiedenen Flächenfamilien zusammenzustellen, ihre Kriterien auf einheitlichem Wege zu gewinnen, und durch zahlreiche Beispiele die einzelnen, charakteristischen Flächen zu beleuchten und zu zeigen, wie man bei ihrer Beurteilung vorgeht.

Bei Benutzung von Gedanken fremder Autoren schloss sich der Schreiber principiell der Diction derselben an, um klar zu bleiben und ihre Gedanken unverfälscht zum Ausdrucke zu bringen.

Benutzte Schriften sind:

1) Sitzungsberichte der kais. Akademie der Wissenschaften zu Wien.

2) Casopis pro pěstování mathematiky a fysiky (Zeitschrift zur Förderung der Mathematik und Physik). Prag.

3) Cauchy, a) Leçons sur le calcul différentiel.

b) Leçons sur les applications du calcul infinitésimal à la géometrie.

c) Exercices de mathématiques.

4) Darboux, Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitésimal.

5) Cournot, Theorie der Functionen.

6) Hesse, Vorlesungen über analytische Geometrie des Raumes.

7) Escherich, Einleitung in die analytische Geometrie des Raumes.

Würde die vorliegende Studie ihren Zweck, nämlich angehenden Mathematikern beim Studium des behandelten, interessanten Gebietes der Mathematik ein Behelf zu sein, erfüllen, dann wäre des Autors Absicht erreicht und seine Mühe vollauf belohnt.

Sarajevo, im Januar 1894.

Der Verfasser.

Einleitung.

Darstellung und Entstehung der Flächen.

Bestimmen x, y, z als Coordinaten die Lage eines Punktes im Raume, so führt ein jeder mathematische oder empirische Zusammenhang zwischen den Veränderlichen x, y, z, der allgemein durch

$$F(x, y, z) = 0$$

ausgedrückt wird, auf die Construction einer Fläche. Allein die so construirte Fläche wird im allgemeinen nicht geometrisch bestimmt sein, und es kommt jetzt nicht bloss mehr darauf an, analytische Begriffe räumlich darzustellen, sondern die Analysis auf die Theorie der Ausdehnung anzuwenden, was gestattet, nur jene Flächen zu betrachten, die durch geometrische Eigenschaften charakterisirt sind.

Zuweilen lässt sich die geometrische Definition einer krummen Fläche unmittelbar durch die Gleichung zwischen ihren veränderlichen Coordinaten ausdrücken. So stellt z. B. die Gleichung

$$x^2+y^2+z^2=r^2$$

unmittelbar das geometrische Merkmal dar, wodurch man die Oberfläche einer Kugel definiren kann, nämlich, dass alle ihre Punkte von einem andern Punkte, welcher hier zum Anfangspunkt der Coordinaten gewählt ist, gleich weit entfernt sind.

Aber gewöhnlicher besteht die geometrische Definition einer Fläche in der Angabe des Gesetzes der Beschreibung derselben durch eine Linie, welche sich im Raume mit oder ohne Aenderung ihrer Form bewegt, durch die Angabe des Gesetzes, nach welchem sich eine Fläche von bekannten Eigenschaften im Raume mit Aenderung ihrer Lage und Form bewegt.

So ist z. B. die Oberfläche des in den Elementen der Geometrie betrachteten geraden Kreiskegels die Fläche, die durch eine gerade Linie beschrieben wird, die beständig durch einen fixen Punkt geht und sich so bewegt, dass sie mit einer andern durch denselben Punkt gehenden, geraden Linie einen constanten Winkel bildet. Man könnte sich die Kegelflächen aber auch als durch einen Kreis beschrieben denken, dessen Mittelpunkt sich auf der Achse des Kegels fortbewegt, indem seine Ebene stets auf dieser Achse senkrecht bleibt, und sein veränderlicher Halbmesser der Entfernung der Spitze des Kegels von dem Mittelpunkte des beweglichen Kreises proportional ist. Ebenso einfach kann man sich den Kegel entstanden denken als Umhüllte einer Ebene, die stets durch denselben Punkt, die Spitze, hindurchgeht und beständig tangirend bleibt an einen Kreis, dessen Ebene zur Achse des Kegels senkrecht steht.

Auch durch Bewegung einer zweiten Fläche z. B. einer Kugelfläche, kann die betrachtete Kegelfläche entstehen, wenn die Kugel mit variabelem Halbmesser auf der Achse des Kegels sich bewegt und schliesslich in der Spitze desselben in eine Kugel mit dem Radius null übergeht.

Dieses führt uns auf die Eintellung der Flächen in Familien nach den verschiedenen Analogien, welche ihre Beschreibungsart darbietet.

Es ist klar, dass die Beurteilung, ob eine vorliegende Fläche zu dieser oder jener Familie gehört, analytisch auf die verschiedenste Art erfolgen kann. Hier führt eine einfache Ueberlegung zum erwünschten Ziele, dort eine reifere Erwägung der obwaltenden Verhältnisse. Doch das Resultat dieser Untersuchung, das Kriterium der betreffenden Fläche, oder analytisch ausgedrückt, die partielle Differentialgleichung, bleibt immer dieselbe.

Digitized by Google

In den mathematischen Publicationen finden wir, dass bei der Ableitung solcher Kriterien auch nicht für eine einzige Familie von Flächen ein einheitlicher Ausgangspunkt fixirt, sondern dass für jede Flächenart ein specieller Gang eingeschlagen wurde.

In der folgenden Abhandlung versuchen wir, einen allgemeinst möglichen Ideengang bei der Ableitung der Kriterien für die einzelnen Flächenfamilien einzuhalten, so dass dann, nachdem die einschränkenden Bedingungen eingeführt worden sind, für jede specielle Fläche die allgemeine Methode zur Anwendung gebracht werden kann.

I. Teil.

Behandlung des Thema in Punktcoordinaten.

§ 1. *Allgemeine Theorie der durch Bewegung von Linien entstandenen Flächen.**)

Die Gleichungen einer Linie enthalten in der Regel neben den veränderlichen Coordinaten auch noch andere Grössen, Parameter genannt, welche teils die Lage, teils die Gestalt und Grösse der charakteristischen Curve festsetzen. Solange wir es mit einer bestimmten Linie in einer bestimmten Lage zu tun haben, sind die Parameter als constante Grössen zu betrachten, sie hören jedoch auf letztere zu sein, sobald Lage und Gestalt der Linie einer Aenderung unterworfen werden, ein Fall, der in der Tat eintritt, wenn wir die Voraussetzung machen, eine durch ihre Gleichung gegebene Curve bewege sich mit oder ohne Aenderung ihrer Gestalt und Grösse im Raume.

Soll jedoch diese Bewegung den Charakter einer gesetzmässigen an sich tragen, so müssen unter den veränderlichen Parametern derartige Relationen bestehen, dass mit der Bestimmung eines derselben auch alle übrigen gegeben sind, oder, was dasselbe ist, dass sich alle Parameter als Functionen eines derselben, den wir den absolut veränderlichen nennen wollen, darstellen lassen; ist daher $(n+1)$ die Anzahl dieser Parameter, so müssen, damit die obige Forderung erfüllt werde, n Bedingungsgleichungen unter denselben bestehen.

---

*) E. Blažek: „Ueber die partiellen Differential-Gleichungen der durch Bewegung von Linien entstandenen Flächen". Kais. Akademie der Wissenschaften. Wien 1865.

Digitized by Google

Fügt man zu diesen noch die zwei Gleichungen der sich bewegenden Curve hinzu, so ist das Ergebniss der Elimination der $(n+1)$ Parameter aus den $(n+2)$ Gleichungen der analytische Ausdruck für die durch die Bewegung der Curve im Raume entstandene Fläche.

Allein nicht selten ist das Bewegungsgesetz der erzeugenden Curve ein so allgemeines, dass sich aus demselben die zur Festsetzung aller veränderlichen Parameter als Functionen eines derselben notwendige Anzahl von Bedingungsgleichungen nicht ableiten lässt, sondern es müssen jene Parameter, welche in diesem Falle unbestimmt bleiben, als willkürliche Functionen des absolut Veränderlichen angesehen werden in der Weise, dass, wenn wir diesen mit a jene mit a_1, a_2 . . . a_n bezeichnen, mithin die Gleichungen der erzeugenden Curve unter der Form:

$$f_1(x, y, z, a_1, a_2, \ldots a_n) = 0$$
$$f_2(x, y, z, a_1, a_2, \ldots a_n) = 0$$

oder, kurz bezeichnet,

$$f_1 = 0, \quad f_2 = 9 \qquad 1)$$

geschrieben werden können, die Relationen

$$a_1 = \varphi_1(a), \quad a_2 = \varphi_2(a), \quad a_n = \varphi_n(a) \qquad 2)$$

bestehen.

Darunter könnten auch, falls die Bewegung doch einigen Bedingungen unterworfen wäre, irgend welche bestimmte Functionen sein.

Die eben gemachten Annahmen haben zur unmittelbaren Folge, dass die Gleichung der erzeugten Fläche, als Ergebniss der Elimination aller veränderlichen Parameter aus den Gleichungen der erzeugenden Curve, ebenfalls willkürliche Functionen in sich schliesst, zu deren Beseitigung, wenn überhaupt eine solche angestrebt wird, es notwendig ist, aus den Gleichungen der erzeugenden Curve unmittelbar die erforderliche Anzahl neuer Relationen abzuleiten. Ein Mittel hierzu bietet uns die wiederholte Differentiation der Gleichung der erzeugenden Curve nach x und y als Grundveränderliche, wobei, da der analytische Ausdruck der erzeugten Fläche keinen veränderlichen Parameter enthalten darf, nebst z auch a und mit ihm a_1, a_2 . . . a_n als Functionen jener Grössen anzusehen sind.

Cauchy hat sich im III. Jahrgange der „Exercices de mathématiques" pag. 38 eingehend mit diesem Gegenstande befasst; er bemerkt an jener Stelle, dass bei einer solchen Differentiation nicht

Digitized by Google

nur die partiellen Differentialquotienten höherer Ordnung von a nach x und y, sondern wegen 2) auch die verschiedenen Ableitungen von a_1, a_2, a_3 . . . a_n nach a als neue zu eliminirende Grössen auftreten, und, indem er die Differentiation solange fortsetzt, bis die Anzahl der gewonnenen Gleichungen grösser wird als die der zu eliminirenden Grössen, gelangt er zu dem Ergebnisse, dass im allgemeinen für n willkürliche Functionen der betreffenden auch n partielle Differentialgleichungen der $(2n-1)$ten Ordnung repräsentirt werden.

Wenn sich auch nicht verkennen lässt, dass Cauchy durch einen derartigen Vorgang nur die grösstmögliche Ordnungszahl der gesuchten Differentialgleichung bestimmen wollte, so lässt sich doch, wenn man auf das Wesen der diesfälligen Eliminationsgleichungen etwas näher eingeht, leicht zeigen, dass diese obere Grenze zu hoch gegriffen und auf die Zahl n zu beschränken sei.

Um dies darzutun, wollen wir die Ordnungszahl der Differentialgleichung der erzeugten Fläche auf Grundlage eines bestimmten Eliminationsverfahrens zu ermitteln trachten.

Da zufolge der Gleichung 2) die Gleichung 1) bloss als Function von x, y, z und a betrachtet werden kann, so differentiiren wir so, dass wir zuerst partiell differentiiren nach x und y, wobei z als abhängig Veränderliche und a als Constante, sodann a als Variabele und x, y, z als Constante angesehen werden:

$$\frac{df_1}{dx} = \underbrace{\left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\right)}_{\left(\frac{df_1}{dx}\right)} + \frac{\partial f_1}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial z}$$

oder

$$\frac{df_1}{dx} = \left(\frac{df_1}{dx}\right) + \frac{\partial f_1}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial x} = 0, \quad \left(\frac{df_2}{dx}\right) + \frac{\partial f_2}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial x} = 0$$

$$\frac{df_1}{dy} \quad \left(\frac{df_1}{dy}\right) + \frac{\partial f_1}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial y} = 0, \quad \left(\frac{df_2}{dy}\right) + \frac{\partial f_2}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial y} = 0$$

Eliminirt man hieraus $\frac{\partial f_1}{\partial a}$, $\frac{\partial f_2}{\partial a}$, so folgt:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial a}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial x} \\ \frac{\partial a}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{vmatrix} = 0$$

Dem eben beschriebenen Vorgange zufolge enthalten die letzten zwei Teile der vorstehenden Gleichung allerdings die ersten Ableitungen des z nach x und y, aber nicht jene von a nach diesen Veränderlichen oder jene von $a_1, a_2, \ldots a_n$ nach a. Kurz bei der Bildung der Differentialgleichung:

$$\frac{\frac{df_1}{dx}}{\frac{df_1}{dy}} = \frac{\frac{df_2}{dx}}{\frac{df_2}{dy}}$$

ist keine weitere zu eliminirende Grösse in unserer Rechnung eingetreten. Die Gleichung hat die Form:

$$\frac{df_2}{dx}\frac{df_1}{dy} - \frac{df_2}{dy}\frac{df_1}{dx} = 0$$

oder, führen wir ein Symbol ein:

$$f_3 = 0$$

Dieses wieder partiell nach x und y differentiirt, erhalten wir:

$$\frac{\frac{\partial a}{\partial x}}{\frac{\partial a}{\partial y}} = \frac{\frac{df_3}{dx}}{\frac{df_3}{dy}}$$

Mit Rücksicht auf 3) auch

$$\frac{\frac{\partial a}{\partial x}}{\frac{\partial a}{\partial y}} = \frac{\frac{df_1}{dx}}{\frac{df_1}{dy}} = \frac{\frac{df_2}{dx}}{\frac{df_2}{dy}} = \frac{\frac{df_3}{dx}}{\frac{\partial f_3}{\partial y}}$$

Die Verbindung des dritten Teiles mit dem letzten liefert eine Differentialgleichung zweiter Ordnung, die aber wiederum keine neuen, zu eliminirenden Grössen ausser den in 1) vorkommenden enthält und durch

$f_4 = 0$ charakterisirt sein mag.

In der gegebenen Weise fortfahrend, folgt:

$$\frac{\frac{df_1}{dx}}{\frac{df_1}{dy}} = \frac{\frac{df_2}{dx}}{\frac{df_2}{dy}} = \frac{\frac{df_3}{dx}}{\frac{df_3}{dy}} = \ldots = \frac{\frac{df_{n+1}}{dx}}{\frac{df_{n+1}}{dy}} \qquad 4)$$

wobei allgemein:

$$f_q = \frac{df_{q-1}}{dx}\frac{df_p}{dy} - \frac{df_{q-1}}{dy}\frac{df_p}{dx} = 0 \qquad 5)$$

in welcher $p < q-1$ definirt wird, seine Teile enthalten, vom zweiten angefangen, der Reihe nach immer höhere Differentialquotienten des z nach x und y in der Weise, dass im letzten Teile nebst andern solche von der $n$ten Ordnung erscheinen und allgemein

$$f_q = \psi\left(x, y, z, \frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy} \cdots \frac{d^{q-2}z}{dx^{q-2}}\frac{d^{q-2}z}{dy^{q-2}}\right)$$

Die Verbindung des Systems 4) und 1) ermöglicht die Elimination von $(n+1)$ Parametern, und das Ergebniss dieser Operation ist eine partielle Differentialgleichung der erzeugten Fläche, deren Ordnungszahl die Grösse n nicht überschreitet.

§ 2. *Ableitung der durch Bewegung einer Geraden entstandenen Flächen. Regelflächen.*

In vollster Allgemeinheit lässt sich wol die Gerade als Schnitt zweier Ebenen

$$\left.\begin{aligned} E_1 \ldots f_1 &\equiv a\,x + b\,y + c\,z + d = 0 \\ E_2 \ldots f_2 &\equiv a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0 \end{aligned}\right\} \qquad 1)$$

darstellen. Die Gleichungen enthalten acht willkürliche Parameter, und trotzdem wird die resultirende partielle Differentialgleichung nicht von der siebenten, sondern von der dritten Ordnung.

Bilde man nach dem allgemeinen Verfahren:

$$\frac{df_1}{dx} = a + c\frac{\partial z}{\partial x}; \quad \frac{df_1}{dy} = b + c\frac{\partial z}{\partial y}$$

$$\frac{df_2}{dx} = a_1 + c_1\frac{\partial z}{\partial x}; \quad \frac{df_2}{dy} = b_1 + c_1\frac{\partial z}{\partial y}$$

hieraus die Relation 3) der vorigen Nummer:

$$\frac{a + c\frac{\partial z}{\partial x}}{b + c\frac{\partial z}{\partial y}} = \frac{a_1 + c_1\frac{\partial z}{\partial x}}{b_1 + c_1\frac{\partial z}{\partial y}}$$

Setzt man nun

Digitized by Google

$$\frac{a + c\dfrac{\partial z}{\partial x}}{b + c\dfrac{\partial z}{\partial y}} = h$$

so geht die Gleichung 3), auf null reducirt, über in

$$a - bh + c\frac{\partial z}{\partial x} - ch\frac{\partial z}{\partial y} = 0 \equiv f_3 \qquad 4$$

Differentiirt man die Gleichung partiell nach x und y, so ergibt sich

$$\left.\begin{aligned} \frac{df_3}{dx} &= c\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - ch\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} \\ \frac{df_3}{dy} &= c\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} - ch\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \end{aligned}\right\}$$

Der Quotient

$$\frac{\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - h\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}}{\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} - h\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}} = h \qquad 3')$$

geht über in

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2h\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + h^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \equiv f_4 \qquad 5$$

somit

$$\left.\begin{aligned} \frac{df_4}{dx} &= \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} - 2h\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y} + h^2\frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2} \\ \frac{df_4}{dy} &= \frac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y} - 2h\frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2} + h^2\frac{\partial^3 z}{\partial y^3} \end{aligned}\right\} \qquad 6)$$

Wegen der Gleichung 3) ist auch

$$\frac{\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^3} - 2h\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y} + h^2\dfrac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2}}{\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y} - 2h\dfrac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2} + h^2\dfrac{\partial^3 z}{\partial y^3}} = h \qquad 3'')$$

oder geordnet:

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} - 3h\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y} + 3h^2\frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2} - h^3\frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = 0 \qquad 7$$

Die Elimination des h aus 5) und 7) liefert die gesuchte Differentialgleichung, die offenbar von der dritten Ordnung ist.

Dieses Resultat wird uns übrigens nicht befremden, wenn wir

Digitized by Google

erwägen, dass das Gleichungssystem 1) durch das allerdings nicht mehr so allgemeine

$$\left.\begin{aligned} y &= \alpha x + \beta \\ z &= \gamma x + \delta \end{aligned}\right\}$$

ersetzt werden kann, das nur vier willkürliche Parameter enthält, dessen Benutzung mithin in der Tat auf eine partielle Differentialgleichung von höchstens dritter Ordnung führen kann.

Als Beispiel zur allgemeinen Regelfläche wollen wir behandeln:

Das einschalige Hyperboloid.

Seine Gleichung in Punktcoordinaten ist:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad 1)$$

und es soll untersucht werden, ob diese Gleichung dem Kriterium für Regelflächen genügt. Differentiiren wir die Gleich. 1) partiell nach x und y, so folgt:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{c^2}{a^2}\,\frac{x}{z} \\ \text{ebenso} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{c^2}{b^2}\,\frac{y}{z} \end{aligned}\right\}$$

Die zweiten Differentialquotienten gebildet:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{c^2}{a^2}\,\frac{a^2 z^2 - c^2 x^2}{a^2 z^3}$$

oder mit Zuhilfenahme von 1)

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{c^4}{a^2 b^2}\,\frac{y^2 - b^2}{z^3} \\ \text{analog} \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= \frac{c^4}{a^2 b^2}\,\frac{x^2 - a^2}{z^3} \\ \text{und} \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} &= \frac{c^4}{a^2 b^2}\,\frac{xy}{z^3} \end{aligned}\right\}$$

Berechnet man auch die dritten partiellen Differentialquotienten:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} &= -\frac{3c^4}{a^4 b^2}\,\frac{y^2-b^2}{z^3}\,x \\ \frac{\partial^3 x}{\partial x^2 \partial y} &= \frac{c^4}{a^4 b^4}\,\frac{2b^2x^2 - a^2(y^2-b^2)}{z^5}\,y \end{aligned}\right\}$$

analog auch:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} &= -\frac{3c^6}{a^2 b^4}\,\frac{x^2-a^2}{z^5}\,y \\ \frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2} &= \frac{c^6}{a^4 b^4}\,\frac{2a^2y^2 - b^2(x^2-a^2)}{z^5}\,x \end{aligned}\right\}$$

Die Bedingungsgleichung für allgemeine Regelflächen folgt durch Elimination von h aus den zwei Gleichungen:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2h\,\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + h^2\,\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \qquad 2)$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} - 3h\,\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} - 3h^2\,\frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2} + h^2\,\frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = 0 \qquad 3)$$

Werden die berechneten Werte eingesetzt, so resultirt:

$$\frac{c^2}{a^2 b^2 z^3}\left[(y^2-b^2) + 2hxy + h^2(x^2-a^2)\right] = 0 \qquad 2')$$

$$-\frac{3c^6}{a^4 b^4 z^6}\left[b^2(y^2-b^2)x + [2b^2x^2 - a^2(y^2-b^2)]yh - [2a^2y^2 - b^2(x^2-a^2)]xh^2 - a^2(x^2-a^2)yh^3\right] = 0 \qquad 3')$$

Da sich nun die Gleichung 3') auch schreiben lässt in der Form:

$$-\frac{3c^4}{a^4 b^4 z^5}\left[(y^2-b^2) + 2hxy + h^2(x^2-a^2)\right]\left[b^2x^2 - a^2yh\right] = 0$$

worin der erste, in der Klammer stehende Factor 2') ist, so folgt, dass die durch Elimination von h aus 2') und 3') sich ergebende Gleichung befriedigt sein wird.

Das einschalige Hyperboloid ist somit eine Regelfläche.

§ 3. *Regelflächen mit einer Richtgerade.*

Die ganze Betrachtung wird vereinfacht, wenn wir die Richtungsgerade als die z-Achse annehmen und, um conform mit der allgemeinen Ableitung der Linienflächen zu sein, die Erzeugende als

Schnitt zweier Ebenen E_1 und E_2 auffassen, wo E_1 eine allgemeine Lage besitzt, während E_2, um als Schnittlinie eine die z-Achse schneidende Gerade zu geben, durch die z-Achse selbst geht.

Die Ebenen haben die Gleichungen:

$$E_1 \ldots f_1 \equiv ax + by + cz - 1 = 0 \qquad 1)$$

$$E_2 \ldots f_2 \equiv x + \lambda y = 0 \qquad 2)$$

wobei λ von 0 verschieden sein muss.

Bestimmt man

$$\left.\begin{aligned} \frac{df_1}{dx} &= a + c\frac{\partial z}{\partial x} \\ \frac{df_1}{dy} &= b + c\frac{\partial z}{\partial y} \end{aligned}\right\} \qquad 3)$$

sowie

$$\left.\begin{aligned} \frac{df_2}{dx} &= 1 \\ \frac{df_2}{dy} &= \lambda \end{aligned}\right\} \qquad 4)$$

so wird der Quotient

$$\frac{a + c\dfrac{\partial z}{\partial x}}{b + c\dfrac{\partial z}{\partial y}} = \frac{1}{\lambda} \qquad 5)$$

oder auch

$$f_3 \equiv \lambda c\frac{\partial z}{\partial x} - c\frac{\partial z}{\partial y} + (\lambda a - b) = 0$$

Differentiirt ergibt sich:

$$\left.\begin{aligned} \frac{df_3}{dx} &= \lambda c\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - c\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} \\ \frac{df_3}{dy} &= \lambda c\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y^2} - c\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \end{aligned}\right\}$$

und hieraus

$$\frac{\lambda\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}}{\lambda\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} - \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}} = \frac{1}{\lambda}$$

nach Vorhergehendem aber auch

$$\lambda^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\lambda\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

Um die willkürliche Grösse λ wegzuschaffen, bedürfen wir keiner höheren partiellen Differentialgleichung, denn aus 2) folgt:

$$\lambda = -\frac{x}{y} \qquad 9)$$

Diesen Wert für λ in die Gleichung 8) gesetzt, erhalten wir:

$$x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \qquad 10)$$

oder auch mit der abgekürzten Bezeichnung:

$$rx^2 + 2s\,xy + ty^2 = 0$$

als die bekannte partielle Differentialgleichung der Regelflächen mit einer Richtgeraden.

Beispiele.

1) Eine Regelfläche.

Diese Fläche entsteht durch die Bewegung einer Geraden CD, deren Endpunkt C auf einer Geraden AB in der xy Ebene und der zweite D auf der z Achse um gleiche, dem Drehungswinkel proportionale Strecken fortgleitet.

Die Gleichung der Fläche ergibt sich leicht. Stelle man die Gleichung der Geraden DC auf

$$\frac{OP'}{OC} + \frac{PP'}{OD} = 1$$

wobei sind

$$OP' = \sqrt{x^2+y^2}, \quad PP' = z$$

$$OC = \varrho = \frac{ab\sqrt{x^2+y^2}}{bx+ay}$$

wenn a und b die Abschnitte bedeuten, welche die Gerade AB auf der x bzhw. y Achse bildet.

Dies eingesetzt in der Gleichung der Geraden, resultir die Flächengleichung in der Form:

$$\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\varrho} + \frac{z}{kt} = 1$$

oder auch

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1\right) k \operatorname{arc\,tang} \frac{y}{x} + z = 0$$

Die Richtigkeit dieser Gleichung leuchtet ein, wenn man dieselbe discutirt.

Für $y = 0$ ist $z = 0$ d. h. die ursprüngliche Lage der Erzeugenden ist die x Achse.

Für $z = 0$ wird

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0$$

die Gleichung der Geraden L.

Für $x = 0$ folgt

$$\frac{y}{b} + z - k\pi = 0$$

eine Gerade, nämlich die Erzeugende in der yz Ebene.

Die Beurteilung, ob die vorliegende Fläche dem Kriterium der Regelflächen mit einer Richtgeraden, nämlich

$$x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

genügt oder nicht, kann erfolgen:

1) Durch Substitution der berechneten partiellen Differentialquotienten in die Bedingungsgleichung, oder aber

2) Durch directe Ableitung der chrakteristischen Differentialgleichung des Kriteriums aus der Gleichung der Fläche selbst.

Wir wollen vorerst den Weg einschlagen, wo wir durch Substitution der partiellen Differentialquotienten in die Bedingungsgleichung unsere Fläche erproben.

Schreiben wir die Fläche in der Form:

$$z = \left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) k \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x} \qquad 1)$$

und bilden die partiellen Differentialquotienten

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= -\frac{k \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}}{a} + \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1\right) \frac{ky}{x^2 + y^2} \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= -\frac{k \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}}{b} - \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1\right) \frac{ky}{x^2 + y^2} \end{aligned}\right\} \qquad 2)$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{2ky}{a(x^2+y^2)} - \left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-1\right)\frac{2kxy}{(x^2+y^2)^2} \\
\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} &= -\frac{kx}{a(x^2+y^2)} + \frac{ky}{b(x^2+y^2)} + \left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-1\right)\frac{k(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} \\
\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= -\frac{2kx}{b(x^2+y^2)} + \left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-1\right)\frac{2kxy}{(x^2+y^2)^2}
\end{aligned}\right\} \quad 3)$$

Multiplicirt man die Gleichungen 3) der Reihe nach mit x^2, $2xy$, y^2 und addirt, so resultirt identisch null, ein Zeichen, dass der Bedingungsgleichung

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

genügt wird, d. h. die untersuchte Fläche ist eine Regelfläche mit einer Richtungsgeraden.

Auch durch directe Ableitung des Kriteriums aus der Gleichung der Fläche können wir in unserer Fläche eine Linienfläche mit einer Richtungsgeraden erkennen.

Die Gleichung der Fläche ist:

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-1\right)k\operatorname{arctg}\frac{y}{x} + z = 0 \qquad 1)$$

Differentiiren wir partiell nach x und y, dann kommt:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x} &= -\frac{k}{a}\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x} + \left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-1\right)\frac{ky}{x^2+y^2} \\
\frac{\partial z}{\partial y} &= -\frac{k}{b}\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x} + \left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-1\right)\frac{kx}{x^2+y^2}
\end{aligned}\right\} \quad 2)$$

Multiplicirt man mit x bzhw. y die erste und zweite Gleichung des Systems 2) und addirt, so folgt:

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial \eta} = -\frac{k}{a}\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}\cdot(x+y) \qquad 3)$$

als partielle Differentialgleichung der Fläche. Differentiirt man weiter partiell nach x und y, so ergiebt sich:

$$\left.\begin{aligned}
x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} &= -\frac{\partial\left[\frac{k}{a}\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}\cdot(x+y)\right]}{\partial x} \\
x\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \frac{\partial z}{\partial y} &= -\frac{\partial\left[\frac{k}{a}\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}\cdot(x+y)\right]}{\partial y}
\end{aligned}\right\}$$

Digitized by Google

Multiplicirt man die erste Gleichung des Systems mit x, die zweite mit y, addirt beide, so resultirt:

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}$$
$$+x\frac{\partial\left[\frac{k}{a}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\,.\,(x+y)\right]}{\partial x}+\frac{\partial\left[\frac{k}{a}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\,.\,(x+y^2)\right]}{\partial y}=0 \qquad 5$$

Mit Rücksicht auf die früheren Gleichungen reducirt sich die Gleichung 5) auf

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$$

die partielle Differentialgleichung der Regelflächen mit einer Richtgeraden.

2) Elliptische Schraubenfläche.

Diese Fläche entsteht, wenn sich eine Gerade derart bewegt, dass ein Endpunkt derselben auf einer Ellipse, der andere auf einer Geraden fortgleitet, um Strecken die proportional dem Drehungswinkel sind.

Nimmt man die Ellipse in der xy Ebene an ACB . . ., die z Achse als Richtungsgerade, so wird die Gerade $\overline{OA}$ aus ihrer ursprünglichen Lage in eine andere CD gelangen. Nach dem Entstehungsgesetze ist

$$\overline{AC}=\overline{CD}=k\,.\,t$$

Die Gleichung der Fläche ergibt sich nun ganz einfach. Stellt man die Gleichung der Geraden DC auf

$$\frac{OP'}{OC}+\frac{PP'}{OD}=1$$

so ist

$$OP'=\sqrt{x^2+y^2},\quad PP'=z$$

$$OC=\varrho=\frac{ab\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{a^2y^2+b^2x^2}},\quad OD=kt$$

Dies substituirt in 1), folgt:

$$\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}+\frac{z}{k\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}}=1$$

oder auch:

Digitized by Google

$$\left(\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}-1\right) k \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}+z=0 \qquad 2)$$

als Gleichung der Fläche.

Wird $z=0$, so ist

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$$

die Gleichung der Ellipse in der xy Ebene.

$y=0$, so ist $z=0$ die Gleichung der x Achse.

$x=0$, so ist

$$\frac{k\pi}{2b}y+z=0$$

Die vorliegende Fläche wird zu einer Kreisschraubenfläche, wenn $b=a$ wird. Die Gleichung derselben ist dann:

$$(\sqrt{x^2+y^2}-a)\, k \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}+az=0 \qquad 3)$$

und diese wollen wir näher untersuchen.

Löst man die Gleichung der Fläche nach z auf, also:

$$z=\frac{1}{a}(a-\sqrt{x^2+y^2})\, k \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x} \qquad 4)$$

und bildet die partiellen Differentialquotienten

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x}&=-k\frac{y}{x^2+y^2}+\frac{ky}{a(x^2+y^2)^{1/2}}-\frac{k}{a}\frac{x}{(x^2+y^2)^{1/2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}\\ \frac{\partial z}{\partial y}&=k\frac{x}{x^2+y^2}-\frac{kx}{a(x^2+y^2)^{1/2}}-\frac{k}{a}\frac{y}{(x^2+y^2)^{1/2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}\end{aligned}\right\} \qquad 5)$$

multiplicirt dann mit x die erste, mit y die zweite Gleichung des Systems und addirt, so ergibt sich

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{k}{a}\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}\cdot(x^2+y^2)^{1/2} \qquad 6)$$

als die partielle Differentialgleichung der Kreisschraubenfläche.

Berechne man die zweiten partiellen Differentialquotienten

Digitized by Google

$$\left.\begin{aligned} x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial^2 z}{\partial x\,.\,\partial y}+\frac{\partial\left[\frac{k}{a}(x^2+y^2)^{1/2}\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}\right]}{\partial x}=0 \\ x\frac{\partial^2 z}{\partial x\,.\,\partial y}+y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial\left[\frac{k}{a}(x^2+y^2)^{1/2}\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}\right]}{\partial y}=0 \end{aligned}\right\} \quad 7)$$

Die erste Gleichung dieses Systems mit x, die zweite mit y multiplicirt und addirt, folgt:

$$\begin{aligned} x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\,.\,\partial y}+y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y} \\ +\left[x\frac{\partial\left[\frac{k}{a}(x^2+y^2)^{1/2}\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}\right]}{\partial x}+y\frac{\partial\left[\frac{k}{a}(x^2+y^2)^{1/2}\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}\right]}{\partial y}\right]=0 \end{aligned} \quad 8)$$

Mit Berücksichtigung der früheren Gleichungen reducirt sich die vorhergehende auf

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\,.\,\partial y}+y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0 \quad 9)$$

eine partielle Differentialgleichung, welche wir als das Kriterium für Regelflächen mit einer Richtgeraden erhalten haben. Die Kreisschraubenfläche ist somit eine Regelfläche mit einer Richtgeraden.

3) Scharfe Schraubenfläche.

Diese Regelfläche wird erzeugt, indem eine Gerade AB sich derart bewegt, dass dieselbe mit der z Achse einen constanten Winkel i bildet und auf der z Achse um Strecken fortgleitet, die direct proportional sind dem Drehungswinkel t.

Stellt man die Gleichung der Geraden G in Segmentenform auf, so hat man:

$$\frac{OP'}{OC}+\frac{PP'}{OD}=1 \quad 1)$$

Nun ist

$$OP'=\sqrt{x^2+y^2}, \qquad OC=(a+kt)\operatorname{tg} i$$

$$PP'=z, \qquad OD=a+kt$$

Diese Werte eingesetzt gibt:

Digitized by Google

$$\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\left(a+k\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}\right)\operatorname{tg} i}+\frac{z}{a+k\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}}=1$$

welche Gleichung die Form annimmt:

$$\sqrt{x^2+y^2}+z\operatorname{tg} i-\left(a+k\operatorname{tg}\frac{y}{x}\right)\operatorname{tg} i=0 \qquad 2)$$

und die Gleichung der scharfen Schraubenfläche darstellt.

Um zu untersuchen, zu welcher Art der Regelflächen die abgeleitete Fläche gehört, wollen wir durch directe Ableitung zur charakteristischen Differentialgleichung gelangen.

Wir gehen von der Gleichung der Fläche, aufgelöst nach z, aus:

$$z=\left(a+k\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}\right)-\sqrt{x^2+y^2}\cot i \qquad 3)$$

Differentiirt man partiell nach x und y, so kommt:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x}&=-k\frac{y}{x^2+y^2}+\frac{x}{(x^2+y^2)^{1/2}}\cot i\\ \frac{\partial z}{\partial y}&=+k\frac{x}{x^2+y^2}+\frac{y}{(x^2+y^2)^{1/2}}\cot i\end{aligned}\right\} \qquad 4)$$

Multiplicirt man bzhw. mit x und y und addirt, so folgt die Differentialgleichung der Fläche:

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}-(x^2+y^2)^{1/2}\cot i=0 \qquad 5)$$

Differentiirt man weiter nach x und y, so folgt:

$$\left.\begin{aligned}x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial^2 z}{\partial x\,.\,\partial y}-\frac{x}{(x^2+y^2)^{1/2}}\cot i&=0\\ x\frac{\partial^2 z}{\partial x\,.\,\partial y}+y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+\frac{\partial z}{\partial y}-\frac{y}{(x^2+y^2)^{1/2}}\cot i&=0\end{aligned}\right\} \qquad 6)$$

Wird die erste Gleichung dieses Systems mit x, die zweite mit y multiplicirt und dann addirt, so folgt:

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\,.\,\partial y}+y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}-(x^2+y^2)^{1/2}\cot i=0 \qquad 7)$$

Berücksichtigt man jedoch die früheren Gleichungen, so geht die vorhergehende Gleichung über in

$$x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \,.\, \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \qquad 8)$$

das Kriterium der Regelflächen mit einer Richtgeraden.

Die scharfe Schraubenfläche ist also eine Regelfläche mit einer Richtgeraden.

§ 4. *Regelflächen mit einer Richtebene.*

Diese Art der Regelflächen wird erzeugt durch eine Gerade, die während ihrer Bewegung stets zu einer Ebene parallel bleibt, die wir Leitebene nennen.

Nehmen wir als Leitebene die xy Ebene an, und die Erzeugende sei wieder als Schnittlinie zweier Ebenen betrachtet, und zwar einer Ebene in beliebiger Lage, und einer andern, die parallel zur Leit- oder Richtebene ist.

Es seien nun die beiden Ebenen

$$E_1 \ldots f_1 \equiv ax + by + cz - 1 = 0 \qquad 1)$$
$$E_2 \ldots f_2 \equiv z - \lambda = 0 \qquad 2)$$

Bildet man wieder:

$$\left.\begin{aligned} \frac{df_1}{dx} &= a + c\frac{\partial z}{\partial x} \\ \frac{df_1}{dy} &= b + c\frac{\partial z}{\partial y} \end{aligned}\right\} \qquad 3)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{df_2}{dx} &= \frac{\partial z}{\partial x} \\ \frac{df_2}{dy} &= \frac{\partial z}{\partial y} \end{aligned}\right\} \qquad 4)$$

Aus 3) und 4) folgt:

$$\frac{a + c\dfrac{\partial z}{\partial x}}{b + c\dfrac{\partial z}{\partial y}} = \frac{\dfrac{\partial z}{\partial x}}{\dfrac{\partial z}{\partial y}} \qquad 5)$$

oder vereinfacht:

$$\frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{\frac{\partial z}{\partial y}} = \frac{a}{b} \qquad 6)$$

Es wird also

$$f_3 \equiv b\,\frac{\partial z}{\partial x} - a\,\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

Differentiirt, folgt:

$$\left.\begin{aligned} \frac{df_3}{dx} &= b\,\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - a\,\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} \\ \frac{df_3}{dy} &= b\,\frac{\partial^2 z}{\partial x\,.\,\partial y} - a\,\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \end{aligned}\right\} \qquad 7)$$

Der Quotient gebildet gibt:

$$\frac{b\,\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - a\,\frac{\partial^2 z}{\partial x\,.\,\partial y}}{k\,\frac{\partial^2 z}{\partial x\,.\,\partial y} - a\,\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}} = \frac{a}{b} \qquad 8)$$

oder

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\,\frac{a}{b}\,\frac{\partial^2 z}{\partial x\,.\,\partial y} + \left(\frac{a}{b}\right)^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \qquad 9)$$

Hierin den Wert aus 6) substituirt:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 - 2\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 z}{\partial x\,.\,\partial y} + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

Führt man die gebräuchliche, abgekürzte Bezeichnung ein, so ergibt sich:

$$rq^2 - 2spq + tp^2 = 0$$

die bekannte, partielle Differentialgleichung der Regelflächen mit einer Richtebene, als das Kriterium derselben.

Beispiele.

1) Eine windschiefe Fläche.

Eine Gerade G bewege sich auf zwei Ellipsen, wovon die eine E_1 in der yz Ebene liegt, die andere E_2 in einer zu dieser parallelen Ebene in der Entfernung p, so dass diese Erzeugende stets parallel bleibt zur xy Ebene.

Zur Gleichung der Fläche gelangen wir auf folgende Weise:

Aus den zwei ähnlichen Dreiecken ABP' und ACD ergibt sich die Proportion:

$$\overline{AC} : \overline{CD} = AB : BP'$$

Führt man die Werte ein:

$$\frac{m-n}{p} = \frac{m-y}{x} \qquad 1)$$

die Grössen m und n sind wegzuschaffen. M_1 und M_2 sind Punkte der Leitellipsen; für dieselben gelten:

$$\frac{m^2}{a^2} + \frac{s^2}{b^2} = 1, \qquad \frac{n^2}{\alpha^2} - \frac{z^2}{\beta^2} = 1$$

Hieraus

$$m = \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - z^2}, \quad n = \frac{\alpha}{\beta}\sqrt{\beta^2 - z^2}$$

Für $\beta = b$ ergibt sich:

$$m - n = \frac{a-\alpha}{b}\sqrt{b^2 - z^2}$$

und in 1) substituirt, folgt:

$$\frac{a-\alpha}{bp}\sqrt{b^2-z^2} = \frac{a\sqrt{b^2-z^2} - by}{bx}$$

Setzt man

$$\frac{a-\alpha}{p} = c$$

so ergibt sich die Gleichung der Fläche:

$$cx\sqrt{b^2-z^2} + by - a\sqrt{b^2-z^2} = 0$$

Wollen wir nun in Kürze die Richtigkeit unserer Formel prüfen.

Für $c = 0$, folgt

$$cx + y - a = 0$$

die Gleichung der Geraden G_1.

Für $y = 0$, folgt

$$z = b$$

die Gerade G_2.

Für $x = 0$, ist

$$y = \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - z^2}$$

die Gleichung der Ellipse E_1, die in der yz Ebene liegt.

Für $x = q$, ist

$$y = \frac{a - cq}{b} \sqrt{b^2 - z^2}$$

dies will nichts anderes sagen als, dass ein beliebiger Schnitt parallel zur yz Ebene geführt, eine Ellipse zur Schnittfigur mit der Fläche hat.

Ist $\alpha = a$, so folgt:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Die resultirende Fläche ist ein elliptischer Cylinder.

Wenn $b = a$, so geht die Gleichung der Fläche über in

$$x^2 + y^2 = a^2$$

einen Kreiscylinder.

Und wird endlich

$$a = 0, \quad \alpha = b = r$$

so erhalten wir

$$(r^2 - z^2)x^2 - p^2 y^2 = 0$$

die Gleichung des „Coin conique" von Wallis.

Nun wollen wir prüfen, ob die Gleichung der Fläche dem Kriterium der Regelflächen mit einer Richtebene genügt, nämlich:

$$rq^2 - 2spq + tp^2 = 0$$

oder ob wir durch entsprechende Operationen aus der Flächengleichung zu dieser charakteristischen Differentialgleichung gelangen können.

Die Gleichung der Fläche sei:

$$cx\sqrt{b^2 - z^2} + by - a\sqrt{b^2 - z^2} = 0 \qquad 2)$$

Bilde man:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial l}{\partial x} &= c\sqrt{b^2 - z^2} \\ \frac{\partial l}{\partial y} &= b \\ \frac{\partial l}{\partial z} &= \frac{a - cx}{\sqrt{b^2 - z^2}} z \end{aligned}\right\} \qquad 3)$$

Nun ist

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= -\frac{c(b^2-z^2)}{(a-cx)z}\\ \frac{\partial z}{\partial y} &= -\frac{b\sqrt{b^2-z^2}}{(a-cx)z}\end{aligned}\right\} \quad 3)$$

Hieraus folgt die Differentialgleichung der Fläche:

$$\frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{\frac{\partial z}{\partial y}} = \frac{c}{b}\sqrt{b^2-z^2} = 0 \quad 4)$$

Differentiirt man partiell nach x und y, so erhalten wir:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial^2 z}{\partial x\,.\,\partial y}\frac{\partial z}{\partial x}}{\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} + \frac{cz}{b\sqrt{b^2-z^2}}\frac{\partial z}{\partial x} &= 0\\ \frac{\frac{\partial^2 z}{\partial x\,.\,\partial y}\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\frac{\partial z}{\partial x}}{\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} + \frac{cz}{b\sqrt{b^2-z^2}}\frac{\partial z}{\partial y} &= 0\end{aligned}\right\} \quad 5)$$

Multiplicirt man jede der Gleichungen des Systems mit $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial z}{\partial x}$ bzhw. und subtrahirt, so folgt:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 - 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\,.\,\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 = 0 \quad 6)$$

oder

$$rq^2 - 2spq + tq^2 = 0 \quad 7)$$

ein Resultat, das übereinstimmt mit dem Kriterium für Regelflächen mit einer Richtebene, somit ist die untersuchte Fläche von derselben Art.

2) Coin conique von Wallis.

Seine Gleichung ist:

$$(a^2-z^2)x^2 - b^2y^2 = 0 \quad 1)$$

Bilde man die partiellen Differentialquotienten:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{b^2 y^2}{x^3 z} \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= -\frac{b^2 y}{x^2 z} \end{aligned}\right\} \quad 2)$$

Durch Division ergibt sich:

$$\frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{\frac{\partial z}{\partial y}} = -\frac{y}{x} \quad 3)$$

als partielle Differentialgleichung der Fläche.

Differentiirt man nochmals, also:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 z}{\partial x \,.\, \partial y}}{\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} - \frac{y}{x^2} = 0 \\ &\frac{\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x \,.\, \partial y} - \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 z}{\partial x \,.\, \partial y}}{\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} + \frac{1}{x} = 0 \end{aligned}\right\} \quad 4)$$

führt den Wert von $-\frac{y}{x}$ aus der Gleichung 3) ein, so erhält man:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 z}{\partial x \,.\, \partial y}}{\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} + \frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{\frac{\partial z}{\partial y}}\frac{1}{x} = 0 \\ &\frac{\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x \,.\, \partial y} - \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 z}{\partial x \,.\, \partial y}}{\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} + \frac{1}{x} = 0 \end{aligned}\right\} \quad 5)$$

Multiplicirt man die erste des vorhergehenden Systems mit $\frac{\partial z}{\partial y}$, die zweite mit $\frac{\partial z}{\partial x}$ und subtrahirt, so ergibt sich:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 - 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \,.\, \partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 = 0$$

als das Kriterium der Regelflächen mit einer Richtebene.

Coin conique von Wallis ist also eine Regelfläche mit einer Richtebene.

§ 5. *Regelflächen mit einer Richtebene und Richtgerade.*

Diese Art der Regelflächen, welche auch Konoidflächen genannt werden, werden von einer beweglichen Geraden erzeugt, welche stets eine feste Gerade schneidet und dabei parallel bleibt zu einer festen Ebene, Richtebene.

Die feste Gerade, Leitgerade, sei die z Achse, die Leitebene die xy Ebene.

Die Erzeugende G betrachten wir auch hier als den Schnitt zweier Ebenen, nämlich:

$$\left.\begin{aligned} E_1 \quad \ldots f_1 &\equiv x + \lambda y = 0 \\ E_2 \ldots f_2 &\equiv z - \mu = 0 \end{aligned}\right\} \qquad 1)$$

Bilde man nach der allgemeinen Methode:

$$\left.\begin{aligned} \frac{df_1}{dx} &= 1 \\ \frac{df_1}{dy} &= \lambda \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} \frac{df_2}{dx} &= \frac{\partial z}{\partial x} \\ \frac{df_2}{dy} &= \frac{\partial z}{\partial y} \end{aligned}\right\} \qquad 2)$$

Hieraus ergibt sich:

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{\dfrac{\partial z}{\partial x}}{\dfrac{\partial z}{\partial y}} \qquad 3)$$

oder

$$\frac{\partial z}{\partial y} - \lambda \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \qquad 4)$$

Der Wert für λ ist

$$\lambda = -\frac{x}{y}$$

Nach der Substitution hat man die Gleichung

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

oder

$$xp + yq = 0 \qquad 6)$$

welche die charakteristische Differentialgleichung, das Kriterium, der Regelflächen mit einer Richtebene bildet.

Beispiele.

1) Die erste Hochheim'sche Fläche.

Im 55. Bande des „Archiv der Mathematik und Physik" von Grunert behandelt Hochheim eine windschiefe Fläche, deren Entstehung die folgende ist:

Ein parabolischer Cylinder

$$z^2 = px$$

wird von einer Ebene $y = c$ in einer Parabel geschnitten. Gleitet nun eine Gerade, die stets durch die z Achse und parallel zur xy Ebene bleiben möge, auf der Schnittparabel fort, so wird der geometrische Ort der verschiedenen Lagen dieser Geraden eine windschiefe Fläche sein, deren Gleichung einfach erhalten werden kann.

Es sei CB die Lage der Erzeugenden, OB' ihre Projection, M ein Punkt auf derselben, also ein Punkt der Fläche, M' dessen Projection. Für B, als einen Punkt der Schnittparabel, besteht die Gleichung:

$$z^2 = p\xi \qquad 1)$$

wenn

$$OA' = \xi$$

und p den Parameter darstellt. Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke $OM'D$ und $OB'A'$ folgt die Proportion:

$$\frac{y}{x} = \frac{c}{\xi} \qquad 2$$

Aus 1) für ξ den Wert gesetzt, ergibt sich

$$x = cpyz^2$$

oder

$$x = Myz^2 \qquad 3)$$

die Gleichung der windschiefen Fläche.

Aus der Entstehung der Fläche ist uns bekannt, dass dieselbe eine Richtungsgerade und eine Richtungsebene besitzt. Sie muss also der charakteristischen Differentialgleichung jeder dieser Art der Regelflächen genügen, sowie die partielle Differentialgleichung der Konoidflächen befriedigen.

Es müssen also erfüllt werden die Gleichungen:

$$rx^2 + 2sxy + ty^2 = 0 \qquad \text{I}$$
$$rq^2 - 2spq + tp^2 = 0 \qquad \text{II}$$
$$xp + qy = 0 \qquad \text{III}$$

Die Gleichung der Fläche, nach z aufgelöst, ist:

$$z^2 = \frac{x}{My} \qquad 1)$$

Bilde man

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{1}{2Myz} \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= -\frac{x}{2My^2z} \end{aligned}\right\} \qquad 2)$$

Multiplicirt man die erste dieser Gleichungen mit x, die zweite mit y und addirt, so folgt:

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 0 \qquad 3)$$

die Bedingungsgleichung für Konoidflächen.

Setzt man die bestimmten, partiellen Differentialquotienten in das Kriterium für Konoidflächen, so ergibt sich:

$$\frac{x}{2Myz} - \frac{x}{2Myz} = 0 \qquad 4)$$

was die behandelte Fläche als Konoidfläche kennzeichnet:

Bestimmen wir die zweiten Differentialquotienten:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= -\frac{1}{4M^2y^2z^3} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \,.\, \partial y} &= -\frac{x}{4M^2y^3z^3} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= -\frac{x^2}{4M^2y^4z^3} \end{aligned}\right\} \qquad 5)$$

In die Bedingungsgleichungen II und III substituirt, werden dieselben identisch erfüllt. In der Tat wird I:

$$-\frac{x^2}{4M^2y^2z^3} + \frac{2x^2}{4M^2y^2z^3} - \frac{x^2}{4M^2y^2z^3} = 0$$

aber auch die Gleichung II, wenn man noch bestimmt:

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 &= \frac{1}{4M^2y^2z^2}\\ \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 &= \frac{x^2}{4M^2y^2z^2}\\ \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) &= -\frac{x}{4M^2y^3z^2}\end{aligned}\right\} \quad 7)$$

gibt:

$$-\frac{1}{4M^2y^2z^2}\,\frac{x^2}{4M^2y^4z_2}+\frac{2x}{4M^2y^3z^3}\,\frac{x}{4M^2y^3z^2}$$

$$-\frac{x^4}{4M^2y^4z^3}\,\frac{1}{4M^2y^2z^2}\equiv 0 \qquad 8)$$

Die Hochheim'sche Fläche genügt also den Kriterien der drei behandelten Arten von Regelflächen, sie ist somit eine Regelfläche mit einer Richtgeraden, einer Richtebene, folglich auch eine Konoidfläche.

In derselben oben angeführten Zeitschrift leitet Hochheim eine auf ähnliche Weise entstehende, windschiefe Fläche ab, wir wollen sie nennen

2) Die zweite Hochheim'sche Fläche.

Auf einer Parabel, die sich als Schnitt der Ebene $x = c$ eines parabolischen Cylinders

$$y^2 = pz$$

ergibt, gleitet eine gerade Linie derart, dass dieselbe stets durch die z Achse geht und mit der xy Ebene parallel bleibt.

Ihre Gleichung ergibt sich ohne jedwede Complication, wie dieselbe Hochheim tatsächlich ausführt.

AC sei die Lage einer Erzeugenden, M ein Punkt der Fläche mit den Coordinaten x, y, z; A ein Punkt der Schnittparabel, der befriedigt wird durch

$$\eta^2 = pz \qquad 1)$$

wobei p der Parameter und

$$\eta = A'B'$$

ist. Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke $OM'D$ und $OA'B'$ folgt:

$$\frac{x}{y} = \frac{c}{\eta} \qquad 2$$

hieraus

Digitized by Google

$$\eta = c\frac{y}{x}$$

und substituirt

$$z = \frac{c^2 y^2}{p x}$$

oder

$$z = M\frac{y^2}{x^2} \qquad 3)$$

Gleichung der Fläche.

Wie wir wissen, besitzt die behandelte Fläche eine Richtgerade und eine Richtebene, sie ist ein Konoid. Nun wollen wir untersuchen, ob die Flächengleichung auch den Kriterien dieser Flächenarten genügt.

Wir lösen die Gleichung nach z auf

$$z = M\frac{y^2}{x^2} \qquad 4)$$

und berechnen die partiellen Differentialquotienten

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= -\frac{2My^2}{x^3}\\ \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{2My}{x^2}\end{aligned}\right\} \qquad 5)$$

Multiplicirt man die erste mit x, die zweite mit y und addirt beide, so ergib sich:

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 0 \qquad 6)$$

das Kriterium für Konoidflächen.

Substituirt man die berechneten Differentialquotienten in die partielle Differentialgleichung der Konoide, so folgt die Identität:

$$-\frac{2My^2}{x^2} + \frac{2My^2}{x^2} = 0 \qquad 7)$$

ein Zeichen, dass unsere Fläche ein Konoid ist.

Berechnen wir die zweiten Differentialquotienten:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= -\frac{6My^2}{x^4}\\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \,.\, \partial y} &= -\frac{4My}{x^3}\\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= \frac{2M}{x^2}\end{aligned}\right\} \qquad 8)$$

und substituiren dieselben in die Bedingungsgleichung für Regelflächen mit einer Richtgeraden, folgt:

$$\frac{6My^2}{x^2} - \frac{8My^2}{x^2} + \frac{2My^2}{x^2} \equiv 0 \qquad 9)$$

was unsere Fläche als eine solche von der genannten Eigenschaft charakterisirt.

Bestimmen wir die Werte:

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 &= \frac{4M^2y^4}{x^6} \\ \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 &= \frac{4M^2y^2}{x^4} \\ \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) &= -\frac{4M^2y^3}{x^5} \end{aligned}\right\} \qquad 10)$$

und setzen dieselben in die Gleichung:

$$rq^2 - 2spq + tp^2 = 0$$

so folgt:

$$\frac{4M^2y^2}{x^4}\,\frac{4M^2y^4}{x^6} - 2\,.\,\frac{4M^2y^3}{x^5}\,\frac{4M^2y^3}{x^5} + \frac{4M^2y^2}{x^4}\,\frac{4M^2y^4}{x^6} \equiv 0 \qquad 11)$$

ein Zeichen, dass die Fläche eine windschiefe ist und eine Richtebene besitzt.

Die zweite Hochheim'sche Fläche ist also ein Konoid, besitzt eine Richtgerade und Richtebene.

3) Flache Schraubenfläche.

Nun wollen wir die bekannte Gleichung dieser Fläche schreiben in der Form:

$$z = c \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{y} \qquad 1)$$

Die partiellen Differentialquotienten dieser Fläche sind:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= c\frac{y}{x^2+y^2} \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= -c\frac{x}{x^2+y^2} \end{aligned}\right\} \qquad 2)$$

Digitized by Google

Multipliciren wir bzhw. mit x und y die Gleichungen und addiren, so folgt:

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=0 \qquad 3)$$

die Bedingungsgleichung für Konoide.

Bildet man den Quotienten

$$\frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{\frac{\partial z}{\partial y}}=-\frac{y}{x} \qquad 4)$$

und differentiirt, so kommt:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 z}{\partial x\,.\,\partial y}}{\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)^2}&=\frac{y}{x^2}\\ \frac{\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x\,.\,\partial y}-\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}}{\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)^2}&=-\frac{1}{x}\end{aligned}\right\} \qquad 5)$$

Multiplicirt man respective mit $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial z}{\partial x}$ und subtrahirt, so ergibt sich:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2-2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x\,.\,\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2=0 \qquad 6)$$

das Kriterium für Regelflächen mit einer Richtebene.

Geht man von der Gleichung 2) aus und differentiirt von neuem partiell nach x und x, so folgt:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}&=-c\frac{2yx}{(x^2+y^2(^2}\\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\,.\,\partial y}&=c\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}&=c\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\end{aligned}\right\} \qquad 7)$$

Multiplicirt man bzhw. mit x^2, $2xy$ und y^2 und addirt, so folgt:

$$rx^2+2sxy+ty^2=0$$

das Kriterium der Regelfläche mit einer Richtgeraden.

Die flache Schraubenfläche ist somit ein Konoid, eine Regelfläche mit einer Richtungsgeraden und einer Richtungsebene.

§ 6. *Cylinderflächen.*

Die Cylinderflächen sind jene Art von Regelflächen, bei welchen die Erzeugende stets parallel bleibt einer andern Geraden. Die erzeugenden Ebenen müssen sich daher in einer Geraden von der Gleichung:

$$\left.\begin{aligned} x &= mz+\alpha \\ y &= nz+\beta \end{aligned}\right\} \qquad 1)$$

schneiden, was dadurch erreicht wird, dass man schreibt:

$$\left.\begin{aligned} E_1 \ldots f_1 &\equiv ax+by-(am+bn)z-(a\alpha+b\beta)=0 \\ E_2 \ldots f_2 &\equiv a_1x+b_1y-(a_1m+b_1n)z-(a_1\alpha+b_1\beta)=0 \end{aligned}\right\} \qquad 2)$$

wobei noch zu bemerken wäre, dass wir die Grösse ab_1-a_1b von null verschieden wählen können.

Bilden wir nach der allgemeinen Theorie

$$\frac{\frac{df_1}{dx}}{\frac{df_1}{dy}} = \frac{\frac{df_2}{dx}}{\frac{df_2}{dy}}$$

oder

$$\frac{a-(am+bn)\frac{\partial z}{\partial x}}{b-(am+bn)\frac{\partial z}{\partial y}} = \frac{a_1-(a_1m+b_1n)\frac{\partial z}{\partial x}}{b_1-(a_1m+b_1n)\frac{\partial z}{\partial y}} \qquad 3)$$

also:

$$ab_1-(am+bn)\frac{\partial z}{\partial x}-(am_1+b_1n)\frac{\partial z}{\partial y}+(am+bn)(a_1m+b_1n)\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}$$

$$-a_1b+(a_1m+b_1n)b\frac{\partial z}{\partial x}+(am+bn)a_1\frac{\partial z}{\partial y}-(am+bn)(a_1m+b_1n)\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

Reducirt, ergibt sich:

$$[(a_1m+b_1n)b-(am+bn)b_1]\frac{\partial z}{\partial x}$$

$$+[(am+bn)a_1-(a_1m+b_1n)a]\frac{\partial z}{\partial y}=a_1b-ab_1,$$

oder auch:

$$m[a_1b-ab_1]\frac{\partial z}{\partial x}+m[a_1b-ab_1]\frac{\partial z}{\partial y}=a_1b-ab_1 \qquad 4)$$

und schliesslich:

$$m\frac{\partial z}{\partial x} + n\frac{\partial z}{\partial y} = 1 \qquad 5)$$

oder

$$mp + nq = 1$$

die bekannte partielle Differentialgleichung der Cylinderflächen.

§ 7. *Kegelflächen.*

Für solche Flächen gelten dieselben Betrachtungen, wie für die Cylinderflächen. Soll der Scheitel des Kegels der Punkt $M_0(x_0, y_0, z_0)$ sein, so müssen die Gleichungen der Erzeugenden heissen:

$$\left.\begin{aligned} x - x_0 &= m(z - z_0) \\ y - y_0 &= n(z - z_0) \end{aligned}\right\} \qquad 1)$$

oder auch:

$$\left.\begin{aligned} x &= mz + \underbrace{(x_0 - mz_0)}_{\alpha} \\ y &= nz + \underbrace{(y_0 - mz_0)}_{\beta} \end{aligned}\right\} \qquad 1')$$

Die resultirende Gleichung muss offenbar dieselbe sein, wie früher, nämlich:

$$m\frac{\partial z}{\partial x} + n\frac{\partial z}{\partial y} = 1 \qquad 2)$$

Nun folgt aber aus 1):

$$\left.\begin{aligned} m &= \frac{x - x_0}{z - z_0} \\ n &= \frac{y - y_0}{z - z_0} \end{aligned}\right\} \qquad 3)$$

somit geht die Gleichung 2) über in

$$z - z_0 = (x - x_0)p + (y - y_0)q \qquad 4)$$

welches die bekannte Gleichung der Tangentialebene ist.

§ 8 *Allgemeine Theorie der durch Bewegung von veränderlichen Flächen entstandenen Flächenfamilien.* *)

Bewegt sich eine Fläche von bekannter Eigenschaft im Raume derart, dass sie nach gegebenem Gesetze ihre Lage und Form ändert, so ist mit ihr allgemein eine neue Fläche verbunden, welche

*) G. Blažek: „Časopis pro pěstování math. a fysiky“ II. p. 167.

die erste in jeder Lage tangirt, und welche wir die Umhüllungsfläche nennen. Diese umfasst die Durchschnitte der fortschreitenden Lagen der sich bewegenden Fläche, man kann sie somit als das Erzeugniss der beweglichen Fläche ansehen.

Die Lage und Form der Fläche wird bestimmt durch constante Grössen, Parameter, welche in der Gleichung der Fläche erscheinen. Soll nun die Bewegung der Fläche und die Aenderung ihrer Gestalt ausgedrückt werden, so ist es nötig, diese Parameter als variable Grössen aufzufassen; so z. B. drückt die Gleichung

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$$

eine Kugel mit dem Radius r aus, deren Mittelpunkt die Coordinaten a, b, c hat.

Bie Bewegung und Aenderung der Form der Kugel wird allgemein ausgedrückt durch die Aenderung der Grössen a, b, c und r.

Soll nun zwischen der Bewegung und Aenderung ein bestimmtes Gesetz herrschen, so kann man den Parametern nicht von einander unabhängige Werte geben, sondern durch die besondere Bestimmung des Wertes des einen Parameters müssen wir auf die Werte des andern kommen, d. h. enthält die Gleichung der beweglichen Fläche $(n+1)$ variabele Parameter, so müssen zwischen ihnen n Bedingungsgleichungen existiren. Drücken wir nun mittelst dieser Gleichungen n Parameter aus, die abhängig variabel sind von einem Parameter, der unabhängig variabel ist, und der a heissen mag, so kann man die bewegliche Fläche in der Form schreiben:

$$f(x, y, z, a)=0 \quad \text{oder} \quad f=0 \qquad 1)$$

Die benachbarte Fläche wird ausgedrückt durch den Uebergang der Grössen a in $a+\delta$, wobei δ unendlich klein ist.

Die Gleichung der Fläche in neuer Lage ist:

$$\Big|^{\delta=0} f(x, y, z, a+\delta)=0 \qquad 2)$$

Die Vereinigung beider Flächen bedeutet eine Curve, die Charakteristik, in welcher sich die zwei benachbarten Lagen der Fläche schneiden, deren geometrischer Ort nach dem Vorhergehenden die Umhüllungsfläche ist. Die Gleichung dieser Fläche erhalten wir durch Elimination des Parameters a aus den beiden letzten Gleichungen. Die Gleichung dieser Charakteristik lässt sich auch ausdrücken durch

Digitized by Google

$$\left|^{\delta=0} \frac{f(x, y, z, a+\delta) - f(x, y, z, a)}{\delta} = 0\right.$$

d. h. durch die Gleichung 1) und

$$\frac{\partial f(x, y, z, a)}{\partial a} = 0$$

so dass die Bestimmung der Umhüllungsfläche beruht auf der Elimination des Parameters a aus den Gleichungen:

$$f = 0 \qquad 1')$$

$$\frac{\partial f}{\partial a} = 0 \qquad 2')$$

Die Bewegung der Fläche scheint aber in manchen Fällen ganz allgemein, so dass es nicht möglich ist, aus derselben die nötige Anzahl von Bedingungsgleichungen zwischen den Parametern zu finden. Dann bleibt nichts anderes übrig, um die Gesetzmässigkeit der Bewegung anzudeuten, als die fehlenden Bedingungsgleichungen dadurch zu ersetzen, dass wir die unbestimmten Parameter als beliebige Functionen des einzigen, unabhängig variabelen ansehen.

Sind nun $a_1, a_2 \ldots a_n$ unbestimmte Parameter, dann ist nötig einzuführen:

$$a_1 = \varphi_1(a), \quad a_2 = \varphi_2(a), \ldots \ldots a_n = \varphi_n(a),$$

wobei φ eine beliebige Function bezeichnet.

Die notwendige Folge hiervon ist, dass auch die Gleichung der Umhüllungsfläche beliebige Functionen enthält; wollen wir aber diese beseitigen, so ist es nötig aus 1) und 2) neue Gleichungen abzuleiten, die zur Elimination von n Parametern dienen

Als Mittel hiezu leistet uns gute Dienste die partielle Differentiation der Gleichung 1) nach x und y, bei der, weil in der Gleichung der Umhüllungsfläche die Grösse a nicht erscheinen darf, neben z auch der Parameter a als Function der Grösse x und y betrachtet wird.

Im folgenden wollen wir nun zeigen, auf welche, wol kürzeste Art, die n Bedingungsgleichungen zum Zwecke der Elimination der n Parameter bestimmt werden können

Die Differentiation nach x und y führen wir derart durch, dass im Anfange nur z als abhängig Variabele, a als Constante, dann a als abhängig Variabele, x, y, z aber als Constante angesehen wird. Nach bekannten Sätzen der Differentialrechnung folgt:

Digitized by Google

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{df}{dx}\right)+\frac{\partial f}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial x}=0\\ \left(\frac{df}{dy}\right)+\frac{\partial f}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial y}=0\end{aligned}\right\} \quad 3)$$

Mit Rücksicht auf 2') ist

und

$$\left.\begin{aligned}\frac{df}{dy}=0\\ \frac{df}{dx}=0\end{aligned}\right\} \quad 4)$$

Benutzen wir die angedeutete Art der Differentiation, so erhalten wir, dass diese Ausdrücke neben den ursprünglich Variabelen x, y, z und den Parametern a, a_1, a_2 . . . nur erste Differentialquotienten nach x und y enthalten.

Schreiben wir weiter:

$$\left.\begin{aligned}\frac{df}{dx}=f_1=0\\ \frac{df}{dy}=f_2=0\end{aligned}\right\} \quad 5)$$

und gehen wir mit f_1 und f_2 gerade so vor, wie mit f, so erhalten wir:

$$\left.\begin{aligned}\frac{df_1}{dx}+\frac{\partial f_1}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial x}=0, \quad \frac{df_2}{dx}-\frac{\partial f_2}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial x}=0\\ \frac{df_1}{dy}+\frac{\partial f_1}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial y}=0, \quad \frac{df_2}{dy}+\frac{\partial f_2}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial y}=0\end{aligned}\right\} \quad 6)$$

Eliminiren wir die Grössen $\frac{\partial f_1}{\partial a}$ und $\frac{\partial f_3}{\partial a}$ aus den vier Gleichungen, so finden wir:

$$\frac{\frac{\partial a}{\partial x}}{\frac{\partial a}{\partial y}}=\frac{\frac{df_1}{dx}}{\frac{df_1}{dy}}=\frac{\frac{df_2}{dx}}{\frac{df_2}{dy}} \quad 7)$$

Durch Vereinigung der letzten zwei Gleichungen

$$\frac{df_2}{dx}\frac{df_1}{dy}-\frac{df_2}{dy}\frac{df_1}{dx}=0 \quad 8)$$

welche Differentialgleichung zweiter Ordnung angedeutet werden soll durch das Symbol

$$f_3 = 0$$

Indem wir mit derselben verfahren wie mit der Gleichung 5), finden wir weiter:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial a}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial x} \\ \frac{\partial a}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial y} \end{vmatrix} \qquad 9)$$

welche, mit Gleichung 7) vereinigt, gibt:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial a}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial x} \\ \frac{\partial a}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial x} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial y} \end{vmatrix} \qquad 10)$$

Die Verbindung des zweiten und dritten Teiles mit dem letzten gibt wieder eine Differentialgleichung und zwar der dritten Ordnung

$$\frac{\partial f_2}{\partial x}\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial y}\frac{\partial f_3}{\partial x} = 0 \qquad 11)$$

welche wir symbolisch mit

$$f_4 = 0$$

bezeichnen. Fahren wir in der angedeuteten Art fort, so gelangen wir zu einer n gliederigen Gleichung:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial x} \\ \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial x} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial y} \end{vmatrix} = \cdots = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_n}{\partial x} \\ \frac{\partial f_n}{\partial y} \end{vmatrix} \qquad 12)$$

worin allgemein

$$f_q = \frac{\partial f_{q-1}}{\partial x}\frac{\partial f_p}{\partial y} - \frac{\partial f_{q-1}}{\partial y}\frac{\partial f_p}{\partial x} = 0 \qquad 13)$$

ist und $p < q-1$, wobei $q > 2$ ist.

Man erkennt deutlich f_q als eine Differentialgleichung der $(q-1)$ten Ordnung.

Die Verbindung der Gleichungen 1') und 2') gibt uns $(n+2)$ Gleichungen, aus denen $(n+1)$ Parameter eliminirt werden können. Das Endresultat ist offenbar eine Differentialgleichung $n$ter Ordnung.

Die Fläche also, welche als Umhüllende der erzeugenden Fläche

Digitized by Google

erscheint und $(n+1)$ variabele Parameter enthält, lässt sich somit immer durch eine partielle Differentialgleichung $n$ter Ordnung ausdrücken.

Nun wollen wir die allgemeine Theorie auf specielle Flächenfamilien anwenden. Vor allem untersuchen wir die

§ 9. *Abwickelbaren Flächen.*

Diese erscheinen als Umhüllende einer beweglichen Ebene, welche die Erzeugende enthält.

Die allgemeine Gleichung der Ebene ist:

$$f = ax + by + cz + d = 0 \qquad 1)$$

Dieselbe umfasst vier Parameter, aus welchen sich stets einer durch Division eliminiren lässt. Die Differentialgleichung der abwickelbaren Flächen darf also die zweite Ordnung nicht übersteigen. Tatsächlich finden wir, indem wir nach der vorgegangenen, allgemeinen Theorie bilden:

$$\left.\begin{aligned} f_1 &= \frac{df}{dx} = a + c\,\frac{\partial z}{\partial x} \\ f_2 &= \frac{df}{dy} = b + c\,\frac{\partial z}{\partial y} \end{aligned}\right\} \qquad 2)$$

Berechne man ferner:

$$\left.\begin{aligned} \frac{df_1}{dx} &= c\,\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad \frac{df_1}{\partial y} = c\,\frac{\partial^2 z}{\partial x \,.\, \partial y} \\ \frac{df_2}{dx} &= c\,\frac{\partial^2 z}{\partial x \,.\, \partial y}, \quad \frac{df_2}{dy} = c\,\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \end{aligned}\right\} \qquad 3)$$

und bilde nach dem allgemeinen Verfahren:

$$\frac{\dfrac{df_1}{dx}}{\dfrac{df_1}{dy}} = \frac{c\,\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}}{c\,\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \,.\, \partial y}} = \frac{\dfrac{df_2}{dx}}{\dfrac{df_2}{dy}} = \frac{c\,\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \,.\, \partial y}}{c\,\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}} \qquad 4)$$

woraus sich die resultirende Gleichung ergibt:

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \,.\, \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \qquad 5)$$

welche nach der abgekürzten Bezeichnung von Cauchy übergeht in

$$rt - s^2 = 0 \qquad 6)$$

als die bekannte, partielle Differentialgleichung der abwickelbaren Flächen.

Beispiele.

1) Der elliptische Kegel.

ACB sei ein Teil der elliptischen Leitlinie, *CS* eine Erzeugende. Für den Flächenpunkt *M* mit den Coordinaten x, y, z, auf der Geraden *CS* gelegen, besteht die Relation:

$$\frac{\overline{OM'}}{\overline{OC}} + \frac{\overline{MM'}}{\overline{OS}} = 1 \qquad 1)$$

Nun ist

$$OM' = \sqrt{x^2+y^2}, \qquad MM' = z$$

$$OC = \varrho = \frac{ab\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{b^2x^2+a^2y^2}}, \qquad OC = c$$

und die Gleichung 1) geht über in:

$$\frac{\sqrt{b^2x^2+a^2y^2}}{ab} + \frac{z}{c} = 1$$

oder nach einfacher Umformung resultirt:

$$\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}} + \frac{z}{c} = 0 \qquad 2)$$

die Gleichung des elliptischen Kegels.

Um feststellen zu können, ob die abgeleitete Fläche eine abwickelbare ist, berechnen wir:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= -\frac{cx}{a^2\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}} \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= -\frac{cy}{b^2\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}} \end{aligned}\right\} \qquad 3)$$

Quadriren und addiren wir, so folgt:

$$a^2\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+b^2\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2=c^2 \qquad 4)$$

als partielle Differentialgleichung der Fläche.

Von neuem differentiirt:

$$\left.\begin{aligned} 2a^2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2b^2\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x\,.\,\partial y}=0\\ 2a^2\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x\,.\,\partial y}+2b^2\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0\end{aligned}\right\} \qquad 5)$$

ergibt sich für die zweiten Differentialquotienten:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{b^2}{a^2}\frac{\frac{\partial z}{\partial y}}{\frac{\partial z}{\partial x}}\frac{\partial^2 z}{\partial x\,.\,\partial y}\\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{a^2}{b^2}\frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{\frac{\partial z}{\partial y}}\frac{\partial^2 z}{\partial x\,.\,\partial y}\end{aligned}\right\} \qquad 6)$$

Die beiden Gleichungen mit einander multiplicirt, folgt

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial x\,.\,\partial y}=0 \qquad 7)$$

das Kriterium für abwickelbare Flächen.

Die untersuchte Fläche, der elliptische Kegel, ist also abwickelbar.

2) Astroidalfläche.

Dies ist jene Fläche, welche dadurch erzeugt wird, dass eine Ebene sich derart bewegt, dass die Längen ihrer Spuren, z. B. zwischen der xy und xz Achse constant bleiben. Die Spuren müssen also Tangenten sein an eine Astroide.

Ist P ein Punkt der Fläche, und legt man durch denselben eine Ebene parallel zur yz Coordinatenebene, so ergibt sich als Schnittfigur das Dreieck DEF.

Die Gleichung der Geraden FE ist:

$$\frac{P'D}{DF}+\frac{PP'}{DE}=1 \qquad 1)$$

Nun ist aber:

$$P'D = x, \qquad DF = \sqrt{(l^{2/3} - x^{2/3})^3}$$
$$PP' = z, \qquad DE = \sqrt{(l^{2/3} - x^{2/3})^3}$$

In die Gleichung 1) substituirt, folgt

$$\frac{y+z}{\sqrt{(l^{2/3} - x^{2/3})^3}} = 1$$

oder

$$(y+z)^{2/3} + x^{2/3} = l^{2/3} \qquad 2)$$

als die Gleichung der Astroidalfläche.

Von der Richtigkeit dieser Gleichung kann man sich überzeugen, wenn man dieselbe discutirt.

Ist $x = 0$, so wird

$$y + z = l \ . \ . \ . \ G_1$$

die Gleichung jener Geraden, die sich als Schnitt der Fläche mit der yz Ebene ergibt.

Für $z = 0$ folgt

$$x^{2/3} + y^{2/3} = l^{2/3} \qquad 3)$$

die Gleichung der Astroide in der xyEbene. A_1.

Wird $y = 0$ gesetzt, so ergibt sich:

$$x^{2/3} + z^{2/3} = l^{2/3}$$

die Gleichung der Astroide in der xz Ebene. A_2.

Um zu untersuchen, ob die Astroidalfläche eine abwickelbare ist, gehen wir, wie folgt, vor.

Es sei

$$x^{2/3} + (y+z)^{2/3} - l^{2/3} = 0$$

die Gleichung der Fläche.

Berechnet man die partiellen Differentialquotienten:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= -\left(\frac{y+z}{x}\right)^{1/3} \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= -1 \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= 0 \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \,.\, \partial y} &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad 4)$$

und substituirt dieselben in die charakteristische, partielle Differentialgleichung der abwickelbaren Flächen

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \,.\, \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \qquad 5)$$

so sieht man, dass dieselbe identisch erfüllt wird. Die Astroidalfläche ist also eine abwickelbare Fläche.

3) Exponentialfläche.

Unter diesem Namen soll jene Fläche verstanden werden, deren Entstehung durch folgendes gegeben ist:

Die Tracen der erzeugenden Ebenen sollen stets in der xy Ebene sowie xz Ebene eine Exponentiallinie umhüllen:

$$\left.\begin{aligned} y &= a e^{-k^2 x} \\ z &= b e^{-k^2 x} \end{aligned}\right\} \qquad 1)$$

Wählt man einen Punkt P, durch welchen man eine Ebene z. B. parallel zur yz Ebene führt, so entsteht als Schnitt mit der Fläche das Dreieck DEF, in welchem die Gleichung der Seite EF wird:

$$\frac{P'D}{DF} + \frac{PP'}{DE} = 1 \qquad 2)$$

wobei

$$P'D = y, \qquad DF = a e^{-k^2 x}$$
$$PP' = z, \qquad DE = b e^{-k^2 x}$$

ist. Dies substituirt, folgt

$$\left(\frac{y}{a} + \frac{z}{b}\right) e^{k^2 x} = 1 \qquad 3)$$

als Gleichung der Exponentialfläche.

Die Discussion der Gleichung gibt für $x = 0$

$$\frac{y}{a} + \frac{z}{b} = 1$$

die Gleichung der Schnittgeraden der Fläche mit der yz Ebene in der Segmentenform.

Wird $y = 0$, so ergibt sich die Gleichung der Exponentiallinie in der xz Ebene, nämlich:

$$z = b e^{-k^2 x}$$

Für $z = 0$ resultirt

$$y = a e^{-k^2 x}$$

die Gleichung der Exponentiallinie in der xy Ebene.

Um in der abgeleiteten Fläche eventuell eine abwickelbare Fläche zu erkennen, wollen wir, von der Gleichung der Fläche ausgehend:

$$\left(\frac{y}{a} + \frac{z}{b}\right) e^{k^2 x} - 1 = 0$$

bilden die partiellen Differentialquotienten:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= -bk^2 e^{-k^2 x} \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= -\frac{b}{a} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= -bk^4 e^{-k^2 x} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= 0 \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \,.\, \partial y} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad 5)$$

Wie man leicht entnehmen kann, wird die charakteristische Differentialgleichung der abwickelbaren Fächen:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial x \,.\, \partial y} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \,.\, \partial y} & \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \end{vmatrix} = 0 \quad 6)$$

in aller Strenge erfüllt, d. h. die Exponentialfläche ist eine abwickelbare Fläche.

§ 10. *Rotationsflächen.*

Auch diese wichtige Flächenfamilie kann man auffassen als eine Umhüllungsfläche und zwar von Kugeln. Die Mittelpunkte derselben schreiten auf einer Geraden, der Achse der Rotationsfläche, fort, und ihre Radien nehmen nach einem bestimmten Gesetze zu oder ab.

Die Gleichung der genannten Achse wird, wenn α, β, γ ihre Neigungswinkel sind:

$$\frac{x-x_1}{\cos\alpha} = \frac{y-y_1}{\cos\beta} = \frac{z-z_1}{\cos\gamma} = -m \qquad 1)$$

Die Gleichung der Kugel lautet:

$$f = (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2-r^2 = 0 \qquad 2)$$

in welcher a, b, c noch der Bedingungsgleichung genügen:

$$\frac{a-x_1}{\cos\alpha} = \frac{b-y_1}{\cos\beta} = \frac{c-z_1}{\cos\gamma} = -m \qquad 3)$$

Weil zur Elimination der Parameter a, b, c zu wenig Gleichungen vorliegen, so muss man sich die notwendigen durch partielle Differentiation verschaffen.

Bilde man nach der allgemeinen entwickelten Theorie:

$$\left.\begin{aligned} f_1 &= \frac{df}{dx} = (x-a)+(z-c)\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ f_2 &= \frac{df}{dy} = (y-b)+(z-c)\frac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{aligned}\right\} \qquad 4)$$

hieraus:

$$\frac{x-a}{\frac{\partial z}{\partial x}} = \frac{y-b}{\frac{\partial z}{\partial y}} = \frac{z-c}{-1} = -n \qquad 5)$$

Durch Elimination der Grössen a, b, c aus 3) und 5) mit Hilfe der Grössen m und n folgt:

$$\left.\begin{aligned} n\frac{\partial z}{\partial x}+m\cos\alpha+x-x_1 &= 0 \\ n\frac{\partial z}{\partial y}+m\cos\beta+y-y_1 &= 0 \\ -n+m\cos\gamma+z-z_1 &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad 6)$$

woraus durch Elimination von m und n folgt:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial x}, & \cos\alpha, & x-x_1 \\ \frac{\partial z}{\partial y}, & \cos\beta, & y-y_1 \\ -1, & \cos\gamma, & z-z_1 \end{vmatrix} = 0 \qquad 7)$$

als partielle Differentialgleichung für Rotationsflächen.

Nimmt man die z Achse zur Achse der Rotation, so wird:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha = \frac{\pi}{2} \\ \beta = \frac{\pi}{2} \\ \gamma = 0 \end{array}\right\} \quad \text{ferner} \quad \left.\begin{array}{l} x_1 = 0 \\ y_1 = 0 \\ z_1 = 0 \end{array}\right\} \qquad 8)$$

und die Determinante der Gleichung 7) geht über in

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & 0 & x \\ \frac{\partial z}{\partial y} & 0 & y \\ -1 & 1 & z \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial z}{\partial x} & x \\ 0 & \frac{\partial z}{\partial y} & y \\ 1 & -1 & z \end{vmatrix} = 0 \qquad 9)$$

Hieraus ergibt sich, die Determinante nach der ersten Colonne entwickelt:

$$x \frac{\partial z}{\partial y} - y \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \qquad 10)$$

oder

$$py - qx = 0 \qquad 11)$$

als die partielle Differentialgleichung der Rotationsflächen, für den speciellen Fall, dass die Rotationsachse die z Achse ist.

Beispiele.

1) Rotationshyperboloid.

Mit einem Fache.

Seine Gleichung in Punktcoordinaten lautet:

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad 1)$$

Bestimmen wir die partiellen Differentialquotienten

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{c^2 x}{a^2 z} \\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{c^2 y}{a^2 z} \end{array}\right\} \qquad 2)$$

multipliciren bzhw. mit y und x und subtrahiren, so folgt:

$$y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0 \qquad 3)$$

die partielle Differentialgleichung für Rotationsflächen.

2) Rotationsellipsoid.

Die Gleichung desselben ist:

$$\frac{x^2+y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad 1)$$

Die partiellen Differentialquotienten nach x und y gebildet

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= -\frac{c^2 x}{a^2 z}\\ \frac{\partial z}{\partial y} &= -\frac{c^2 x}{a^2 z}\end{aligned}\right\} \qquad 2)$$

mit y und x respective multiplicirt und subtrahirt, ergibt sich:

$$y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0 \qquad 3)$$

oder

$$\begin{vmatrix} y & \frac{\partial z}{\partial y} \\ x & \frac{\partial z}{\partial x} \end{vmatrix} = 0 \qquad 4)$$

als die Bedingungsgleichung bzhw. charakteristische Determinante der Rotationsflächen.

3) Ringfläche oder Torus.

Die Gleichung dieser Fläche ergibt sich leicht.

Aus der Figur ersieht man:

$$\overline{CP}^2 = \overline{CA}^2 + \overline{PA}^2$$

Substituirt man hierin die Werte der Strecken, so folgt:

$$(r-a)^2 + z^2 = c^2$$

oder auch:

$$(\sqrt{x^2+y^2} - a)^2 + z^2 = c^2$$

oder entwickelt:

$$x^2+y^2-2a\sqrt{x^2+y^2}+z^2+a^2-c^2=0 \qquad 3)$$

als Gleichung des Wulstes in Punktcoordinaten.

Um sich zu überzeugen, ob die vorliegende Fläche eine Rotationsfläche ist, differentiire man partiell nach x und y:

$$\left.\begin{aligned}(\sqrt{x^2+y^2}-a)\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+z\frac{\partial z}{\partial x}&=0\\(\sqrt{x^2+y^2}-a)\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}+z\frac{\partial z}{\partial y}&=0\end{aligned}\right\} \qquad 2)$$

Multiplicirt man das Gleichungssystem 2) bzhw. mit y und x, subtrahirt hiernach, so resultirt:

$$\begin{vmatrix} y & \frac{\partial z}{\partial y} \\ x & \frac{\partial z}{\partial x} \end{vmatrix} = 0 \qquad 3)$$

die Bedingungsgleichung für Rotationsflächen. Der Torus ist somit eine Rotationsfläche.

§ 11. *Beurteilung in krummlinigen Coordinaten.*

Gauss hat in seinem classischen Werke: „Disquisitiones generales circa superficies curvas" als der erste die krummlinigen Coordinaten systematisch angewendet. Seine schöne Methode besteht nun darin, den Bogen irgend einer auf der Fläche gezogenen Curve auszudrücken. Dass dieser Ausdruck ein für jede Flächenfamilie charakteristischer sein wird, ist wol zu erwarten.

Wenn man die Coordinaten eines Flächenpunktes x, y, z als Functionen von u und v ausdrückt, wo u und v die Längen der Coordinatencurven sind, so wird der Ausdruck für den Bogen einer beliebigen, auf der Fläche gezogenen Curve sein:

$$ds^2 = E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2 \qquad 1)$$

wenn unter ds das Bogendifferential dieser Curve verstanden wird, wobei aus

$$ds^2 = dx^2+dy^2+dz^2$$

folgt:

$$\left.\begin{aligned} E &= \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 \\ F &= \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} \\ G &= \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial [\varepsilon}{\partial e}\right)^2 \end{aligned}\right\}$$

Setzt man

$$\sqrt{E} = A, \qquad \sqrt{G} = C, \qquad \frac{F}{\sqrt{GE}} = \cos\alpha$$

so geht die Gleichung 1) über in

$$ds^2 = A^2 du^2 + AC\cos\alpha\, du\, dv + C^2 dv^2 \qquad 2)$$

Sind die Coordinatencurven orthogonal, also

$$\alpha = \frac{\pi}{2}$$

so geht die Gleichung 2) über in

$$ds^2 = A^2 du^2 + C^2 dv^2 \qquad 3)$$

ein Ausdruck, der sich für verschiedene Flächenfamilien charakteristisch unterscheidet.

Wollen wir nun sehen, welche Form der Ausdruck des Bogens annimmt bei

Rotationsflächen.

Die Gleichung der Fläche sei

$$z = f(r) \qquad 1)$$

wenn man voraussetzt, dass man die z Achse zur Achse der Fläche angenommen habe, und wo man unter r die Entfernung eines Punktes von der Achse versteht.

Führt man v als den Meridianwinkel ein, so folgt:

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos v \\ y &= r\sin v \end{aligned}\right\} \qquad 2)$$

Bestimmt man:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

mit Rücksicht auf 1) und 2), so erhält man:

$$ds^2 = dr^2(1+f'^2)+r^2dv^2 \qquad 3)$$

Hier ergeben sich für

$$r = \text{const}$$

die Parallelkreise, für

$$v = \text{const}$$

die Meridiane.

Setzt man

$$dr\sqrt{1+f'^2} = du \qquad 4)$$

so wird r eine Function von u und die Gleichung 3) wird die Form annehmen:

$$ds^2 = du^2+\varphi(u)dv^2 \qquad 5)$$

wobei u der Meridianbogen ist, und v den Bogen im Parallel darstellt.

Das Coordinatensystem ist somit ein System der Krümmungslinien.

Setzt man endlich

$$\frac{du}{\sqrt{\varphi(u)}} = du_1$$

so wird $\varphi(u)$ eine Function $F(u)$ von u, und die Gleichung 5) wird übergehen in

$$ds^2 = F(u_1)[du_1^2+dv^2] \qquad 6)$$

Die Coordinatencurven bilden auf der Rotationsfläche ein Netz isothermischer oder isometrischer Curven, wovon der erste Ausdruck aus der Wärmelehre entlehnt ist, und der zweite von Bonnet stammt.

Beispiele.

1) Der Wulst oder Torus.

Seine Gleichung lautet:

$$(r-a)^2+z^2 = c^2 \qquad 1)$$

wenn man statt $\sqrt{x^2+y^2}$ r setzt.

Nun ist:

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos v \\ y &= r\sin v \\ z &= \sqrt{c^2-(r-a)^2} = f(r) \end{aligned}\right\} \qquad 2)$$

Ferner ist, wie allgemein bestimmt wurde,

$$ds^2 = (1 + f'^2)\,dr^2 + r^2\,dv^2$$

Berechnet man f', indem man die dritte Gleichung des Systems 2) differentiirt, also

$$f' = \frac{-(r-a)}{\sqrt{c^2-(r-a)^2}}$$

so geht ds^2 über in

$$ds^2 = \frac{c^2\,dr^2}{c^2-(r-a)^2} + r^2\,dv^2 \qquad 3)$$

Setzt man

$$du = \frac{-c\,dr}{\sqrt{c^2-(r-a)^2}} \qquad 4)$$

so ergibt sich durch Integration

$$u = c \arccos\frac{r-a}{c} \qquad 5)$$

u bedeutet hier den Meridianbogen; es wird dann

$$u = cw$$

somit

$$w = \frac{u}{c}$$

Bestimmen wir r, so resultirt hiefür

$$r = a + c\cos\frac{u}{c} \qquad 6)$$

Dieser Wert für r ergibt sich direct aus der Figur, denn

$$OA = OC + CA$$

oder

$$r = a + c\cos\frac{u}{c}$$

Setzt man den Ausdruck aus 6) in 3) ein, so folgt:

$$ds^2 = du^2 + \left(a + c\cos\frac{u}{c}\right)^2 dv^2 \qquad 7)$$

Dies ist nun ein Ausdruck für das Bogendifferential, der mit dem allgemeinen für Rotationsflächen

$$ds^2 = du^2 + \varphi(u)\,dv^2$$

im vollsten Einklange steht, denn der Coefficient von dv^2 in unsere Ableitung $\left(a + c\cos\frac{u}{c}\right)$ ist ja tatsächlich eine Function von u.

Regelflächen.

Die erzeugende Gerade sei definirt durch die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} x &= a_1 u + b_1 \\ y &= a_2 u + b_2 \\ z &= a_3 u + b_3 \end{aligned}\right\} \qquad 1)$$

Nimmt man a_1, a_2, a_3 so an, dass

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1$$

ist, und a, b, . . . Functionen von v allein sind, so wird u irgend eine Länge, auf der Erzeugenden aufgetragen, bedeuten und zwar vom Curvenpunkte

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= b_1 \\ y_0 &= b_2 \\ z_0 &= b_3 \end{aligned}\right\} \text{ aus gemessen.}$$

Aus dem Vorhergehenden folgt:

$$ds^2 = du^2 + 2D\,du\,dv + (Au^2 + 2Bu + C)\,dv^2 \qquad 2)$$

worin

$$\left.\begin{aligned} A &= a_1'^2 + a_2'^2 + a_3'^2 \\ B &= a_1' b_1' + a_2' b_2' + a_3' b_3' \\ C &= b_1'^2 + b_2'^2 + b_3'^2 \\ D &= a_1' b_1' + a_2 b_1' + a_3 b_3' \end{aligned}\right\} \qquad 3)$$

Ist die Curve $u = \text{const}$ eine orthogonale Trajectorie, so haben wir den einfachen Ausdruck,

$$ds^2 = u^2 + (Au^2 + 2Bu + C)\,dv^2 \qquad 4)$$

Während also bei den Rotationsflächen das Differential des Bogens gleich war

$$ds^2 = du^2 + \varphi(u)\,dv^2$$

ist hier bei der allgemeinen Regelfläche $\varphi(u)$ ersetzt durch die bestimmte Function zweiten Grades nach v, nämlich

$$Au^2 + 2Bu + C$$

wobei nach vorigem A, B, C Functionen von v sind.

Man kann nun sogar unterscheiden, ob die Regelfläche abwickelbar ist oder nicht. Dieses Unterscheidungsmerkmal liegt in dem Ausdrucke:

$$Au^2 + 2Bu + C$$

Dieser lässt sich auch schreiben als Summe dreier Quadrate und zwar

$$= (a_1' u + b_1')^2 + (a_2' u + b_2')^2 + (a_3' u + b_3')^2 \qquad 5)$$

Dieser Ausdruck muss beständig positiv sein; er wird es vor allem, wenn die Relation stattfindet:

$$B^2 - AC \leqq 0$$

Im ersten Falle können wir durch eine passende Wahl von v den Ausdruck ersetzen durch

$$(u-\alpha)^2 + \beta^2$$

im zweiten durch

$$(u-\alpha)^2$$

Der Bogen kann geschrieben werden und zwar im ersten Falle:

$$ds^2 = du^2 + [(u-\alpha)^2 + \beta^2]\,dv^2 \qquad 6)$$

im zweiten Falle:

$$ds^2 = du^2 + (u-\alpha)^2 dv^2 \qquad 7)$$

Nun wollen wir nachweisen, dass der letztere Ausdruck bei abwickelbaren Flächen sich ergibt, indem sich diese in eine Ebene abwickeln lassen, also developpabel sind. Der letzte Ausdruck lässt sich in zwei Factoren zerlegen, die heissen:

$$\left.\begin{aligned} du + i(u-\alpha)\,dv \\ du - i(u-\alpha)\,dv \end{aligned}\right\} \qquad 8)$$

Multiplicirt man den ersten Factor mit e^{iv}, den zweiten mit e^{-iv}, so sind dies vollständige Differentiale, und man kann setzen:

$$\left.\begin{aligned} [du + i(u-\alpha)\,dv]\,e^{iv} &= dx + i\,dy \\ [du - i(u-\alpha)\,dv]\,e^{-iv} &= dx - i\,dy \end{aligned}\right\} \qquad 9)$$

Multiplicirt man beide Gleichungen, so ergibt sich

$$dx^2 + dy^2 = ds^2$$

woraus wir ersehen, dass der Ausdruck für den Bogen einer Curve auf einer developpablen Fläche mit dem für eine ebene Curve identisch gemacht werden kann.

Beispiele.

Abwickelbare Fläche.

Elliptischer Kegel.

Als die eine Coordinatencurve nehmen wir im vorliegenden Falle eine Erzeugende, so dass für diese

v = const bleibt.

Die zweite Coordinatencurve sei derart gewählt, dass stets

u = const sich ergebe.

Der Punkt M genügt zwei Bedingungen, den Gleichungen zweier durch ihn gehenden Curven:

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}+\frac{z}{c} &= 1 \\ x^2+y^2+(c-z)^2 &= u^2 \end{aligned}\right\} \quad 1)$$

Ferner ist

$$\operatorname{tg} v = \frac{y}{x} \quad 2)$$

Nun muss man x, y, z als Functionen von u und v darstellen.

Aus den zwei ersten Gleichungen folgt:

$$u^2 = \frac{1}{a^2 b^2}\left[a^2(b^2+c^2)\operatorname{tg} v \,.\, x^2 + b^2(a^2+c^2)x^2\right] \quad 3)$$

hieraus

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{a\,b}{\sqrt{b^2(a^2+c^2)+a^2(b^2+c^2)\operatorname{tg}^2 v}}\,u \\ y &= \frac{a\,b\operatorname{tg} v}{\sqrt{b^2(a^2+c^2)+a^2(b^2+c^2)\operatorname{tg}^2 v}}\,u \\ z &= \frac{c\sqrt{b^2+a^2\operatorname{tg}^2 v}}{\sqrt{b^2(a^2+c^2)+a^2(b^2+c^2)\operatorname{tg}^2 v}}\,u - c \end{aligned}\right\} \quad 4)$$

Es ist somit, wenn wir die Erzeugende in der allgemeinen Ableitung berücksichtigen:

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= \frac{a\,b}{\sqrt{b^2(a^2+c^2)+a^2(b^2+c^2)\operatorname{tg}^2 v}} \\ a_2 &= \frac{a\,b\operatorname{tg} v}{\sqrt{b^2(a^2+c^2)+a^2(b^2+c^2)\operatorname{tg}^2 v}} \\ a_3 &= \frac{c\sqrt{b^2+a^2\operatorname{tg}^2 v}}{\sqrt{b^2(a^2+c^2)+a^2(b^2+c^2)\operatorname{tg}^2 v}} \end{aligned}\right\}, \quad \left\{\begin{aligned} b_1 &= 0 \\ b_2 &= 0 \\ b_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad 5)$$

Quadrirt man die Ausdrücke für a und addirt dieselben, so folgt:

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1$$

Der allgemeine Ausdruck für das Bogendifferential in krummlinigen Coordinaten lautet:

$$ds^2 = du^2 + 2D\,du\,dv + (Au^2 + 2Bu + C)\,dv^2$$

Bildet man die Ausdrücke für A, B, C, D, so findet man, dass alle bis auf A null werden. Die Formel geht dann über in

$$ds^2 = du^2 + Au^2\,dv^2 \qquad 6)$$

einen Ausdruck, der mit dem Bogendifferential für abwickelbare Flächen

$$ds^2 = du^2 + (u - \alpha)^2\,dv^2$$

übereinstimmt. Der elliptische Kegel ist somit eine abwickelbare Fläche, wie wir schon früher gesehen haben.

2) Coin conique von Wallis.

Die Erzeugende, für welche $v = \text{const}$ ist, sei die eine Coordinatencurve. Die andere, für welche $u = \text{const}$ ist, ergibt sich als die Schnittcurve der windschiefen Fläche mit einem Cylinder, der senkrecht zur xy Ebene steht und dessen Radius u ist.

Es handelt sich nun darum, die rechtwinkligen Coordinaten x, y, z durch die krummlinigen auszudrücken. Hierzu dienen die Relationen

$$(r^2 - z^2)^2 x^2 - p^2 y^2 = 0 \qquad 1)$$

als Gleichung der Fläche. Ferner ergibt sich aus der Figur unmittelbar:

$$\frac{y}{x} = \frac{\sqrt{r^2 - v^2}}{p} \qquad 2)$$

$$u^2 = x^2 + y^2 \qquad 3)$$

Durch einfache Rechnung ergibt sich:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{p\,u}{\sqrt{p^2 + r^2 - v^2}} \\ y &= \frac{\sqrt{r^2 - v^2}\,u}{\sqrt{p^2 + r^2 - v^2}} \\ z &= v \end{aligned}\right\} \qquad 4)$$

Vergleichen wir die Form dieser Gleichungen der erzeugenden Geraden mit jenen, die in der allgemeinen Ableitung gegeben wurden, so ergibt sich:

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= \frac{p}{\sqrt{p^2+r^2-v^2}} \\ a_2 &= \frac{\sqrt{r^2-v^2}}{\sqrt{p^2+r^2-v^2}} \\ a_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} b_1 &= 0 \\ b_2 &= 0 \\ b_3 &= v \end{aligned}\right\} \qquad 5)$$

Bilden wir die Quadrate von a_1, a_2, a_3 und addiren dieselben, so resultirt:

$$a_1^2+a_2^2+a_3^2=1$$

wie es die allgemeine Theorie verlangt.

Der Ausdruck für das Bogendifferential in krummlinigen Coordinaten ist

$$ds^2 = du^2+2D\,du\,dv+(Au^2+2Bu+C)\,dv^2 \qquad 6)$$

Berechnet man die Ausdrücke für A, B, C, D, so erhält man:

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{p^2v^2}{(r^2-v^2)(p^2+r^2-v^2)} \\ B &= 0 \\ C &= 1 \\ D &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad 7)$$

Da $D=0$ ist, so ist dies ein Zeichen, dass für $u=$ const eine orthogonale Trajectorie sich ergeben müsse, oder dass die eine Coordinatencurve eine orthogonale Trajectorie ist.

Substituiren wir die Werte aus der Gleichung 7) in die Gleichung 6), so erhalten wir:

$$ds^2 = du^2+\left[\frac{p^2r^2u^2}{(r^2-v^2)(p^2+r^2-v^2)}+1\right]dv^2 \qquad 8)$$

Diese Gleichung für das Bogendifferential hat genau jene Form, wie sie sich für nicht abwickelbare Regelflächen ergeben hat, nämlich:

$$ds^2 = du^2+[(u-a)^2+\beta^2]\,dv^2$$

Unsere Fläche ist also, wie wir schon einmal eingesehen haben, eine Regelfläche und, wie aus dem vorliegenden Kriterium folgt, auch nicht abwickelbar.

II. Teil.

Ueber Transformation der Coordinaten.

(Punkt- und Ebenencoordinaten.)

§ 1. *Bedeutung der Ebenen-Coordinaten.*

Um mit Erfolg Transformationen aus Punkt- in Ebenencoordinaten und umgekehrt ausführen zu können, ist es notwendig, die eigentliche Bedeutung, das Wesen der Coordinaten selbst, richtig zu erfassen.

In der Gleichung einer Ebene kommen drei constante, von einander unabhängige Grössen vor, durch deren Angabe die Gleichung und damit auch die Lage der Ebene unzweideutig bestimmt ist. Schreibt man die Gleichung der Ebene etwa in der Form:

$$ux+vy+wz-1=0$$

so sieht man, dass die Lage der Ebene allein von den Grössen u, v, w abhängt, und es werden diese Grössen, die ausreichende Bestimmungsstücke der Ebene bilden, Ebenencoordinaten genannt zum Unterschiede von den gewöhnlich angewandten, die einen Punkt bestimmen und als Punkt- oder Cartesianische Coordinaten bezeichnet werden.

Die Ebenencoordinaten u, v, w haben nun eine ganz bestimmte, einfache geometrische Bedeutung, es sind nämlich die reciproken Abschnitte, welche die Ebene auf den Coordinatenachsen bildet.

Diese Abschnitte lassen sich stets bestimmen, wenn die allgemeine Gleichung der Ebene vorliegt:

$$Ax+By+Cz+D=0 \qquad 1)$$

Denn dividirt man durch $-D$, so ergibt sich:

$$\frac{A}{-D}x+\frac{B}{-D}y+\frac{C}{-D}z-1=0 \qquad 2)$$

eine Gleichung, welche dieselbe Form hat wie Gleichung 1), in welcher die Coefficienten der Punktcoordinaten x, y, z

$$\left.\begin{aligned}\frac{A}{-D}&=u\\ \frac{B}{-D}&=v\\ \frac{C}{-D}&=w\end{aligned}\right\} \qquad 3)$$

die Ebenencoordinaten darstellen.

Durch die vorliegenden Ausdrücke wird man notwendig auf eine einfache Transformation aus Punkt- in Ebenencoordinaten geführt, wenn man bedenkt, dass eine jede Fläche als das Erzeugniss von Punkten in derselben einerseits, anderseits jedoch als Erzeugniss der Tangentialebenen in den betreffenden Punkten erscheint. Die Coordinaten x, y, z sind bekannt, jene der Ebene können aus der Tangentialebene abgeleitet werden.

Wenn wir also

$$f(x, y, z) = 0$$

die Gleichung der Fläche in Punktcoordinaten nennen, so wird

$$F(u, v, w) = 0$$

die Gleichung der Fläche in Ebenencoordinaten heissen.

Hesse hat in seinen „Vorlesungen über analytische Geometrie des Raumes" aus den harmonischen Eigenschaften von Pol und Polare durch sehr verwickelte Reihenentwicklung, indem er schliesslich den Pol einen Punkt der Fläche werden lässt, die homogenen Coordinaten der Tangentialebene der Fläche II. Ordnung mittels der homogenen Punktcoordinaten ausgedrückt. Indem er aber auf einer später erscheinenden, ganz bestimmten Form der Gleichung II. Grades festhält, legt er bei den Werten dieser Coordinaten einen ganz willkürlichen Factor $\frac{1}{2}$ voraus, welcher nicht im geringsten aus dem Zusammenhange der durchgeführten Entwicklung hervorgeht. Ebenso verfährt Hesse bei der Rücktransformation.

Gestützt auf die geometrische Bedeutung der Ebenencoordinaten und die Fläche als das Erzeugniss ihrer Tangentialebenen aufgefasst, wollen wir hier eine Methode einer neuen, rasch ausführbaren Transformation einer allgemeinen Fläche, nicht nur speciell wie Hesse für Flächen II. Ordnung ausführt, entwickeln, welche uns zugleich den Weg anbahnt, den wir bei der Rücktransformation einzuschlagen haben.

§ 2. *Transformation einer in Punktcoordinaten gegebenen Fläche in Ebenencoordinaten.*

Es sei

$$f(x, y, z) = 0 \qquad 1)$$

die Gleichung der Fläche in Punktcoordinaten gegeben. Ihre Tangentialebene in einem bestimmten Punkte (x, y, z) ist:

Digitized by Google

$$(\xi - x)\frac{\partial f}{\partial x} + (\eta - y)\frac{\partial f}{\partial y} + (\zeta - z)\frac{\partial f}{\partial z} = 0 \qquad 2)$$

oder auch aufgelöst geschrieben:

$$\xi\frac{\partial f}{\partial x} + \eta\frac{\partial f}{\partial y} + \xi\frac{\partial f}{\partial z} - \left[x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z}\right] = 0 \qquad 2')$$

Führen wir die Ebenencoordinaten u, v, w ein, welche eine einfache geometrische Bedeutung haben, nämlich die reciproken Werte der Abschnitte, welche die Ebene auf den Coordinatenachsen bildet, so lautet die Gleichung eines Punktes der Tangentialebene in Ebenencoordinaten:

$$\xi u + \eta v + \zeta w - 1 = 0 \qquad 3)$$

Durch Gleichsetzung der correspondirenden Glieder in den Gleichungen 2') und 3) ergeben sich die Werte der Ebenencoordinaten:

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z}} \\ v &= \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z}} \\ w &= \frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z}} \end{aligned}\right\} \qquad 4)$$

Die Coordinaten-Transformation wird nun einfach vollzogen, wenn man aus den Gleichungen:

$$f(x, y, z) = 0$$

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z}} \\ v &= \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z}} \\ w &= \frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z}} \end{aligned}\right\} \qquad 5)$$

Digitized by Google

x, y, z eliminirt, wodurch auch sofort die Gleichung der Fläche in Ebenencoordinaten resultirt:

$$F(u, v, w) = 0$$

Beispiele.

1) Flächen zweiter Ordnung.

Die allgemeine Gleichung der Flächen zweiter Ordnung mit einem Centrum lautet:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1 \qquad 1)$$

Bestimmt man die partiellen Differentialquotienten:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 2Ax \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 2By \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= 2Cz \end{aligned}\right\} \qquad 2)$$

und bildet

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z} = 2$$

so ergeben sich für die Ebenencoordinaten die Werte:

$$\left.\begin{aligned} u &= \tfrac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x} \\ v &= \tfrac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial y} \\ w &= \tfrac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial z} \end{aligned}\right\} \qquad 3)$$

Dies beweist, dass Hesse berechtigt war, in seinen Entwicklungen den Factor $\frac{1}{2}$ zu Hülfe zu nehmen; wie er aber zu dem Factor $\frac{1}{2}$ kommt, ist aus seinen Vorlesungen nicht zu entnehmen.

Setzt man für die partiellen Differentialquotienten in den Gleichungen für die Ebenencoordinaten die Werte ein, so folgt:

$$\left.\begin{aligned} u &= \tfrac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x} = Ax \\ v &= \tfrac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial y} = By \\ w &= \tfrac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial z} = Cz \end{aligned}\right\} \quad 4)$$

Nimmt man ausser diesen Gleichungen noch die der Fläche

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1$$

zu Hilfe, um x, y, z zu eliminiren, so folgt als Eliminationsresultat die Gleichung der Fläche II. Ordnung in Ebenencoordinaten:

$$\frac{u^2}{A} + \frac{v^2}{B} + \frac{w^2}{C} - 1 \quad 5)$$

2) Das einschalige Hyperboloid.

Seine Gleichung ist:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad 1)$$

Berechnet man:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{2x}{a^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{2y}{b^2} \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= -\frac{2z}{c^2} \\ x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z} &= 2 \end{aligned}\right\} \quad 2)$$

Hieraus ergeben sich für die Ebenencoordinaten die Werte:

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{x}{a^2} \\ v &= \frac{y}{b^2} \\ w &= \frac{z}{c^2} \end{aligned}\right\} \quad 3)$$

und schliesslich die Gleichung der Fläche in Ebenencoordinaten:

$$a^2u^2 + b^2v^2 - c^2w^2 = 1 \quad 4)$$

3) Eine Regelfläche.

Ihre Gleichung sei

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-1\right)k\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}+z=0 \qquad 1)$$

Bestimmt man

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}&=\frac{k\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}}{a}+\frac{zy}{(x^2+y^2)\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}}\\ \frac{\partial f}{\partial y}&=\frac{k\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}}{a}+\frac{zx}{(x^2+y^2)\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}}\\ \frac{\partial f}{\partial z}&=1\end{aligned}\right\} \qquad 2)$$

hieraus:

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}=k\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}$$

so ist

$$\left.\begin{aligned}u&=\frac{1}{a}+\frac{zy}{(x^2+y^2)k\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}\right)^2}\\ v&=\frac{1}{b}-\frac{zx}{(x^2+y^2)k\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}\right)^2}\\ w&=\frac{1}{k\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}}\end{aligned}\right\} \qquad 3)$$

Die dritte Gleichung des vorhergehenden Systems lässt sich auch schreiben:

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}=\frac{1}{kw} \quad \text{oder}$$

$$\operatorname{tg}\frac{1}{kw}=\frac{y}{x}$$

Anderseits hat man aber auch:

$$\frac{y}{x}=-\frac{b(au-1)}{a(bv-1)}$$

Aus der Gleichsetzung beider resultirt die Gleichung der Fläche in Ebenencoordinaten:

$$\operatorname{tg}\frac{1}{kw}+\frac{b(au-1)}{a(bv-1)}=0$$

4) Elliptische Schraubenfläche.

Für die Gleichung der Fläche gilt:

$$\left(\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}+1\right)k\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}+z=0 \qquad 1)$$

die partiellen Differentialquotienten gebildet:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}&=\frac{xk\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}}{a^2\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}}-\left(\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}-1\right)\frac{ky}{x^2+y^2}\\
\frac{\partial f}{\partial y}&=\frac{yk\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}}{b^2\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}}+\left(\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}-1\right)\frac{kx}{x^2+y^2}\\
\frac{\partial f}{\partial z}&=1\\
x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}&=k\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}
\end{aligned}\right\} \qquad 2)$$

Berechnet man die Ausdrücke für die Ebenencoordinaten:

$$\left.\begin{aligned}
u&=\frac{x}{a^2\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}}-\frac{\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}-1}{\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}}\frac{y}{x^2+y^2}\\
v&=\frac{y}{b^2\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}}+\frac{\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}-1}{\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}}\frac{x}{x^2+y^2}\\
w&=\frac{1}{k\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}}
\end{aligned}\right\} \qquad 3)$$

Digitized by Google

Aus der dritten Gleichung des Systems 3) ergibt sich:

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \frac{1}{kw}$$

ferner aus 3) durch respective Multiplication mit u und v und durch Addition:

$$ux + vy = \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}$$

$$u + v = \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

und endlich

$$bu + bv \operatorname{tg} \frac{1}{kw} = \sqrt{\frac{b^2}{a^2} + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{kw}} \qquad 4)$$

als die Gleichung der elliptischen Schraubenfläche in Ebenencoordinaten.

Setzt man $a = b$ und reducirt, so erhalten wir:

$$au \cos \frac{1}{kw} + av \sin \frac{1}{kw} = 1 \qquad 5)$$

die Gleichung der Kreisschraubenfläche.

5) Eine Regelfläche mit einer Richtebene.

Die Gleichung der Fläche sei:

$$cx\sqrt{b^2 - z^2} + by - a\sqrt{b^2 - z^2} = 0 \qquad 1)$$

Die partiellen Differentialquotienten

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= c\sqrt{b^2 - z^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= b \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{a - cx}{\sqrt{b^2 - z^2}} z \end{aligned}\right\} \qquad 3)$$

respect. mit x, y, z multiplicirt und addirt, geben:

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{ab^2 - cxz^2}{\sqrt{b^2 - z^2}} \qquad 3)$$

Hieraus die Ebenencoordinaten:

Digitized by Google

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{c(b^2 - z^2)}{vb^2 - cxz^2} \\ a &= \frac{b\sqrt{b^2 - z^2}}{ab^2 - cxz^2} \\ w &= \frac{z(a - cx)}{ab^2 - cxz^2} \end{aligned}\right\} \quad 4)$$

Durch einfache Rechnung folgt:

$$\left.\begin{aligned} z &= \frac{b\sqrt{cv^2 - u^2}}{cv} \\ a - cx &= u\,\frac{c - au}{cv^2 - u^2} \\ ab^2 - cxz^2 &= \frac{b^2u^2}{acv^2} \end{aligned}\right\} \quad 5)$$

Die Werte aus 5) in die Gleichung für w im System 4) substituirt, resultirt:

$$v^2(c - au)^2 - w^2b^2(cv^2 - u^2) = 0! \quad 6)$$

die Gleichung der Regelfläche in Ebenencoordinaten.

6) Flache Schraubenfläche.

Ihre Gleichung in Punktcoordinaten sei:

$$f(x, y, z) = z - \operatorname{arctg}\frac{x}{y} = 0 \quad 1)$$

Bestimmt man

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{cy}{x^2 + y^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= -\frac{cx}{x^2 + y^2} \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= 1 \end{aligned}\right\} \quad 2)$$

so ergibt sich:

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial} + z\frac{\partial f}{\partial z} = z$$

und die Ebenencoordinaten haben die Werte:

Digitized by Google

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{cy}{z(x^2+y^2)} \\ v &= -\frac{cx}{z(x^2+y^2)} \\ w &= \frac{1}{z} \end{aligned}\right\} \qquad 3)$$

Durch einfache Rechnung ergibt sich die Gleichung der Fläche in Ebenencoordinaten:

$$F(u, v, w) = \frac{1}{w} + c \operatorname{arc\,tg} \frac{v}{u} = 0 \qquad 4)$$

§ 3. *Transformation einer in Ebenencoordinaten gegebenen Fläche in Punktcoordinaten.*

Etwas anders gestaltet sich der Vorgang, wenn man aus Ebenencoordinaten zu Punktcoordinaten übergehen will. Aber auch diese bietet keine Schwierigkeiten und wird am einfachsten vollführt, wenn man vorerst die Erzeugungsweise der Flächen durch Ebenen einer genaueren Untersuchung unterwirft.

Bedeuten x, y, z die laufenden Coordinaten der Erzeugungsebene, der Tangentialebene der Fläche, so ist nach Vorhergehendem ihre Gleichung in Punktcoordinaten:

$$xu + yv + zw - 1 = 0 \qquad 1)$$

Um nun durch eine solche Ebene eine Fläche zu erzeugen, müssen wir den Flächenpunkt P mit den Coordinaten x, y, z als Schnittpunkt dreier, unendlich nahen Tangentialebenen uns denken.

Lassen wir u in 1) um Δu sich ändern, während v constant angenommen wird, so wird auch w um Δw sich geändert haben, da es von u abhängig ist. Die Art und Weise dieser Aenderung bedingt den Charakter der Fläche

$$\left.\begin{aligned} (u+\Delta u)x + vy + (w+\Delta w)z - 1 &= 0 \\ ux + vy + wz - 1 &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad 2)$$

Diese beiden Ebenen bestimmen den Schnitt S_1. Dieser aber wäre auch gegeben durch

Digitized by Google

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{[(u+\Delta u)x+vy+(w+\Delta w)z-[ux+vy+wz-1]}{\Delta u}=0 \\ ux+vy+wz-1=0 \end{array}\right\} \quad 3)$$

oder indem man zur Grenze übergeht:

$$\left.\begin{array}{l} ux+vy+wz-1=0 \\ x+\dfrac{\Delta w}{\Delta u}z=0 \end{array}\right\} \quad 4)$$

Durch denselben Ideengang erhalten wir, falls v verändert wird, während u constant bleibt, die zweite, zur ursprünglichen benachbarte Ebene, welche mit derselben den Schnitt S_2 gibt, der gegeben ist durch die Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} ux+vy+wz-1=0 \\ y+\dfrac{\Delta w}{\Delta v}z=0 \end{array}\right\} \quad 5)$$

Die beiden Gleichungen

$$E_1 \ldots x+\frac{\Delta w}{\Delta u}z=0$$

$$E_2 \ldots y+\frac{\Delta w}{\Delta v}z=0$$

stellen Ebenen vor, wovon E_1 durch die y-Achse hindurch geht und die Ebene E nach der Geraden S_1 schneidet; E_2 geht durch die x-Achse und schneidet die Ebene E nach der Geraden S_2.

Lassen wir die Ebenen E_1 und E_2 zur gegebenen Ebene E, der Tangentialebene im Punkte P der Fläche, rücken, so erhalten die Ebenen E_1 und E_2 auch andere Lagen, aber auch die Schnittgeraden S_1 und S_2. Rücken die Ebenen E_1 und E_2 unendlich nahe zur Ebene E, so wird der Schnittpunkt von S_1 und S_2 eben zum Punkte $P(x, y, z)$ der Fläche, die Ebenen E_1 und E_2 ganz bestimmte und zwar:

$$x+\frac{\partial w}{\partial u}z=0 \ldots E_1$$

$$y+\frac{\partial w}{\partial v}z=0 \ldots E_2$$

x, y, z sind die Coordinaten von P, für welchen Punkt nun die Gleichungen bestehen:

Digitized by Google

$$\left.\begin{aligned} ux+vy+wz-1&=0\\ x+\frac{\partial w}{\partial u}z&=0\\ y+\frac{\partial w}{\partial v}z&=0 \end{aligned}\right\} \quad 6)$$

Die Flächenpunkte werden bestimmt je nach der Art der Fläche, welche Bedingung eben durch die Gleichung der Fläche

$$F(u, v, w) = 0 \quad 7)$$

zum Ausdrucke kommt.

Eliminirt man somit aus der Gleichung der Fläche 7) und den Gleichungen 6) u, v, w, so erhalten wir die Beziehung zwischen den Punktcoordinaten x, y, z, gegeben durch

$$f(x, y, z) = 0$$

als Gleichung der Fläche in Punktcoordinaten.

Nicht immer liegt die Gleichung der Fläche

$$f(x, y, z) = 0$$

vor, sondern es sind ganz bestimmte, geometrische Eigenschaften der Fläche, die man benutzen muss, um die Fläche selbst zu erhalten.

In diesem Falle sind es also irgend welche Relationen zwischen den Coordinaten x, y, z, die durch die Erzeugungsart der Fläche bedingt sind, welche vorliegen.

Dann hat man aus diesen und den Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} ux+vy+wz-1&=0\\ x+\frac{\partial w}{\partial u}z&=0\\ y+\frac{\partial w}{\partial v}z&=0 \end{aligned}\right\} \quad 8)$$

die Punktcoordinaten x, y, z zu eliminiren, woraus dann die partielle Differentialgleichung der Fläche sich ergibt in Ebenencoordinaten.

Von diesem Verfahren werden wir auch nützlichen Gebrauch machen, wenn wir die partiellen Differentialgleichungen der Regelflächen und Rotationsflächen in Ebenencoordinaten ableiten werden.

Digitized by Google

Beispiele.

1) Flächen zweiter Ordnung.

Für die Flächen II. Ordnung hat sich die Gleichung in Ebenencoordinaten ergeben:

$$\frac{u^2}{A} + \frac{v^2}{B} + \frac{w^2}{C} = 1 \qquad 1)$$

Differentiirt man partiell nach u und v, so kommt:

$$\frac{u}{A} + \frac{w}{C}\frac{\partial w}{\partial u} = 0$$

$$\frac{v}{B} + \frac{w}{C}\frac{\partial w}{\partial v} = 0$$

Hieraus:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial u} &= -\frac{C}{A}\frac{u}{w} \\ \frac{\partial w}{\partial v} &= -\frac{C}{B}\frac{u}{w} \end{aligned}\right\} \qquad 2)$$

Da nun dem Gleichungssystem

$$\left.\begin{aligned} xu + yv + zw - 1 &= 0 \\ x + z\frac{\partial w}{\partial u} &= 0 \\ y + z\frac{\partial w}{\partial v} &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad 3)$$

genügt werden muss, so substituirt man in dasselbe die Werte aus 2) und erhält:

$$\left.\begin{aligned} xu + yv + zw - 1 &= 0 \\ x - \frac{Cu}{Aw}z &= 0 \\ y - \frac{Cv}{Bw}z &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad 4)$$

Berechnet man u und v aus den zwei letzten Gleichungen des Systems 4), so folgt

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{Ax}{Cz}w \\ v &= \frac{By}{Cz}w \end{aligned}\right\}$$

Digitized by Google

und setzt dieselben in die erste Gleichung desselben Systems, woraus sich ergibt:

$$w = \frac{Cz}{Ax^2 + By^2 + Cz^2}$$

Analog ergeben sich:

$$\left.\begin{aligned} v &= \frac{Bz}{Ax^2 + By^2 + Cz^2} \\ u &= \frac{Ax}{Ax^2 + By^2 + Cz^2} \end{aligned}\right\} \quad 5)$$

Substituirt man diese Werte in die Gleichung 1), so resultirt:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1 \quad 6)$$

als Gleichung der centrischen Flächen II. Ordnung in Punktcoordinaten.

2) Das einschalige Hyperboloid.

Für dieses haben wir durch Transformation die Gleichung in Ebenencoordinaten erhalten:

$$a^2u^2 + b^2v^2 - c^2w^2 = 1 \quad 1)$$

Bestimmt man die partiellen Differentialquotienten

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial u} &= \frac{a^2u}{c^2w} \\ \frac{\partial w}{\partial v} &= \frac{b^2v}{c^2w} \end{aligned}\right\} \quad 2)$$

und substituirt dieselben in die wiederholt angeführten Gleichungen, so ergiebt sich:

$$\left.\begin{aligned} xu + yv + zw - 1 &= 0 \\ x + \frac{a^2u}{c^2w}z &= 0 \\ y + \frac{b^2v}{c^2w}z &= 0 \end{aligned}\right\} \quad 3)$$

Hieraus bestimmt

$$\left.\begin{aligned} u &= -\frac{c^2}{a^2}\frac{x}{z} \\ v &= -\frac{c^2}{b^2}\frac{y}{z} \end{aligned}\right\}$$

und substituirt in die erste Gleichung von 3), folgt:

Digitized by Google

$$w\left(-\frac{c^2}{a^2}\frac{x^2}{z}-\frac{c^2}{b^2}\frac{y^2}{z}+z\right)=1$$

woraus:

$$\left.\begin{aligned} w &= -\frac{\frac{z}{c^2}}{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}} \\ \text{analog:}\quad v &= \frac{\frac{y}{b^2}}{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}} \\ u &= \frac{\frac{x}{a^2}}{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}} \end{aligned}\right\} \quad 4)$$

Diese Werte in 1) eingesetzt, resultirt:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad 5)$$

die Gleichung der Fläche in Punktcoordinaten.

3) Eine Regelfläche mit einer Richtgeraden.

Die Gleichung in Ebenencoordinaten sei:

$$\operatorname{tg}\frac{1}{kw}+\frac{b(au-1)}{a(bv-1)}=0 \qquad 1)$$

Differentiirt man partiell nach u und v, so folgt für die Differentialquotienten:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial u} &= -\frac{bkw^2}{bv-1}\cos^2\frac{1}{kw} \\ \frac{\partial w}{\partial v} &= \frac{b^2(au-1)kw^2}{a(bv-1)}\cos^2\frac{1}{kw} \end{aligned}\right\} \quad 2)$$

Da nun dem Gleichungssystem genügt werden muss:

$$\left.\begin{aligned} ux+vy+wz-1&=0 \\ x+z\frac{\partial w}{\partial u}&=0 \\ y+z\frac{\partial w}{\partial v}&=0 \end{aligned}\right\} \quad 3)$$

so geht dasselbe durch Substitution über in

Digitized by Google

$$\left.\begin{aligned} ux+vy+wz-1&=0\\ x+\frac{bkw^2}{bv-1}\cos^2\frac{1}{kw}&=0\\ y-\frac{b^2(au-1)kw^2}{a(bv-1)^2}\cos^2\frac{1}{kw}&=0 \end{aligned}\right\} \quad 4)$$

Durch Division der zwei letzten Gleichungen ergibt sich:

$$\frac{y}{x}=-\frac{b(au-1)}{a(bv-1)}=\operatorname{tg}\frac{1}{kw} \quad 5)$$

oder auch:

$$\frac{1}{w}=k\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x} \quad 6)$$

Aus 4) folgt:

$$\cos^2\frac{1}{kw}=\frac{x^2}{x^2+y^2} \quad 7)$$

Geht man mit diesen Werten in die Gleichung 5) und reducirt dieselben auf den Quotienten, so kommt:

$$a(bv-1)=-\frac{b(au-1)}{\frac{y}{x}}$$

Durch einfache Rechnung ergeben sich:

$$\left.\begin{aligned} u&=\frac{1}{a}+\frac{y^2}{x^2+y^2}\cdot\frac{1}{k^2\operatorname{arc\,tg}^2\frac{y}{x}}\\ v&=\frac{1}{b}-\left[\frac{x}{ya^2}+\frac{xy}{a^2(x^2+y^2)}\cdot\frac{1}{k^2\operatorname{arc\,tg}^2\frac{y}{x}}\right]\\ w&=\frac{1}{k\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}} \end{aligned}\right\} \quad 8)$$

Substituirt man diese Werte in die erste Gleichung des Systems 4), so folgt:

$$\frac{x}{a}+\frac{xy^2}{x^2+y^2}\cdot\frac{1}{k^2\operatorname{arc\,tg}^2\frac{y}{x}}+\frac{y}{b}-\frac{x}{a^2}+\frac{xy^2}{a^2(x^2+y^2)}\cdot\frac{1}{k^2\operatorname{arc\,tg}^2\frac{y}{x}}+\frac{z}{k\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}}-1=0$$

und durch Reduction geht die Gleichung über in

Digitized by Google

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-1\right) k \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}+z=0$$

die Gleichung der Regelfläche in Punktcoordinaten, welche mit der im ersten Teile abgeleiteten vollständig übereinstimmt.

4) Flache Schraubenfläche.

Ihre Gleichung in Ebenencoordinaten lautet:

$$F(u, v, w)=c \operatorname{arc\,tg} \frac{u}{w}+\frac{1}{w}=0 \qquad 1)$$

Für die partielle Differentiation ergeben sich die Werte:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial u} &= -\frac{cv}{u^2+v^2} w^2 \\ \frac{\partial w}{\partial v} &= \frac{cu}{u^2+v^2} w^2 \end{aligned}\right\} \qquad 2)$$

wo die Gleichungen bestehen müssen:

$$\left.\begin{aligned} ux+vy+wz-1 &= 0 \\ x+z\frac{\partial w}{\partial u} &= 0 \\ y+z\frac{\partial w}{\partial v} &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad 3)$$

Substituirt man hierin die Werte für die partiellen Differentialquotienten, so kommt:

$$\left.\begin{aligned} ux+vy+wz-1 &= 0 \\ x-\frac{cv}{u^2+v^2} w^2 z &= 0 \\ y+\frac{cu}{u^2+v^2} w^2 z &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad 4)$$

Durch einfache Rechnung ergeben sich:

$$\left.\begin{aligned} u &= -\frac{cw^2 zy}{x^2+y^2} \\ v &= \frac{cw^2 zx}{x^2+y^2} \\ w &= \frac{1}{z} \end{aligned}\right\} \qquad 5)$$

Digitized by Google

Für den Quotienten folgt:

$$\frac{u}{v} = -\frac{x}{y} \qquad 6)$$

und substituirt man die Werte aus 6) und 5) in die Gleichung 1), so resultirt die Gleichung der flachen Schraubenfläche in Punktcoordinaten:

$$z - c \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{y} = 0$$

Anmerkung. Conform der gegebenen Theorie der Transformation von Punkt- in Ebenencoordinaten lässt sich die Theorie für die Ueberführung aus Punkt- in Liniencoordinaten und umgekehrt ausführen.

Transformation einer in Punktcoordinaten gegebenen Curve in Liniencoordinaten.

Sei

$$f(x, y) = 0 \qquad 1)$$

die Gleichung einer Curve in Punktcoordinaten,

$$(\xi - x)\frac{\partial f}{\partial x} + (\eta - y)\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \qquad 2)$$

die Gleichung der Tangente in einem bestimmten Punkte $P(x, y)$.

Die Gleichung 2) kann auch geschrieben werden:

$$\xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y} - \left[x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}\right] = 0 \qquad 3)$$

oder auch:

$$x \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}} + y \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}} - 1 = 0 \qquad 4)$$

Die Gleichung einer Geraden in Liniencoordinaten ist:

$$xu + yv - 1 = 0 \qquad 5)$$

wobei u, v die Liniencoordinaten bedeuten. Durch Vergleich der Gleichungen 4) und 5) ergibt sich:

Digitized by Google

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}} \\ v &= \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}} \end{aligned}\right\} \quad 6)$$

Die Coordinaten-Transformation wird nun einfach vollzogen, wenn man aus den Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} f(x, y) &= 0 \\ u &= \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}} \\ v &= \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}} \end{aligned}\right\} \quad 7)$$

x und y eliminirt, wodurch auch sofort die Gleichung der Curve in Liniencoordinaten resultirt:

$$F(u, v) = 0$$

Beispiele.

1) Astroide.

Ihre Gleichung ist:

$$x^{2/3} + y^{2/3} = l^{2/3} \quad 1)$$

Bilde man:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{2}{3}\, x^{-1/3} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{2}{3}\,\frac{1}{y^{1/3}} \end{aligned}\right\} \quad 2)$$

Den Ausdruck

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2}{3}\, l^{2/3} \quad 3)$$

benutzt, gibt:

Digitized by Google

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{1}{x^{1/3} l^{1/3}} \\ v &= \frac{1}{y^{1/3} l^{1/3}} \end{aligned}\right\} \quad 4)$$

woraus

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{1}{u\, l^{2/3}} \\ y &= \frac{1}{v\, l^{2/3}} \end{aligned}\right\} \quad 5)$$

Diese Werte in die Gleichung 1) eingesetzt, folgt die Gleichung der Astroide in Liniencoordinaten:

$$\left(\frac{1}{u}\right)^2 + \left(\frac{1}{v}\right)^2 = l^2 \quad 6)$$

In der Tat folgt diese Gleichung, wenn man das Entstehungsgesetz der Astroide berücksichtigt.

2) Ellipse.

Die Gleichung ist:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad 1)$$

Bildet man:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{2x}{a^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{2y}{b^2} \\ x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} &= 2 \end{aligned}\right\} \quad 2)$$

hieraus:

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{x}{a^2} \\ v &= \frac{y}{b^2} \end{aligned}\right\} \quad 3)$$

so ergeben sich die Punktcoordinaten:

$$\left.\begin{aligned} x &= a^2 u \\ y &= b^2 v \end{aligned}\right\} \quad 4)$$

diese Werte in die Gleichung 1) gesetzt, resultirt die Gleichung der Ellipse in Liniencoordinaten:

$$a^2u^2 + b^2v^2 - 1 = 0 \quad 5)$$

Digitized by Google

Transformation einer in Liniencoordinaten gegebenen Curve in Punktcoordinaten.

Es sei

$$F(u, v) = 0 \qquad 1)$$

die Gleichung der Curve in Liniencoordinaten. Die Gleichung der die Curve erzeugenden Geraden, Tangente liege vor:

$$xu + yv - 1 = 0 \qquad 2)$$

Die Punkte der Curve sind aufzufassen als Schnittpunkte zweier unendlich nahen Tangenten. Die Gleichungen derselben werden sein:

$$\left.\begin{array}{ll} T & xu + yv - 1 = 0 \\ T_1 & x(u+\Delta u) + y(v+\Delta v) - 1 = 0 \end{array}\right\} \qquad 3)$$

oder auch:

$$\left.\begin{array}{r} xu + yv - 1 = 0 \\ \dfrac{[x(u+\Delta u) + y(v+\Delta v) - 1] - [xu + vy - 1]}{\Delta u} = 0 \end{array}\right\} \qquad 4)$$

oder endlich:

$$\left.\begin{array}{r} xu + yv - 1 = 0 \\ x + y\dfrac{\partial v}{\partial u} = 0 \end{array}\right\} \qquad 5)$$

Die Gleichung

$$T_1 \qquad x + y\frac{\partial v}{\partial u} = 0$$

stellt eine Gerade dar, die durch den Coordinatenanfangspunkt geht. Der Schnitt derselben mit der Tangente T gibt einen Punkt P der Curve. Die aufeinanderfolgenden Schnitte der Geraden T und T_1 erzeugen die Curve.

Eliminirt man aus den Gleichungen

$$\left.\begin{array}{r} F(u, v) = 0 \\ xu + vy - 1 = 0 \\ x + y\dfrac{\partial v}{\partial u} = 0 \end{array}\right\} \qquad 6)$$

die Liniencoordinaten u, v, so ergibt sich die Gleichung in Punktcoordinaten:

$$f(xy) = 0$$

Digitized by Google

Beispiele.

1) Astroide.

Ihre Gleichung in Liniencoordinaten sei:

$$\left(\frac{1}{u}\right)^2 + \left(\frac{1}{v}\right)^2 = l^2 \qquad 1)$$

Bildet man

$$\frac{\partial v}{\partial u} = -\frac{v^3}{u^3}$$

so hat man die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} xu + vy - 1 &= 0 \\ x - \frac{v^3}{u^3} y &= 0 \\ \left(\frac{1}{u}\right)^2 + \left(\frac{1}{v}\right)^2 &= l^2 \end{aligned}\right\} \qquad 2)$$

aus welchen u und v zu eliminiren sind. Nach einer einfachen Rechnung folgt:

$$(x + y^{2/3} x^{1/3})^2 + (x^{2/3} y^{1/3} + y)^2 = l^2$$

und entwickelt:

$$x^{2/3} + y^{2/3} = l^{2/3}$$

Gleichung der Astroide in Punktcoordinaten.

2) Ellipse.

Die Gleichung in Liniencoordinaten ist:

$$a^2 u^2 + b^2 v^2 - 1 = 0 \qquad 1)$$

Den partiellen Differentialquotienten gebildet, gibt:

$$\frac{\partial v}{\partial u} = -\frac{a^2 u}{b^2 v} \qquad 2)$$

Zur weiteren Rechnung hat man dann das Gleichungssystem:

$$\left.\begin{aligned} ux + vy - 1 &= 0 \\ x - \frac{a^2 u}{b^2 v} y &= 0 \\ a^2 u + b^2 v - 1 &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad 3)$$

aus welchem u und v zu eliminiren sind. Es ergeben sich:

Digitized by Google

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{\frac{x^2}{a^3}}{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}} \\ v &= \frac{\frac{y^2}{b^2}}{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}} \end{aligned}\right\} \quad 4)$$

und in die Gleichung 1) substituirt:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad 5)$$

Gleichung der Ellipse in Punktcoordinaten.

III. Teil.

Behandlung des Thema in Ebenencoordinaten.

§ 1. *Abwickelbare Flächen.*

Die abwickelbaren Flächen werden durch eine sich bewegende Ebene erzeugt, deren Gleichung sei:

$$ux+vy+wz-1=0 \quad 1)$$

u, v, w sind an folgende Relationen gebunden:

$$\left.\begin{aligned} \frac{v}{u} &= \psi(\alpha) \\ \frac{w}{u} &= \chi(\alpha) \end{aligned}\right\} \quad 2)$$

wobei α ein veränderlicher Parameter ist. Aus 2) ergibt sich:

$$w = u\varphi\left(\frac{v}{u}\right) \quad 3)$$

welche Gleichung als Functionalgleichung der abwickelbaren Flächen in Ebenencoordinaten bezeichnet werden kann.

Zur Elimination der Function φ differentiire man 3) partiell nach u und v, dann kommt:

Digitized by Google

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial u} &= -\frac{v}{u}\varphi'\left(\frac{v}{u}\right)+\varphi\left(\frac{v}{u}\right) \\ \frac{\partial w}{\partial v} &= \varphi'\left(\frac{v}{u}\right) \end{aligned}\right\} \qquad 4)$$

Ein zweitesmal differentiirt, erhält man:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} &= \frac{v}{u^2}\varphi'\left(\frac{v}{u}\right)+\frac{v^2}{u^3}\varphi''\left(\frac{v}{u}\right)-\frac{v}{u^2}\varphi'\left(\frac{v}{u}\right) \\ \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} &= \frac{v^2}{u^3}\varphi''\left(\frac{v}{u}\right) \\ \frac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial v} &= -\frac{v}{u^2}\varphi''\left(\frac{v}{u}\right) \\ \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} &= \frac{1}{u}\varphi''\left(\frac{v}{u}\right) \end{aligned}\right\} \qquad 5)$$

Nach erfolgter Elimination von φ'' aus der Gleichung 5) folgt:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}\,\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}-\left(\frac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial v}\right)^2=0 \qquad 6)$$

oder in Determinantenform:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial u^2}, & \frac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial v} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial v}, & \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} \end{vmatrix}=0 \qquad 7)$$

als die partielle Differentialgleichung der abwickelbaren Flächen.

Beispiele.

1) Astroidalfläche.

Schon aus der Erzeugungsweise der Fläche lassen sich dircet zwei Gleichungen aufstellen, welche zwischen den Ebenencoordinaten herrschen.

Aus der Figur sieht man, dass die Gleichungen bestehen müssen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{u^2}+\frac{1}{v^2} &= l^2 \\ w &= v \end{aligned}\right\} \qquad 1$$

Digitized by Google

Gleichung der Astroidalfläche in Ebenencoordinaten. Bildet man die partiellen Differentialquotienten:

$$\left.\begin{array}{ll} \frac{\partial w}{\partial v} = 1 & \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} = 0 \\ \frac{\partial^2 w}{\partial v\, \partial u} = 0 & \end{array}\right\} \quad 2)$$

so sieht man, dass die Bedingungsgleichung für abwickelbare Flächen

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial v\, \partial u}\right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial u^2}\,\frac{\partial^2 w}{\partial v^2} = 0$$

identisch erfüllt wird, die Atroidalfläche also eine abwickelbare Fläche ist.

2) Exponentialfläche.

Für diese Fläche ergeben sich in Ebenencoordinaten die zusammengehörigen Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} v = \frac{u}{k^2 a}\, e^{\frac{k^2}{u} - 1} \\ av = bw \end{array}\right\} \quad 1)$$

Bestimmt man die Differentialquotienten:

$$\left.\begin{array}{ll} \frac{\partial w}{\partial v} = \frac{b}{a}, & \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} = 0 \\ \frac{\partial^2 w}{\partial u\, \partial v} = 0 & \end{array}\right\} \quad 2)$$

so ist ersichtlich, dass das Kriterium der abwickelbaren Flächen befriedigt wird.

Die Exponentialfläche ist daher eine abwickelbare Fläche.

§ 2 *Rotationsflächen.*

Seien auch hier

$$\left.\begin{array}{ll} E_1 \ldots & ux + vy + wz - 1 = 0 \\ E_2 \ldots & x + z\frac{\partial w}{\partial u} = 0 \\ E_3 \ldots & y + z\frac{\partial w}{\partial v} = 0 \end{array}\right\} \quad 1)$$

Digitized by Google

die Gleichungen der Tangentialebene E der Fläche im Punkte x, y, z und die Gleichungen der den Flächenpunkt bestimmenden Grenzebenen E_1 und E_2.

Aus den zwei letzten Gleichungen des Systems 1) erhalten wir:

$$\left.\begin{aligned} x &= -z\,\frac{\partial w}{\partial u} \\ y &= -z\,\frac{\partial w}{\partial v} \end{aligned}\right\} \qquad 2)$$

Quadrirt und addirt folgt:

$$x^2+y^2 = z^2\left[\left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial v}\right)^2\right] \qquad 3)$$

Da in Punktcoordinaten für Rotationsflächen mit der z Achse als Rotationsachse

$$x^2+y^2 = \psi(z)$$

die Functionalgleichung ist, so folgt aus Vorigem:

$$\left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial v}\right)^2 = \varphi(z) \qquad 4)$$

oder wenn man die erste Gleichung noch zu Hülfe nimmt:

$$\left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial v}\right)^2 = \varphi\left[\frac{1}{w-u\,\frac{\partial w}{\partial u}-v\,\frac{\partial w}{\partial v}}\right] \qquad 5)$$

Um die willkürliche Function φ wegschaffen zu können, differentiiren wir partiell nach u und v die Gleichung 5):

$$2\left(\frac{\partial w}{\partial u}\,\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+2\,\frac{\partial w}{\partial v}\,\frac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial v}\right) = -\varphi'\,\frac{-u\,\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}-v\,\frac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial v}}{\left(w-u\,\frac{\partial w}{\partial u}-v\,\frac{\partial w}{\partial v}\right)^2}$$

also:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial u}\,\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+\frac{\partial w}{\partial v}\,\frac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial v} &= \tfrac{1}{2}\varphi'\,\frac{u\,\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+v\,\frac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial v}}{\left(w-u\,\frac{\partial w}{\partial u}-v\,\frac{\partial w}{\partial v}\right)^2} \\ \frac{\partial w}{\partial u}\,\frac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial v}+\frac{\partial w}{\partial v}\,\frac{\partial^2 w}{\partial v^2} &= \tfrac{1}{2}\varphi'\,\frac{u\,\frac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial v}+v\,\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}}{\left(w-u\,\frac{\partial w}{\partial u}-v\,\frac{\partial w}{\partial v}\right)^2} \end{aligned}\right\} \qquad 6)$$

Digitized by Google

Durch Division der beiden Gleichungen des Systems 6) fällt der Ausdruck $\frac{\varphi'}{2\left(w - u\frac{\partial w}{\partial u} - v\frac{\partial w}{\partial v}\right)^2}$ weg, es ist also die willkürliche Function φ eliminirt.

Das Eliminationsresultat kann in Form einer Determinante geschrieben werden:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial v}, & \frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial v} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial^2 w}{\partial v^2} \\ u\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + v\frac{\partial^2 w}{\partial v\,\partial u}, & u\frac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial v} + v\frac{\partial^2 w}{\partial v^2} \end{vmatrix} = 0 \qquad 6)$$

welche ein Product zweier Determinanten ist:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial w}{\partial u}, & \frac{\partial w}{\partial v} \\ u, & v \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial u^2}, & \frac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial v} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial v}, & \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} \end{vmatrix} = 0 \qquad 8)$$

Die Bedingungsgleichung 7) zerfällt daher in

$$\left.\begin{array}{ll} \text{a)} & \begin{vmatrix} \frac{\partial w}{\partial u}, & \frac{\partial w}{\partial v} \\ u, & v \end{vmatrix} = 0 \\ \text{b)} & \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial u^2}, & \frac{\partial^2 w}{\partial v\,\partial u} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial v}, & \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} \end{vmatrix} = 0 \end{array}\right\} \qquad 9)$$

Stellen wir uns nun die Frage: sind die beiden Gleichungen des Systems 9) Bedingungsgleichungen für Rotationsflächen, sind immer beide erfüllt oder nicht, welcher besonderer Fall ergibt sich, wenn nur eine der beiden erfüllt wird?

Nur die Gleichung 9) a) ist eine Bedingungsgleichung für Rotationsflächen, ihr muss stets genügt werden. Die zweite Gleichung des Systems 9) ist, wie wir früher abgeleitet haben, das Kriterium für abwickelbare Flächen, sie braucht also im allgemeinen nicht erfüllt zu sein, wird sie aber befriedigt, so ist die betreffende Rotationsfläche auch eine abwickelbare Fläche (Kreiskegel, Kreiscylinder.)

Digitized by Google

Beispiele.

1) Rotationshyperboloid mit einem Fache.

Seine Flächengleichung kann geschrieben werden:

$$w^2 = \frac{1}{c^2}\left[1 - a^2u^2 - a^2v^2\right] \qquad 1)$$

Die partiellen Differentialquotienten gebildet:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial u} &= \frac{1}{c}\,\frac{a^2u^2}{(a^2u^2+a^2v^2-1)^{1\cdot 2}} \\ \frac{\partial w}{\partial v} &= \frac{1}{c}\,\frac{a^2v^2}{(a^2u^2+a^2v^2-1)^{1\cdot 2}} \end{aligned}\right\} \qquad 2)$$

Multiplicirt man resp. mit v und u und subtrahirt, so folgt:

$$v\,\frac{\partial w}{\partial u} - u\,\frac{\partial w}{\partial v} = 0 \qquad 3)$$

ein Zeichen, dass die behandelte Fläche eine Rotationsfläche ist

2) Rotationsellipsoid.

Die Gleichung dieser Fläche in Ebenencoordinaten ist:

$$a^2(u^2+v^2)+c^2w^2 = 1 \qquad 1)$$

Differentiirt man partiell nach u und v:

$$\left.\begin{aligned} a^2u + c^2w\,\frac{\partial w}{\partial u} &= 0 \\ a^2v + c^2w\,\frac{\partial w}{\partial v} &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad 2)$$

und multiplicirt bzhw. mit v und u, so ergibt sich durch Subtraction

$$\begin{vmatrix} u, & v \\ \frac{\partial w}{\partial u}, & \frac{\partial w}{\partial v} \end{vmatrix} = 0 \qquad 3)$$

die partielle Differentialgleichung der Rotationsflächen.

3) Wulst oder Torus.

Für diese Fläche erhält man in Ebenencoordinaten die Gleichung:

$$c^2(u^2+v^2+w^2) - (1 - a\sqrt{u^2+v^2})^2 = 0 \qquad 1)$$

Digitized by Google

Setzt man hierin $a = 0$, so erhält man:

$$c^2(u^2+v^2+w^2) = 1$$

die Gleichung der Kugel, wie es sein muss.

Um zu entscheiden, ob die Gleichung der Bedingung der Rotationsflächen entspricht, bilde man:

$$\left.\begin{aligned} 2c^2u + 2w\frac{\partial w}{\partial u} + 2(1 - a\sqrt{u^2+v^2})\frac{au}{\sqrt{u^2+v^2}} &= 0 \\ 2cv + 2w\frac{\partial w}{\partial v} + 2(1 - a\sqrt{u^2+v^2})\frac{av}{\sqrt{u^2+v^2}} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad 2)$$

Multiplicirt man resp. mit v und u und subtrahirt, so resultirt:

$$v\frac{\partial w}{\partial u} - u\frac{\partial w}{\partial v} = 0 \qquad 3)$$

das Kriterium der Rotationsflächen; der Torus ist somit eine Rotationsfläche.

§ 3. *Regelflächen.*

Die Regelflächen sind Erzeugnisse einer nach irgend einem Gesetze sich bewegenden Geraden. Es seien:

$$\left.\begin{aligned} x &= az + \alpha \\ y &= bz + b \end{aligned}\right\} \qquad 1)$$

die Gleichungen der erzeugenden Geraden, wobei a, b, α, β willkürliche Functionen eines veränderlichen Parameters θ sind.

Die Gleichungen der Tangentialebene und der Grenzebenen seien:

$$\left.\begin{aligned} ux + vy + wz - 1 &= 0 \\ x + \frac{\partial w}{\partial u}z &= 0 \\ y + \frac{\partial w}{\partial v}z &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad 2)$$

Eliminirt man x, y, z aus 1) und 2), so ergibt sich:

$$w - u\frac{\partial w}{\partial u} - v\frac{\partial w}{\partial v} = -\frac{a + \frac{\partial w}{\partial u}}{\alpha} = -\frac{b + \frac{\partial w}{\partial v}}{\beta} \qquad 3)$$

Daraus:

Digitized by Google

$$\left.\begin{aligned} w - u\frac{\partial w}{\partial u} - v\frac{\partial w}{\partial v} + \frac{1}{\alpha}\left(a + \frac{\partial w}{\partial u}\right) = 0 \\ w - u\frac{\partial w}{\partial u} - v\frac{\partial w}{\partial v} + \frac{1}{\beta}\left(b + \frac{\partial w}{\partial v}\right) = 0 \end{aligned}\right\} \quad 4)$$

Führt man statt:

$$\frac{1}{\alpha},\quad \frac{1}{\beta},\quad \frac{a}{\alpha},\quad \frac{b}{\beta}$$

willkürliche Functionen des Parameters θ ein, so ergibt sich:

$$\left.\begin{aligned} w - u\frac{\partial w}{\partial u} - v\frac{\partial w}{\partial v} + \lambda(\theta)\frac{\partial w}{\partial u} + \mu(\theta) = 0 \\ w - u\frac{\partial w}{\partial u} - v\frac{\partial w}{\partial v} + \varphi(\theta)\frac{\partial w}{\partial v} + \psi(\theta) = 0 \end{aligned}\right\} \quad 5)$$

Differentiirt man partiell nach u und v die erste, so folgt:

$$\left.\begin{aligned} -u\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} - v\frac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial v} + \lambda\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + \left(\lambda'\frac{\partial w}{\partial u} + \mu'\right)\frac{\partial\theta}{\partial u} = 0 \\ -u\frac{\partial^2 w}{\partial v^2} - v\frac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial v} + \lambda\frac{\partial^2 w}{\partial v^2} + \left(\lambda'\frac{\partial w}{\partial v} + \mu'\right)\frac{\partial\theta}{\partial v} = 0 \end{aligned}\right\} \quad 6)$$

dann nach u und v die zweite Gleichung von 5):

$$\left.\begin{aligned} -u\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} - v\frac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial v} + \varphi\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + \left(\varphi'\frac{\partial w}{\partial v} + \psi'\right)\frac{\partial\theta}{\partial u} = 0 \\ -u\frac{\partial^2 w}{\partial v^2} - v\frac{\partial^2 w}{\partial v^2} + \varphi\frac{\partial^2 w}{\partial v^2} + \left(\varphi'\frac{\partial w}{\partial v} + \psi'\right)\frac{\partial\theta}{\partial v} = 0 \end{aligned}\right\} \quad 7)$$

wenn man die zweite Gleichung des Systems 5) benutzt.

Durch Division von 6) und 7) ergibt sich:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\theta}{\partial u} : \frac{\partial\theta}{\partial v} &= \frac{u\dfrac{\partial^2 w}{\partial u^2} + v\dfrac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial v} - \lambda\dfrac{\partial^2 w}{\partial u^2}}{u\dfrac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial v} + v\dfrac{\partial^2 w}{\partial v^2} - \lambda\dfrac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial v}} \\ &= \frac{u\dfrac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial v} + v\dfrac{\partial^2 w}{\partial v^2} - \varphi\dfrac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial v}}{u\dfrac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial v} + v\dfrac{\partial^2 w}{\partial v^2} - \varphi\dfrac{\partial^2 w}{\partial v^2}} \end{aligned}\right\} \quad 8)$$

Setzt man die beiden Brüche einander gleich, reducirt entsprechend, so erhält man:

Digitized by Google

$$\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial v}\right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial u^2}\,\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\right](v\lambda + u\varphi - \varphi\lambda) = 0 \qquad 9)$$

Diese Gleichung wäre befriedigt, falls der erste Factor

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial v}\right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial u^2}\,\frac{\partial^2 w}{\partial v^2} = 0$$

wäre; dies ist aber die Bedingungsgleichung für die abwickelbaren Flächen.

Jedenfalls wird die resultirende Gleichung 9) befriedigt, wenn der zweite Factor null ist, also:

$$v\lambda + u\varphi - \varphi\lambda = 0 \qquad 10)$$

Differentiirt man diese Gleichung partiell nach u und v:

$$\left.\begin{aligned} v\lambda'\frac{\partial\theta}{\partial u} + \varphi + u\varphi'\frac{\partial\theta}{\partial u} - \varphi'\lambda\frac{\partial\theta}{\partial u} - \varphi\lambda'\frac{\partial\theta}{\partial u} = 0 \\ \lambda + v\lambda'\frac{\partial\theta}{\partial v} + u\varphi'\frac{\partial\theta}{\partial v} - \varphi'\lambda\frac{\partial\theta}{\partial v} - \varphi\lambda'\frac{\partial\theta}{\partial v} = 0 \end{aligned}\right\} \qquad 11)$$

multiplicirt man die obere mit $\frac{\partial\theta}{\partial v}$, die untere mit $\frac{\partial\theta}{\partial u}$ und subtrahirt, so folgt die Bedingung:

$$\varphi\frac{\partial\theta}{\partial v} - \lambda\frac{\partial\theta}{\partial u} = 0 \qquad 12)$$

Anderseits geht aus der Doppelgleichung 8) hervor:

$$\frac{\partial\theta}{\partial u}\left[\varphi\frac{\partial^2 w}{\partial v^2} - \lambda\frac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial v}\right] - \frac{\partial\theta}{\partial v}\left[\psi\frac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial v} - \lambda\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}\right] = 0 \qquad 13)$$

Eliminirt man aus 12) und 13) $\frac{\partial\theta}{\partial u} : \frac{\partial\theta}{\partial v}$, so bekommt man:

$$\frac{\varphi}{\lambda} = \frac{\varphi\dfrac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial v} - \lambda\dfrac{\partial^2 w}{\partial u^2}}{\varphi\dfrac{\partial^2 w}{\partial v^2} - \lambda\dfrac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial v}}$$

oder

$$F = \varphi^2\frac{\partial^2 w}{\partial v^2} - \varphi\lambda\frac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial v} + \lambda^2\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} = 0 \qquad 14)$$

Wir haben hier eine Function von u, v und θ, nämlich

Digitized by Google

$$F(u, v, \theta) = 0$$

wobei u und v die unabhängig Variabelen sind. Wenn man differentiirt, so folgt:

$$\left.\begin{aligned} \varphi^2 \frac{\partial^3 w}{\partial u\, \partial v^2} - 2\varphi\lambda \frac{\partial^3 w}{\partial u^2\, \partial v} + \lambda^2 \frac{\partial^3 w}{\partial u^3} + \frac{\partial F}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial u} = 0 \\ \varphi^2 \frac{\partial^3 w}{\partial v^3} - 2\varphi\lambda \frac{\partial^3 w}{\partial u\, \partial v^2} + \lambda^2 \frac{\partial^3 w}{\partial u^2\, \partial v} + \frac{\partial F}{\partial \theta}\frac{d\theta}{dv} = 0 \end{aligned}\right\} \quad 15)$$

Multiplicirt man die erste mit λ, die zweite mit φ und subtrahirt, indem man die Gleichung 12) berücksichtigt, so ergibt sich nach einfacher Reduction:

$$\lambda^3 \frac{\partial^3 w}{\partial u^3} - 3\lambda^2\varphi \frac{\partial^3 w}{\partial u^2\, \partial v} + 3\lambda\varphi^2 \frac{\partial^3 w}{\partial u\, \partial v^2} - \varphi^3 \frac{\partial^3 w}{\partial v^3} = 0 \qquad 16)$$

Sowohl Gleichung 16) als 14) sind nach λ und φ homogen, es lassen sich somit beide, λ und φ, daraus eliminiren.

Das Eliminationsresultat ist eine partielle Differentialgleichung III. Ordnung und stellt uns das Kriterium für die Regelflächen dar.

Als Beispiel zur allgemeinen Regelfläche wollen wir behandeln:

Das einschalige Hyperboloid.

Die Flächengleichung in Ebenencoordinaten ist:

$$a^2u^2 + b^2v^2 - c^2w^2 = 1 \qquad 1)$$

Bestimmt man die partiellen Differentialquotienten:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial u} &= \frac{a^2 u}{c^2 w} \\ \frac{\partial w}{\partial v} &= \frac{b^2 v}{c^2 w} \end{aligned}\right\} \quad 2)$$

ferner die zweiten Ableitungen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} &= \frac{a^2(b^2v^2 - 1)}{c^4 w^3} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} &= \frac{b^2(a^2u^2 - 1)}{c^4 w^3} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial u\, \partial v} &= -\frac{a^2 b^2\, uv}{c^4\, w^3} \end{aligned}\right\} \quad 3)$$

auch die dritten Derivirten:

Digitized by Google

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial^3 w}{\partial u^3} &= -\frac{3a^4}{c^6}\,\frac{b^2v^2-1}{w^5}\,u \\
\frac{\partial^3 w}{\partial v^3} &= -\frac{3b^4}{c^6}\,\frac{a^2u^2-1}{w^5}\,v \\
\frac{\partial^3 w}{\partial u^2\,\partial v} &= \frac{a^2b^2}{c^6}\,\frac{2a^2u^2-(b^2v^2-1)}{w^5}\,v \\
\frac{\partial^3 w}{\partial u\,\partial v^2} &= \frac{a^2b^2}{c^6}\,\frac{2b^2v^2-(a^2u^2-1)}{w^5}\,u
\end{aligned}\right\} \quad 4)$$

Die Bedingungsgleichung für allgemeine Regelflächen ergibt sich, wie wir in der allgemeinen Ableitung gesehen haben, durch Elimination von λ und φ aus den Gleichungen 14) und 16). Setzen wir in diesen

$$\varphi = \lambda A$$

so gehen dieselben über in:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} - 2A\,\frac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial v} + A^2\,\frac{\partial^2 w}{\partial v^2} = 0$$

$$\frac{\partial^3 w}{\partial u^3} - 3A\,\frac{\partial^3 w}{\partial u^2\,\partial v} + 3A^2\,\frac{\partial^3 w}{\partial u\,\partial v^2} - 3A^3\,\frac{\partial^3 w}{\partial v^3} = 0$$

aus welchen durch Elimination von A sich das Kriterium ergibt.

Substituiren wir hierin die berechneten Differentialquotienten, so haben wir:

$$\frac{1}{c^4 w^3}\left[(b^2v^2-1)a^2 + 2Aa^2b^2uv + A^2b^2(a^2u^2-1)\right] = 0 \qquad 5)$$

$$-\frac{3}{c^6 w^5}\left[a^4(b^2v^2-1)u + a^2b^2A[2a^2u^2-(b^2v^2-1)]v\right.$$
$$\left. - a^2b^2A^2[2b^2v^2-(a^2u^2-1)]u - A^3b^4(a^2u^2-1)v\right] = 0 \qquad 6)$$

Die Gleichung 6) kann aber auch geschrieben werden in der Form:

$$-\frac{3}{c^6 w^6}\left[(b^2v^2-1)a^2 + 2Aa^2b^2uv + A^2b^2(a^2u^2-1)\right] \cdot$$
$$\cdot\left[a^2u - Ab^2v\right] = 0 \qquad 7)$$

Die erste Klammergrösse ist aber die Gleichung 5). Der allgemeinen Gleichung wird genügt, das behandelte Hyperboloid ist somit eine Regelfläche.

Digitized by Google

§ 4. *Regelflächen mit einer Richtungsgeraden.*

Nimmt man die z Achse als Richtlinie, ist M ein Punkt der Fläche, so ist für jede Tangentialebene z. B. für die durch MP gehende

$$w = f_1(\theta)$$

wobei

$$\theta = \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}$$

ist. Nun ist hieraus

$$\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

und somit

$$\operatorname{tg} i = \frac{z - z_0}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

eine, natürlich willkürliche Function $\varphi(\theta)$, folglich ist, wenn man

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{x}{\cos\theta}$$

einsetzt, auch

$$\frac{z - z_0}{x} = \psi(\theta)$$

Die Gleichung der Tangentialebene, die durch M und P geht, ist:

$$(x - 0)u + (y - 0)v + (z - z_0)w = 0 \qquad 1)$$

woraus:

$$u - \frac{y}{x}v + \frac{z - z_0}{x}w = 0 \qquad 2)$$

Setzt man hierin die obigen Werte ein, so erhält man:

$$u + \operatorname{tg}\theta \cdot v + \psi(\theta)\ w = 0 \qquad 3)$$

Aus

$$w = f_1(u)$$

folgt umgekehrt, dass θ irgend eine Function von w ist, ebenso $\operatorname{tg}\theta$, daher die Gleichung der Tangentialebene einer solchen Fläche auch geschrieben werden kann:

$$u + \lambda(w) \cdot v + \mu(w) = 0 \qquad 4)$$

Unsere Aufgabe wird gelöst sein, wenn wir λ und μ, die willkürlichen Functionen, eliminiren.

Differentiiren wir partiell nach u und v, so kommt:

$$\left.\begin{aligned} 1 + v\lambda'(w)\frac{\partial w}{\partial u} + \mu'(w)\frac{\partial w}{\partial u} = 0 \\ \lambda(w) + v\lambda'(w)\frac{\partial w}{\partial v} + u'(w)\frac{\partial w}{\partial v} = 0 \end{aligned}\right\} \qquad 5)$$

Digitized by Google

Multiplicirt man resp. mit $\frac{\partial w}{\partial v}, \frac{\partial w}{\partial u}$ und subtrahirt, so folgt:

$$\frac{\partial w}{\partial v} - \lambda \frac{\partial w}{\partial u} = 0 \qquad 6)$$

In die Gleichung 4) eingesetzt:

$$\mu(w) = -u - v \frac{\frac{\partial w}{\partial v}}{\frac{\partial w}{\partial u}}$$

Anmerkung. Wäre die Regelfläche eine solche mit einer Richtebene z. B. der xy Ebene, so müsste

$$z - z_0 = 0$$

sein, somit auch

$$\mu(w) = 0$$

woraus folgt:

$$u \frac{\partial w}{\partial u} + v \frac{\partial w}{\partial v} = 0$$

d. i. das Kriterium der Regelflächen mit Richtgerade und Richtebene, der Konoidflächen.

Differentiirt man die Gleichung 7) weiter nach u und v, so ergibt sich:

$$\left.\begin{aligned} \mu'(w) \frac{\partial w}{\partial u} &= -1 - v \frac{\frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} \frac{\partial w}{\partial u} - \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} \frac{\partial w}{\partial v}}{\left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)^2} \\ \mu'(w) \frac{\partial w}{\partial v} &= -\frac{\frac{\partial w}{\partial v}}{\frac{\partial w}{\partial u}} - v \frac{\frac{\partial^2 w}{\partial v^2} \frac{\partial w}{\partial u} - \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} \frac{\partial w}{\partial v}}{\left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)^2} \end{aligned}\right\} \qquad 8)$$

Multiplicirt man resp. mit $\frac{\partial w}{\partial v}, \frac{\partial w}{\partial u}$ und subtrahirt:

$$\frac{\frac{\partial^2 w}{\partial v^2} \frac{\partial w}{\partial u} - \frac{\partial w}{\partial v} \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v}}{\frac{\partial w}{\partial u}} - \frac{\frac{\partial w}{\partial v}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} \frac{\partial w}{\partial u} - \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} \frac{\partial w}{\partial v}\right]}{\left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)^2} = 0$$

und reducirt:

Digitized by Google

$$\frac{\partial w}{\partial u}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial v}\frac{\partial w}{\partial v}\right]-\frac{\partial w}{\partial v}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial v}\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}\frac{\partial w}{\partial v}\right]=0$$

und endlich:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}\left[\frac{\partial w}{\partial v}\right]^2-2\frac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial v}\left[\frac{\partial w}{\partial u}\right]\left[\frac{\partial w}{\partial v}\right]+\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\left[\frac{\partial w}{\partial u}\right]^2=0 \qquad 9)$$

und diese Gleichung ist das Kriterium der Regelflächen mit einer Richtgeraden in Ebenencoordinaten.

Als Beispiele zu dieser Flächengattung wollen wir behandeln:

1) Eine Regelfläche.

Die Gleichung der Fläche in Ebenencoordinaten sei:

$$\frac{b(au-1)}{a(bv-1)}+\operatorname{tg}\frac{1}{kw}=0 \qquad 1)$$

Bilden wir die partiellen Differentialquotienten nach u und v um durch Substitution der Werte in die Gleichung

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}\left(\frac{\partial w}{\partial v}\right)^2-2\frac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial v}\frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)^2=0$$

zu erfahren, ob die vorliegende Fläche eine Regelfläche mit einer Richtgeraden sei oder nicht.

Für die partiellen Differentialquotienten ergibt sich:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial u}&=\frac{bkw^2}{\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{1}{kw}\right)(bv-1)}\\ \frac{\partial w}{\partial v}&=-\frac{(au-1)b^2kw^2}{a\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{1}{kw}\right)(bv-1)^2}\end{aligned}\right\} \qquad 2)$$

Für

$$\operatorname{tg}\frac{1}{kw}=-\frac{b(au-1)}{a(bv-1)}$$

substituirt, ergibt sich:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial u}&=-\frac{a^2b(bv-1)kw^2}{a^2b^2(u^2+v^2)-2ab(bu+av)+a^2+b^2}\\ \frac{\partial w}{\partial v}&=-\frac{ab^2(au-1)kw^2}{a^2b^2(u^2+v^2)-2ab(bu+av)+a^2+b^2}\end{aligned}\right\} \qquad 3)$$

Digitized by Google

Bestimmt man die zweiten Differentialquotienten

4)

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} &= \frac{-2a^3b^3k^2w^2(au-1)(bv-1)+2a^4b^4k^2(bv-1)^2u^3}{(a^2b^2(u^2+v^2)-2ab(bu+av+a^2+b^2)} \\
\frac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial v} &= \frac{a^2b^2kw^2[b^2(au-1)^2-a^2(bv-1)^2]-2a^2b^2k^2w^2(au-1)(bv-1)}{[a^2b^2(u^2+v^2)-2ab(bu+av)+a^2+b^2]^2} \\
\frac{\partial^2 w}{\partial v^2} &= \frac{2a^3b^3kw^2(au-1)(bv-1)+2a^4b^4(au-1)^2k^2w^4}{[a^2b^2(u^2+v^2)-2a^2(bu+av)+a^2+b^2]^2}
\end{aligned}\right\}$$

subtrahirt die Werte aus 3) und' 4) in die Bedingungsgleichung der Regelflächen mit einer Richtungsgeraden, so wird dieselbe identisch erfüllt, ein Zeichen, dass die behandelte Fläche in die angegebene Flächenfamilie gehört, was auch in Punktcoordinaten erwiesen wurde.

Man kann jedoch die Beurteilung in der Weise führen, dass man durch entsprechende Behandlung der Flächengleichung zum Kriterium gelangt.

Berechnet man die partiellen Differentialquotienten

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial u} &= \frac{bkw^2}{bv-1}\cos^2\frac{1}{kw} \\
\frac{\partial w}{\partial v} &= \frac{b^2(au-1)w^2}{a(bv-1)^2}\cos^2\frac{1}{kw}
\end{aligned}\right\} \qquad 1)$$

so erhalten wir durch Division der vorliegenden Differentialgleichung die partielle Differentialgleichung der Fläche:

$$\frac{\frac{\partial w}{\partial u}}{\frac{\partial w}{\partial v}} = \frac{b(au-1)}{a(bv-1)} = -\operatorname{tg}\frac{1}{kw} \qquad 2)$$

Differentiirt man weiter, so kommt:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial v}-\frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}}{\left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)^2} &- \left(1+\operatorname{tg}^2\frac{1}{kw}\right)\frac{1}{k^2w^2}\frac{\partial w}{\partial u}=0 \\
\frac{\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}-\frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial v}}{\left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)^2} &- \left(1+\operatorname{tg}^2\frac{1}{kw}\right)\frac{1}{k^2w^2}\frac{\partial w}{\partial v}=0
\end{aligned}\right\} \qquad 3)$$

Digitized by Google

Multiplicirt man bzhw. mit $\frac{\partial w}{\partial v}$, $\frac{\partial w}{\partial u}$ und subtrahirt, so resultirt:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}\left[\frac{\partial w}{\partial v}\right]^2 - 2\,\frac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial v}\,\frac{\partial w}{\partial u}\,\frac{\partial w}{\partial v} + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\left[\frac{\partial w}{\partial u}\right]^2 = 0 \qquad 4)$$

als die abgeleitete partielle Differentialgleichung für Regelflächen mit einer Richtgeraden.

2) Elliptische Schraubenfläche

$$a\,u + a\,v \operatorname{tg} \frac{1}{k\,w} = \sqrt{\frac{b^2}{a^2} + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{k\,w}} \qquad 1$$

Diese geht über in die Kreisschraubenfläche, wenn man setzt $b = a$) also ist ihre Gleichung:

$$a\,u \cos \frac{1}{k\,w} + a\,v \sin \frac{1}{k\,w} = 0 \qquad 2)$$

und diese Fläche wollen wir näher untersuchen.

Berechne man die partiellen Differentialquotienten:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial u} &= \frac{k \cos \frac{1}{k\,w}\; w^2}{u \sin \frac{1}{k\,w} - v \cos \frac{1}{k\,w}} \\ \frac{\partial w}{\partial v} &= -\frac{k \sin \frac{1}{k\,w}\; w^2}{u \sin \frac{1}{k\,w} - v \cos \frac{1}{k\,w}} \end{aligned}\right\} \qquad 3)$$

Hieraus ergibt sich die Differentialgleichung:

$$\frac{\frac{\partial w}{\partial v}}{\frac{\partial w}{\partial u}} - \operatorname{tg} \frac{1}{k\,w} = 0 \qquad 4)$$

oder auch

$$\frac{\partial w}{\partial v} \cos \frac{1}{k\,w} - \frac{\partial w}{\partial u} \sin \frac{1}{k\,w} = 0 \qquad 5)$$

Differentiirt man von neuem partiell nach u und v, so erhält man:

Digitized by Google

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\frac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial v}\frac{\partial w}{\partial u} - \frac{\partial^2 w}{\partial u^2}\frac{\partial w}{\partial v}}{\left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)^2} + \left(1+\operatorname{tg}^2\frac{1}{k\,w}\right)\frac{1}{k\,w^2}\frac{\partial w}{\partial u} = 0\\
&\frac{\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial^2 w}{\partial v^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial v}\frac{\partial w}{\partial v}}{\left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)^2} + \left(1+\operatorname{tg}^2\frac{1}{k\,w}\right)\frac{1}{k w^2}\frac{\partial w}{\partial v} = 0
\end{aligned}\right\} \quad 6)$$

Eliminirt man hieraus die zweiten Teile, indem man die erste Gleichung mit $\frac{\partial w}{\partial v}$, die zweite mit $\frac{\partial w}{\partial u}$ multiplicirt und dann subtrahirt, so ergibt sich:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}\left[\frac{\partial w}{\partial v}\right]^2 - 2\frac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial v}\left[\frac{\partial w}{\partial u}\right]\left[\frac{\partial w}{\partial v}\right] + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\left[\frac{\partial w}{\partial u}\right]^2 = 0 \qquad 7)$$

Dies ist die bekannte Bedingungsgleichung für Regelflächen mit einer Richtgeraden.

§ 5. *Regelfläche mit einer Richtebene.*

Es sei wieder

$$u\,x + v\,y + w\,z - 1 = 0 \qquad 1)$$

die Gleichung der Tangentialebene. Soll nun die Erzeugende z. B. stets zur xy Ebene parallel bleiben, so folgt, dass ein beliebiger zweiter Punkt mit den Coordinaten x_0, y_0, z_0, wobei $z_0 = z$, gleichfalls der Gleichung der Tangentialebene genügen müsse, also:

$$u\,x_0 + v\,y_0 + w\,z_0 - 1 = 0 \qquad 2)$$

Aus den Gleichungen 1) und 2) folgt:

$$u\,(x - x_0) + v\,(y - y_0) = 0 \qquad 3)$$

Damit sich nun die erzeugende Gerade nach irgend einem Gesetze (z. B. auf beliebigen Curven) bewege, muss

$$\left.\begin{aligned} x &= f_1(z)\\ y &= f_2(z)\end{aligned}\right\}$$

also auch

$$\left.\begin{aligned} x - x_0 &= \varphi(z)\\ y - y_0 &= \psi(z)\end{aligned}\right\}$$

sein. Berücksichtigt man dies, so folgt aus 3)

Digitized by Google

$$z = \theta\left(\frac{v}{u}\right)$$

aber auch

$$x = \lambda\left(\frac{v}{u}\right)$$

$$y = \mu\left(\frac{v}{u}\right)$$

und die Gleichung 1) geht über in

$$u\lambda\left(\frac{v}{u}\right) + v\mu\left(\frac{v}{u}\right) + w\theta\left(\frac{v}{u}\right) - 1 = 0 \qquad 5)$$

Partiell differentiirt:

$$\left.\begin{aligned} \lambda\left(\frac{v}{u}\right) - [u\lambda' + v\mu' + w\theta']\,\frac{v}{u^2} + \theta\,\frac{\partial w}{\partial u} = 0 \\ \mu\left(\frac{v}{u}\right) + [u\lambda' + v\mu' + w\theta']\,\frac{1}{u} + \theta\,\frac{\partial w}{\partial u} = 0 \end{aligned}\right\} \qquad 6)$$

Multiplicirt man die obere dieser Gleichungen mit u, die untere mit v und addirt, so foigt:

$$u\lambda\left(\frac{v}{u}\right) + v\mu\left(\frac{v}{u}\right) + \theta\left[u\frac{\partial w}{\partial u} + v\frac{\partial w}{\partial v}\right] = 0 \qquad 7)$$

Berücksichtigt man 5), so ergibt sich:

$$1 + \theta\left(\frac{u}{v}\right)\left[u\frac{\partial w}{\partial u} + v\frac{\partial w}{\partial v} - w\right] = 0 \qquad 8)$$

Von neuem nach u und v differentiirt gibt:

$$\left.\begin{aligned} -\theta'\,\frac{v}{u^2}\left[u\frac{\partial w}{\partial u} + v\frac{\partial w}{\partial v} - w\right] + \theta\left[u\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + v\frac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial v}\right] = 0 \\ \theta'\,\frac{1}{u}\left[u\frac{\partial w}{\partial u} + v\frac{\partial w}{\partial v} - w\right] + \theta\left[u\frac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial v} + v\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\right] = 0 \end{aligned}\right\} \qquad 9)$$

Die erste dieser Gleichungen mit u, die zweite mit v multiplicirt und addirt, resultirt:

$$u^2\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + 2uv\frac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial v} + v^2\frac{\partial^2 w}{\partial v^2} = 0 \qquad 10)$$

als partielle Differentialgleichung der Regelflächen mit einer Richtebene.

Digitized by Google

Beispiele.

1) Eine windschiefe Fläche.

Die Gleichung dieser Fläche in Ebenencoordinaten lautet:

$$w = \frac{v(c - a u)}{b \sqrt{c^2 v^2 - u^2}} \tag{1}$$

Um sich zu überzeugen, ob die vorliegende Fläche dem Kriterium der Regelflächen mit einer Richtebene genügt, berechne man die partiellen Differentialquotienten:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial u} &= \frac{vc(u - ac v^2)}{b(c^2 v^2 - u^2)^{3/2}} \\ \frac{\partial w}{\partial v} &= -\frac{(c - au) u^2}{b(c^2 v^2 - u^2)^{3/2}} \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} &= \frac{vc(c^2 v^2 - 3ac v^2 u^2 + 2u^2)}{b\,cv^2 - u^2)^{5/2}} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial v} &= -\frac{eu(3acuv^2 - 2c^2 v^2 - u^2)}{b(cv^2 - u^2)^{5/2}} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} &= \frac{3c^2 u^2 v(c - au)}{b(cv^2 - u^2)^{5/2}} \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

und substituire dieselben in die Bedingungsgleichung:

$$u^2 \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + 2uv \frac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial v} + v^2 \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} = 0$$

so ergibt sich

$$\begin{aligned} &c^2 u^2 v^3 - 3ac u^3 v^3 + 2a^4 v + bac u^3 v^3 \\ &\quad - 4c^2 u^2 v^3 - 2a^4 v + 3ac u^3 v^3 + 3c^2 u^2 v^3 \equiv 0 \end{aligned}$$

wird also dieselbe identisch null, was unsere Regelfläche als eine solche mit einer Richtebene kennzeichnet.

§ 6. *Regelfläche mit Richtungsgerade und Richtungsebene. Konoidfläche.*

Dieser Flächenart entsprechend sind wir gezwungen, diejenigen Betrachtungen, welche bei Regelflächen mit Richtungsebene und Richtungsgerade einzeln gegolten haben, hier zu vereinigen.

Wie bei Regelflächen mit einer Richtebene, haben wir auch hier:

Digitized by Google

$$z = \theta\left(\frac{v}{u}\right)$$

Da aber auch die Bedingung stattfindet, wie bei Regelflächen mit einer Richtgeraden, nämlich

$$z = \frac{1}{R}$$

so folgt die Functionalgleichung

$$w = F\left(\frac{v}{u}\right) \qquad 1)$$

Partiell nach u und v differentiirt gibt:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial u} &= -F'\left(\frac{v}{u}\right)\frac{v}{u^2} \\ \frac{\partial w}{\partial v} &= F'\left(\frac{v}{u}\right)\frac{1}{u} \end{aligned}\right\} \qquad 2)$$

Hieraus F' eliminirt, folgt:

$$u\frac{\partial w}{\partial u} + v\frac{\partial w}{\partial v} = 0 \qquad 3)$$

die partielle Differentialgleichung der Konoidflächen.

Beispiele.

1) Die erste Hochheim'sche Fläche.

Ihre Gleichung in Ebenencoordinaten ist

$$Mu + w^2v^2 = 0 \qquad 1)$$

Differentiirt man partiell, so kommt:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial u} &= -\frac{M}{2vw} \\ \frac{\partial w}{\partial v} &= \frac{Mu}{2v^2w} \end{aligned}\right\} \qquad 2)$$

Mit u und v beziehungsweise multiplicirt, hierauf addirt, ergibt sich:

$$u\frac{\partial w}{\partial u} + v\frac{\partial w}{\partial v} = 0 \qquad 3)$$

als das Kriterium der Konoidflächen.

Bestimme man die zweiten Ableitungen

Digitized by Google

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} &= 0 \\ \frac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial v} &= \frac{M}{2 w v^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} &= -\frac{M u}{w v^3} \end{aligned}\right\} \qquad 4)$$

und substituire man dieselben in das Kriterium der Regelflächen mit einer Richtgeraden, nämlich

$$\left(\frac{\partial w}{\partial v}\right)^2 \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} - 2 \frac{\partial w}{\partial u} \frac{\partial w}{\partial v} \frac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial w} + \left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)^2 \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} = 0$$

so ist ersichtlich, dass dieselbe identisch null ist und zwar:

$$\frac{M u}{2 v^2 w} \cdot 0 + 2 \frac{M}{2 v w} \frac{M u}{2 v^2 w} \frac{M}{2 w v^2} - \frac{M^2}{4 v^2 w^2} \frac{M u}{w v^3} = 0$$

Unsere Regelfläche besitzt somit eine Richtgerade.

Wollen wir nun nachsehen, ob auch das Kriterium der Regelflächen mit einer Richtebene erfüllt wird. Es müsste der Gleichung genügt werden:

$$u^2 \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + 2 u v \frac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial v} + v^2 \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} = 0$$

In der Tat wird auch diese Gleichung in aller Strenge erfüllt, denn durch Substitution ergibt sich:

$$-u^2 \frac{M u}{w v^3} + 2 u v \frac{M}{2 w v^2} - v^2 \frac{M u}{w v^3} = 0$$

Die erste Hochheim'sche Fläche besitzt somit eine Richtgerade und Richtebene und ist ein Konoid.

2) Die zweite Hochheim'sche Fläche.

Diese hat in Ebenencoordinaten die Gleichung:

$$M u^2 w - v^2 = 0 \qquad 1)$$

Nun wollen wir auch bei dieser Fläche prüfen, ob dieselbe den Kriterien für Konoidflächen, für Regelflächen mit einer Richtgerade und Richtebene genüge leistet, nämlich:

Digitized by Google

$$\left.\begin{aligned} u\frac{\partial w}{\partial u}+v\frac{\partial w}{\partial v}&=0\\ \left(\frac{\partial w}{\partial v}\right)^2\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}-2\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial v}+\left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)^2\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}&=0\\ u^2\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+2uv\frac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial v}+v^2\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}&=0 \end{aligned}\right\} \quad 2)$$

Bildet man die Differentialquotienten

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial u}&=-\frac{2v^2}{Mu^3}\\ \frac{\partial w}{\partial v}&=\frac{2v}{Mu^2} \end{aligned}\right\} \quad 3)$$

und auch die zweiten Ableitungen

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial u^2}&=\frac{6u^2}{Mu^4}\\ \frac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial v}&=-\frac{4v}{Mu^2}\\ \frac{\partial^2 w}{\partial v^2}&=\frac{2}{Mu^2} \end{aligned}\right\} \quad 4)$$

und substituirt dieselben in die Gleichungen 2), so erhält man:

$$-\frac{2v^2}{Mu^3}+\frac{2v^2}{Mu^2}\equiv 0$$

$$\frac{4v^2}{M^2u^4}\cdot\frac{6v^2}{Mu^4}-2\cdot 4\,\frac{2v^2}{Mu^3}\cdot\frac{2v}{Mu^2}\cdot\frac{v}{Mu^3}+\frac{4v^4}{M^2u^6}\cdot\frac{2}{Mu^2}\equiv 0$$

$$u^3\,\frac{6v^2}{Mu^4}-2uv\,\frac{4v}{Mu^3}+\frac{2v^2}{Mu^2}\equiv 0$$

Ausdrücke, die identisch null sind. Die zweite Hochheim'sche Fläche ist somit derselben Art wie die erste.

3) Flache Schraubenfläche.

Ihre Gleichung lautet in Ebenencoordinaten:

$$c\,\mathrm{arc\,tg}\frac{u}{c}+\frac{1}{w}=0$$

Partiell differentiirt, folgt:

Digitized by Google

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial u} &= -\frac{v}{c(a^2+v^2)\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{u}{v}\right)^2}\\ \frac{\partial w}{\partial v} &= \frac{u}{c(a^2+v^2)\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{u}{v}\right)^2}\end{aligned}\right\} \quad 2)$$

Multiplicirt man bzhw. mit u und v und addirt, so resultirt:

$$u\frac{\partial w}{\partial u}+v\frac{\partial w}{\partial v}=0 \quad 3)$$

das Kriterium der Konoidflächen. Bilde man

$$\frac{\frac{\partial w}{\partial u}}{\frac{\partial w}{\partial v}}=-\frac{v}{u}$$

und differentiire partiell nach u und v:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}-\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial v}}{\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2}-\frac{v}{u^2}&=0\\ \frac{\frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial^2 w}{\partial v\,\partial u}-\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}}{\left(\frac{\partial w}{\partial v}\right)^2}+\frac{1}{u}&=0\end{aligned}\right\} \quad 4)$$

Mit $\frac{\partial w}{\partial v}$, $\frac{\partial w}{\partial u}$ respect. multiplicirt und subtrahirt, ergibt sich:

$$\left(\frac{\partial w}{\partial v}\right)^2\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}-2\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial v}+\left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)^2\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}=0$$

ein Zeichen, dass die flache Schraubenfläche auch eine Richtgerade besitzt.

§ 7. *Kegelflächen.*

Auch die Gleichung dieser Flächengattung wird sehr einfach in Ebenencoordinaten.

Seien x_0, y_0, z_0 die Coordinaten der Spitze, so ist die Relation, der die Ebenencoordinaten stets genügen müssen, gegeben durch

$$ux_0+cy_0+wz_0-1=0 \quad 1)$$

Digitized by Google

welche auch schon die Gleichung aller Kegelflächen mit dem Scheitel x_0, y_0, z_0 darstellt. Ausserdem tritt noch hinzu die Gleichung der in der xy Ebene befindlichen Leitlinie

$$\varphi(u, v) = 0 \text{ z. B.}$$

In der Tat, zu Punktcoordinaten übergehend, ergibt sich, wenn man in 1) die Werte für u, v, w einsetzt:

$$x_0 \frac{\partial f}{\partial x} + y_0 \frac{\partial f}{\partial y} + z_0 \frac{\partial f}{\partial z} - x \frac{\partial f}{\partial x} - y \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \qquad 2)$$

oder:

$$(x_0 - x) \begin{matrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{matrix} + (y_0 - y) \begin{matrix} \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{matrix} + (z_0 - z) = 0$$

oder auch

$$p(x - x_0) + q(y_0 - y) = z - z_0 \qquad 3)$$

Dies die bekannte Bedingungsgleichung für Kegelflächen.

Denkt man sich den Scheitel in der z Achse, so folgt für die Gleichung der Kegelfläche

$$x_0 w = 1$$

oder

$$w = \frac{1}{z}$$

was sehr anschaulich in der Figur zum Ausdrucke kommt.

§ 8. *Cylinderflächen.*

Soll nun eine Cylinderfläche als das Erzeugniss einer Ebene sich ergeben, so muss die erzeugende Ebene stets einer fixen Geraden parallel bleiben. Die Gleichung dieser Geraden sei:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \frac{\cos \alpha}{\cos \gamma} \zeta \\ \eta &= \frac{\cos \beta}{\cos \gamma} \zeta \end{aligned}\right\} \quad \ldots G \qquad 1)$$

oder auch geschrieben:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= a \zeta \\ \eta &= b \zeta \end{aligned}\right\} \qquad 2)$$

Aus dieser Gleichung folgt sofort:

Digitized by Google

$$u\cos\alpha + v\cos\beta + w\cos\gamma = 0$$

oder

$$au + bv + w = 0$$

als die Gleichung der Cylinderflächen, deren Erzeugende parallel zur Geraden G sind.

Die Richtigkeit dieser Gleichung leuchtet sofort ein, wenn man von den Ebenen- zu den Punktcoordinaten übergeht und

$$f(x, y, z) = 0$$

als die Gleichung der Cylinderfläche annimmt.

Bestimmt man nach der früher behandelten Transformation:

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z}} \\ v &= \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z}} \\ w &= \frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z}} \end{aligned}\right\} \quad 5)$$

und substituirt dieselben in die Gleichung 4), so ergibt sich:

$$a\frac{\partial f}{\partial x} + b\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z} \quad 6)$$

$$a\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}} + b\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial z}} + 1 = 0 \quad 7)$$

oder auchs chliesslich:

$$ap + bq = 1 \quad 8)$$

welches die partielle Differentialgleichung für Cylinderflächen darstellt, die wir im ersten Teile des Thema abgeleitet haben.

Digitized by Google

Beispiel.

Bezeichnen wir mit α, β, γ die Winkel der Richtgeraden, so ist

$$u\cos\alpha + v\cos\beta + w\cos\gamma = 0$$

die Gleichung aller Cylinderflächen in Ebenencoordinaten, deren Erzeugende parallel zur Richtgeraden sind.

Betrachten wir einen Cylinder, der senkrecht auf der xy Ebene steht, so hat man:

$$\alpha - \beta = 90^0, \quad \gamma = 0$$

somit

$$w = 0$$

Gleichung der Cylinderflächen von gegebener Beschaffenheit.

Es ist

$$\frac{1}{w} = \infty$$

wie es sein muss.

Ebenso erhält man für einen Cylinder, der senkrecht auf der yz Ebene steht:

$$\alpha = 0, \quad \beta = \gamma = 90^0$$

somit

$$u = 0$$

die Gleichung der Cylinderflächen von genannter Eigenschaft, woraus

$$\frac{1}{u} = \infty$$

wie es aus der Figur ersichtlich ist.

Digitized by Google

II.

Miscellen.

1.

Zum Pythagoräischen Lehrsatze.

Gegeben sei ein rechtwinkliges Dreieck OAB, mit $OA = a$, $OB = b$ als Katheten; ferner sei der Punkt M der Schwerpunkt des Quadrates über AB, ähnlich N, P für Quadrate über BO, OA.

Als Abscissenachse wählen wir OA, die andere Kathete als Ordinatenachse, den Scheitel des rechten Winkels O zum Anfangspunkte eines rechtwinkligen Coordinatensystems. Die Coordinaten der Schwerpunkte M, N, P sind (Fig. 1.)

$$M\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}\right), \quad N\left(-\frac{b}{2}, \frac{b}{2}\right), \quad P\left(\frac{a}{2}, -\frac{a}{2}\right)$$

Das Dreieck der Schwerpunkte MNP steht zum gegebenen Dreiecke OAB in besonderer Beziehung, die wir näher untersuchen wollen.

1) Beide Dreiecke MNP und OAB haben einen Schwerpunkt gemeinschaftlich.

2) Die Fläche des Dreieckes MNP übertrifft die Fläche des Dreieckes OAB um die Fläche des Dreieckes AMB, denn es ist

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{ab}{2} + \frac{a^2+b^2}{4}$$

3) Bezeichnen wir mit $\overline{R}$ den Durchschnitt $\overline{MN} \,.\, \overline{AB}$, ähnlich $S \equiv \overline{PM} \,.\, \overline{AB}$, so folgt aus dem Pythagoräischen Lehrsatze:

Digitized by Google

$$\triangle AMB = \triangle BNO + \triangle OPA$$

somit mit Rücksicht auf (2)

$$\triangle MNP = ABNP$$

Ziehen wir beiderseits die Fläche $MPSR$ ab, so erhalten wir

$$\triangle MRS = \triangle ANR + \triangle ASP$$

4) Die Geraden OM, AN, BP sind Höhen des Dreieckes MNP. Ihr gemeinschaftlicher Durchschnitt $H\left(\frac{1}{2}\frac{ab}{a+b}, \frac{1}{2}\frac{ab}{a+b}\right)$.

5) Das Dreieck OAB liegt perspectivisch zum Dreiecke MNP. Dies erhellt schon aus (4). Schreiben wir

$$U \equiv AB \,.\, \overline{AP}, \quad V \equiv BO \,.\, \overline{PM}, \quad W \equiv OA \,.\, \overline{MN}$$

so liegen die Punkte U, V, W auf einer Geraden, welche wir mit Π bezeichnen wollen, und deren Gleichung:

$$a^2x + b^2y - ab(a+b) = 0$$

6) Schreiben wir $L \equiv OB \,.\, \overline{MN}$, $K \equiv OA \,.\, \overline{MP}$, so können wir sagen: der Kegelschnitt, welcher durch die Punkte $OKSRL$ geht, berührt die Gerade MP im Punkte Q. Es ist nämlich $RLOOKS$ ein Pascal'sches Sechseck, wo $OO \equiv NP$. Für dieses Sechseck ist Π die Pascal'sche Gerade.

Analytisch beweist sich der Satz wie folgt: Es ist

$$\begin{aligned} MN &\equiv -(a+2b)y + ax + b(a+b) = 0 \\ UP &\equiv by - (2a+b)x + a(a+b) = 0 \\ AP &\equiv ay + bx - ab = 0 \\ KL &\equiv a(a+2b)y + b(2a+b)x - ab(a+b) = 0 \end{aligned}$$

Die Gleichung des Kegelschnittes durch die Punkte K, S, R, L ist

$$MN \,.\, MP - \lambda AB \,.\, KL = 0$$

Da nun der Kegelschnitt durch den Punkt O gehen soll, so folgt:

$$\lambda = \frac{a+b}{ab}$$

somit ist die Gleichung des betreffenden Kegelschnittes nach Kürzung mit dem gemeinsamen Factor (a^2+ab+b^2):

$$(2a+b)bx^2 - abxy + (a+2b)ay^2 + ab(a+b)(x+y) = 0$$

Digitized by Google

aus welcher man sogleich ersieht, dass die Gerade NP eine Tangente desselben im Punkte Q ist.

7) Die Lage der Achse Π ist schon durch die Lage der Hypotenuse AB bestimmt. Aendert nun diese ihre Lage nach dem Gesetze $\varphi(a, b) = 0$, so erhalten wir die Gleichung der Enveloppe von Π, wenn wir aus

$$\Pi = 0, \quad \varphi(a, b) = 0, \quad \frac{d(\Pi, \varphi)}{d(a, b)} = 0$$

die Grössen a, b eliminiren. Bemerkenswert ist der Fall

$$\varphi(a, b) = a + b - k = 1$$

wo k constant ist.

8) Ist nun a constant, b veränderlich, dreht sich die Hypotenuse um den Scheitel A; wir erhalten so eine Reihe von Dreiecken OAB und eine Reihe ihnen zugeordneten Kegelschnitten, deren Mittelpunkte auf einem bestimmten Kegelschnitte liegen. Ebenso gehört zu dieser Reihe von Dreiecken eine Reihe von Achsen Π, welche einen Kegelschnitt umhüllen und zwar eine Hyperbel, deren Gleichung

$$x(y - a) = \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

Bei gegebenem a gehen durch einen beliebigen Punkt der Ebene zwei Kegelschnitte des Art. 6. Den entsprechenden Wert b erhalten wir aus

$$[\xi^2 + a(\xi + \eta)]b^2 + a[2\xi^2 - \xi\eta + 2\eta^2 + a(\xi + \eta)]b + a^2\eta^2 = 0$$

Liegt nun der Punkt (ξ, η) auf der Ellipse

$$2\xi^2 - \xi\eta + 2\eta^2 + a(\xi + \eta) = 0$$

so erhalten wir zwei Dreiecke, welche symmetrisch in Bezug auf die X-achse liegen. Sie sind reell für

$$\xi^2 + a(\xi + \eta) < 0$$

d. i. wenn der Punkt $(\xi\eta)$ innerhalb der Parabel

$$\xi^2 + a(\xi + \eta) = 0$$

liegt, also für Punkte $(\xi\eta)$, welche auf dem Ellipsenbogen liegen, der innerhalb der Parabel liegt. Für die Schnittpunkte der Parabel mit der Ellipse ist $b = \pm\infty$.

Beide Kegelschnitte, welche durch den Punkt hindurch gehen, fallen bei gegebenem a zusammen, es entspricht ihnen somit ein Wert b, wenn der Punkt auf der Curve

Digitized by Google

$$[2\xi^2 - \xi\eta + 2\eta^2 + a(\xi+\eta)]^2 - 4\eta^2[\xi^2 + a(\xi+\eta)] = 0$$

liegt, welche im Punkte O einen Rückkehrpunkt und die Gerade NP zur Rückkehrtangente in diesem Punkte hat. Ganz analoge Resultate erhalten wir für constantes b und veränderliches a.

Die Resultate, zu denen wir gekommen sind, können wir verallgemeinern, indem wir statt der Quadrate über den Seiten des Dreieckes reguläre Polygone nehmen.

Bezeichnen wir auch hier mit M, N, P die Schwerpunkte der regulären n-Ecke über AB beziehungsweise BO, OA, so haben wir:

$$M\left(\frac{b}{2}\cot\frac{\pi}{n} + \frac{a}{2},\ \ \frac{a}{2}\cot\frac{\pi}{n} + \frac{b}{2}\right)$$

$$N\left(-\frac{b}{2}\cot\frac{\pi}{n},\ \frac{b}{2}\right),\quad P\left(\frac{a}{2},\ -\frac{a}{2}\cot\frac{\pi}{n}\right)$$

Auch hier gilt:

1) Die Dreiecke MNP und OAP haben denselben Schwerpunkt.

2) Die Verbindungslinien OM, AN, BP schneiden sich in einem Punkte, denn ihre Gleichungen sind:

$$OM \equiv \left(b\cot\frac{\pi}{n} + a\right)y - \left(a\cot\frac{\pi}{n} + b\right)x = 0$$

$$AN \equiv \left(2a + b\cot\frac{\pi}{n}\right)y + bx - ab = 0$$

$$BP \equiv ay + \left(a\cot\frac{\pi}{n} + 2b\right)x - ab = 0$$

und

$$\begin{vmatrix} b\cot\frac{\pi}{n} + a, & -a\cot\frac{\pi}{n} - b, & 0 \\ 2a + b\cot\frac{\pi}{n}, & b, & -ab \\ a, & a\cot\frac{\pi}{n} + 2b, & -ab \end{vmatrix} \equiv 0$$

3) Die Dreiecke OAB, MNP liegen perspectivisch. Homologe Seiten schneiden sich auf der Geraden Π.

4) Der Kegelschnitt, der durch $RLOKS$ geht, berührt die Gerade NP im Punkte O; somit ist $RLOOKS$ ein Pascalsches Sechseck und Π dessen Pascalsche Gerade. K. Zahradnik.

Digitized by Google

2.

Notiz über das eigentliche Oval.

Im allgemeinen die Geschichte derjenigen algebraischen Curven schreiben zu wollen, die, weil sich eben ihre Gestalt mit mehr oder weniger Zwang als eiförmig schildern lässt, seit (à peu près) 260 Jahren „Ovale" heissen, würde, obschon er manches Verlockende für sich hat, kaum ein recht glücklicher Gedanke zu nennen sein. Zwar kommen dieselben schon beim älteren Heron vor und werden als (freilich nicht mehr geometrische) „Korblinien" der Architekten und Ingenieure wol ewigen Bestand haben, doch wäre es, ohne die Bedeutung der „Cartesischen Ovale" und Newton's sich hierauf beziehende Leistungen zu verkennen, einerseits nur wenig, was man seit Jenem bis auf Proclus, Descartes und allenfalls noch Giovanni Domenico, Cassini davon zu berichten hätte, andererseits aber treten diese Curven vom zweiten Drittel des 17. Jahrhunderts an in so mannigfaltigen Formen auf und können sich jeden Augenblick in so wechselvollen Gestalten bieten (ich erinnere nur an das äusserst instructive Cayley'sche Beispiel vom Zerfallen einer Curve vierter Ordnung in 4 Ovale), dass ihre historische Behandlung bis zur Gegenwart mindestens schwer durchführbar erscheint. In Wahrheit eine linea ovata oder „Eilinie" κατ' ἐξοχήν ist jedoch nur eine von ihnen, wenn ich anders recht unterrichtet bin; dieses eigentlichen Ovals ist, meines Wissens, bisjetzt weder in der Geschichte der Mathematik besonders gedacht worden, noch seine Behandlung von irgend einer Seite erfolgt, obwol es schon deshalb vor völliger Vergessenheit bewahrt zu werden verdient, weil jedenfalls die Zahl der vorhandenen Uebungsbeispiele durch die Eilinie um ein durchaus nicht wertloses vermehrt wird. Von ihr hörte ich zum ersten und letzten Male vor 27 Jahren aus dem Munde meines Lehrers L. von Seidel in München, ohne ihr inzwischen, sei es in Lehrbüchern, Aufgabensammlungen, oder sonst wo, wieder zu begegnen. Allerdings trifft man schon vor 370 Jahren bei Albrecht Dürer die Consonanz „Eierlinie", keineswegs aber damit zugleich begriffliche Deckung an, da ja bekanntlich durch letztere Bezeichnung nur ein deutsches Wort für Ellipse geschaffen sein sollte. Einige Worte seien mir über diese nicht uninteressante Linie zu sagen gestattet.

Der Durchmesser $AO = a$ eines Kreises C werde als Abscissen- und die Kreistangente in O als Ordinatenachse angenommen. Zieht man dann eine Kreissehne OP, fällt PQ senkrecht auf AO und von Q aus das Perpendikel QM auf OP, so gehört der Punkt M der Eilinie, einer Curve vierter Ordnung, an, deren Gleichung

Digitized by Google

$$y^4 + x^4 + 2x^2y^2 - ax^3 = 0$$ *)

lautet, und die den Coordinaten-Anfang zu einem dreifachen Punkt, in diesem aber nur eine reelle Tangente hat, die Achse der Y. Einen Mittelpunkt, der, wenn vorhanden, 6 Bestimmungs-Elemente vertreten würde, besitzt sie nicht. Zwei Maximalpunkte, die ihr Verlauf zeigt, ergeben sich als Schnitte eines Kreises C' mit ihr, der seinen Mittelpunkt auf der Abscissen-Achse und $\frac{3}{8}a$ zum Halbmesser hat, sowie den Kreis C und die Curve in O berührt. Das dadurch bestimmte Sehnendreieck wird gleichseitig und hat zur Seitenlänge $\frac{3}{8}a\sqrt{3}$, die zugleich die Grösse des Krümmungshalbmessers in jedem der Maximalpunkte fixirt. Nur 2 (statt 12 im allgemeinen), oder 4 paarweise mit einander parallele (wenn auch das Supplement des Neigungswinkels in Betracht kommt), Tangenten giebt es, die, einer gegebenen Geraden parallel, an die Curve gezogen werden können; eine Tangente mit Hülfe von Cirkel und Lineal zu construiren, bietet nicht die geringste Schwierigkeit, eben so wenig verursacht die Auffindung der Berührungspunkte jener paralleler Tangenten Mühe.

Die Untersuchung der Evolute nimmt einen etwas intricaten Charakter an; denn, von Anwendung der Liniencoordinaten dabei abstrahirt, verlangt die eine Methode, nach der die Evolute als Enveloppe aller Normalen aufzufassen, d. h. ein veränderlicher Parameter γ aus der Normale, $N = 0$, und aus $d_\gamma N = 0$ zu eliminiren ist, die Auflösung einer Gleichung vierten Grades in $\cos\gamma^{1}$, während das andere Verfahren, welches die Evolute als Ort der Krümmungscentra kennen lehrt, zwar nur die einer Gleichung dritten Grades nötig macht, im übrigen aber das Abstruse nur wenig benimmt und gleichfalls recht umständlich bleibt. Nach dem letzteren wird, unter λ, μ die Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes verstanden, die Gleichung der Evolute

$$\{(U + 2\sqrt{a})(U - \sqrt{a})\}^3 + (3\mu)^2 \cdot (U - \tfrac{5}{2}\sqrt{a})^2 = 0$$

---

oder

$$(y^2 + x^2)^2 = ax^3$$

wodurch ihre Zugehörigkeit zu den Cartesischen Formen, wie sie unter der Form

$$S^2 = k^3 \cdot L$$

bei Salmon-Fiedler (Analyt. Geom. d. h. eb. C.) studirt sind, deutlich hervortritt. In geschichtlicher Hinsicht ist Bösser's Inauguraldissertation (Kiel 1869) über caustische Linien und Flächen nachzulesen.

Digitized by Google

$$U = \tfrac{1}{2}\sqrt[3]{(30\lambda - 17a)a^{1/2} + \sqrt{\left(\frac{-5a+8\lambda}{\lambda}\right)^3 + (17a-30\lambda)^2 a}}$$

$$- \tfrac{1}{2}\sqrt[3]{(-30\lambda+17a)a^{1/2} + \sqrt{\left(\frac{-5a+8\lambda}{\lambda}\right)^3 + (17a-30\lambda)^2 a}}$$

Sie liegt fast ganz innerhalb des Kreises C', läuft in O und dem anderen Endpunkte seines Durchmessers in Spitzen aus und geht (aber nur einmal) durch die beiden Maximal- oder Culminationspunkte, in deren Nähe sie wieder je 2 Spitzen besitzt, hindurch.

Der Flächenraum, den die Eilinie einschliesst, beträgt $\frac{5}{8} \cdot \frac{a^2\pi}{4}$, ihre halbe Länge wird durch

$$\frac{a}{9}\left\{\frac{4-5k^2}{k^2(1-k^2)} \cdot \frac{\sin\Phi\cos\Phi}{\Delta(\Phi)} + \frac{\sin\Phi\cos\Phi}{\Delta(\Phi)^3} + \frac{F\left(k, \frac{\pi}{2}\right)}{k^2} + \frac{5k^2-4}{k^4(1-k^2)} \cdot E\left(k, \frac{\pi}{2}\right)\right\}$$

ausgedrückt und hängt somit wesentlich von zwei elliptischen Integralen (in Legendre'scher Normalform) ab, die der ersten und zweiten Gattung angehören; darin ist k^2 für $\frac{8}{9}$ geschrieben.

Endlich, rotirt unsere Curve um die Achse OA, so entsteht die Eifläche

$$z^2 + y^2 = \sqrt{ax^3} - x^2$$

Ihre Kubatur liefert $\frac{a^3\pi}{15}$ oder $\frac{2}{5}$ des Inhaltes einer Kugel vom Durchmesser a, die Complanation ergiebt

$$\frac{a^2\pi}{4} \cdot \frac{1}{64} \cdot \left\{\frac{1}{7}(3^7-1) - \frac{18}{5}(3^5-1) + \frac{81}{3}(3^3-1)\right\} = \frac{a^2\pi}{4} \times 2.235715\ldots$$

also etwa $\frac{14}{25}$ der Kugelfläche.

Leipzig. Dr. Armin Wittstein.

Digitized by Google

3.

Potenzcongruenzen.

Im Anschluss an die in diesem Archiv, Reihe 2, Teil 13 auf Seite 217–219 unter obigem Titel von uns gegebenen Ausführungen darf hier noch bemerkt werden, dass die dort angegebenen Congruenzen natürlich auch ihre Gültigkeit behalten, wenn statt p (p eine Primzahl) eine beliebige Zahl m gesetzt wird. Ferner mag noch mitgeteilt werden, dass, wenn man die einzelnen Congruenzen

$$\left.\begin{array}{l} 1^2+(m-1)1^2 \\ 1^3+(m-1)1^3 \\ \text{u. s. w.} \end{array}\right\} \equiv 0 \pmod{m}$$

mit einander verbindet, die folgenden Reihen aufgestellt werden können:

$$\begin{array}{l} 1^n+m\,.\,1^{n-1}+m\,.\,1^{n-2}+\ldots(m-1)1 \\ 2^n+(m-1)2^{n-1}+(m-1)2^{n-2}+\ldots(m-2)2 \\ \quad\vdots\qquad\quad\vdots\qquad\quad\vdots\qquad\qquad\vdots \\ (m-1)^n+(m-[m-2)(m-1)^{n-1}+(m-[m-2)(m-1)^{n-2} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\ldots(m-[m-2)(m-1) \end{array}$$

Diese Reihen geben z. B. für $m=7$ und $n=6$ die folgenden Resultate:

$$\left.\begin{array}{l} 1^6+7\,.\,1^5+7\,.\,1^4+7\,.\,1^3+7\,.\,1^2+6\,.\,1 \\ 2^6+6\,.\,2_5+6\,.\,2^4+6\,.\,2^3+6\,.\,2^2+5\,.\,2 \\ 3^6+5\,.\,3^5+5\,.\,3^4+5\,.\,3^3+5\,.\,3^2+4\,.\,3 \\ 4^6+4\,.\,4^5+4\,.\,4^4+4\,.\,4^3+4\,.\,4^2+3\,.\,4 \\ 5^6+3\,.\,5^5+3\,.\,5^4+3\,.\,5^3+3\,.\,5^2+2\,.\,5 \\ 6^6+2\,.\,6^5+2\,.\,6^4+2\,.\,6^3+2\,.\,6^2+1\,.\,6 \end{array}\right\} \equiv 0 \pmod{7}$$

Oldenburg i. Gr. G. Speckmann.

Digitized by Google

III.

Ueber die Transformation der elliptischen Functionen.

Von

Fritz Beer,

Schüler am k. k. Staatsgymnasium in Wien. IX. Bez.

Bekanntlich führt man das allgemeine Transformationsproblem der elliptischen Integrale auf die Aufgabe zurück, eine rationale Function

$$y = \frac{F(x)}{F_1(x)}$$

zu finden, die der Differentialgleichung

$$\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)\,(1-c^2x^2)}} = p \cdot \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)\,(1-k^2y^2)}}$$

genügt, wo p eine Constante ist. Betrachtet man die Integralgrenzen x, y als sinam-Functionen des Integralwertes u, so dass

$$x = \operatorname{sinam}(u,\ c), \quad y = \operatorname{sinam}\left(\frac{u}{p},\ k\right)$$

ist [1]), so wird die obige Bedingung die Gleichungen

$$\omega = a_0 p\,\Omega + 2a_2 p\,\Omega'$$
$$2\omega' = k_0 p\,\Omega + 2b_1 p\,\Omega'$$

---

1) Ich führe die Bedingung, dass die Werte $x = 0$, $y = 0$ sich entsprechen, was sich später als notwendig für die rationale Transformation ergeben wird, schon jetzt ein.

Digitized by Google

herbeiführen, wo ω, ω' die Perioden der ursprünglichen, Ω, Ω' die der transformirten Function sind. Man kann daher die Aufgabe der Transformation von zwei Standpunkten aus angreifen: erstens, von der Periodentransformation zur Substitution $y = f(x)$ gelangen, zweitens umgekehrt. Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich damit, den Zusammenhang zwischen Transformation und Substitution näher zu präcisiren.

I. Die lineare Transformation und Substitution.

Es soll zuerst die Form aller möglichen linearen Substitutionen festgestellt werden. Die Bedingung, dass eine rationale Substitution obiger Differentialgleichung genüge, ist die, dass sich Zähler und Nenner des Ausdruckes $\frac{F(x)}{F_1(x)}$ in der Dimension höchstens um 1 unterscheiden (vgl. Jacobi, ges. Werke, I. Bd., pag. 70) und dass, wenn sie von gleichem Grade sind, die beiden letzten Coefficienten des Zählers und des Nenners nicht einander proportional sind. Da also jede lineare Substitution in einer der drei folgenden Formen geschrieben werden kann

$$y = \frac{a_0 + a_1 x}{b_0 + b_1 x}, \quad \frac{a_0}{b_0 + b_0 x}, \quad a_0 + a_1 z$$

so wird, wenn noch für $x = 0$ auch $y = 0$ sein soll nur die Function

$$y = ax$$

zu betrachten sein.

Man substituire also diesen Ausdruck in die Gleichung

$$\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}} = \frac{p\,dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}} \qquad 1)$$

Da

$$p = \lim\left(\frac{x}{y}\right)_{x=0} = \frac{1}{a}$$

(vgl. Königsberger, Theorie der ellipt. Funct. II. Bd. pag. 98), so wird die rechte Seite von 1) übergehen in $\frac{dx}{\sqrt{(1-a^2x^2)(1-k^2a^2x^2)}}$, welcher Ausdruck also mit $\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}}$ identisch sein soll.

Es muss also der Factor $(1-a^2x^2)$ identisch sein mit $(1-x^2)$ oder mit $(1-c^2x^2)$, so dass daraus

Digitized by Google

$$a = \pm 1 \quad \text{oder} \quad = \pm c$$

folgt, denen die Werte

$$k = \pm c \quad \text{resp.} \quad k = \pm \frac{1}{c}$$

correspondiren. Es gibt also im ganzen nur vier verschiedene lineare Substitutionen

$$y = \pm x, \quad y = \pm cx$$

Die Art und Weise, wie sich die Zeichen von a und k entsprechen, ist bekannt (Königsb. a. a. O., II. Bd., pag. 66).

Vergleicht man dieses Resultat mit den bekannten Ausdrücken der linearen Transformation, so kann man sagen: Jeder linearen rationalen Substitution entspricht eine ganzzahlige lineare Transformation und umgekehrt: Wenn einer linearen ganzzahligen Transformation eine rationale Substitution entspricht, so ist sie linear.

Es soll nun untersucht werden, wann die Transformation

$$\begin{aligned} \omega &= a_0 a \Omega + 2a_1 a \Omega' \\ 2\omega' &= b_0 a \Omega + 2b_1 a \Omega' \end{aligned} \qquad a)$$

die man kurz mit $\left|\begin{matrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{matrix}\right|$ bezeichnet, einer rationalen Substitution entspricht, wobei

$$a_0 b_1 - a_1 b_0 = 1$$

Wenn

$$a_0 b_1 - a_1 b_0 = n$$

ist, so sind dies bekanntlich die Bedingungen für die rationale Transformation der ϑ Functionen, die aber dann rationale Beziehungen zwischen den drei elliptischen Functionen unter einander, nicht aber zwischen den sinam Functionen allein nach sich ziehen.

Ich will nun mit Rücksicht auf Königsberger a. a. O., II. Bd., pag. 27 diesen besondern Fall näher ausführen, gegenüber dem allgemeinern Standpunkte, der in dem erwähnten Werke eingehalten ist. Hierbei wird sich die Gelegenheit ergeben, an dem dort geführten Beweis für die Rationalität ganzzahliger Transformationen[1]) eine Ergänzung anzubringen, weshalb ich den Gedankengang dieses Beweises hier kurz angebe.

---

1) Allerdings lauten die Periodengleichungen dort etwas anders, so dass sich bis auf einen speciellen Fall der Transformation paaren Grades richtige Resultate ergeben; die Bemerkung, die ich an der Beweisführung anbringe, wird hierdurch jedoch nicht tangirt.

Digitized by Google

Es wird dort auf einen Satz recurrirt, der da sagt, dass von zwei ungeraden doppelperiodischen Functionen deren eine zweiter, die andere $n$ter Ordnung ist, man stets die letztere rational durch die erstere ausdrücken kann, vorausgesetzt, dass die beiden Functionen dieselben Perioden haben. (Königsb. a. a. O., II. Bd., pag. 354).

Offenbar sind hier Elementarperioden gemeint. In dort näher ausgeführtem Sinne kann man nun $a\Omega$, $a\Omega'$ als Perioden von y auffassen, so dass ω, ω' nach α) ebenfalls Perioden von y sind. Es ist nun ausser Acht gelassen, dass sie deswegen noch nicht Elementarperioden sein müssen, daher die Bedingung, dass a_0, a_1, b_0, b_1 ganze Zahlen sind, noch nicht hinreichend ist. Damit ω, ω' tatsächlich Elementarperioden von y seien, müssen a_0, $2a_1$, $\frac{b_0}{2}$ b_1 ganze Zahlen sein, also b_0 gerade und ausserdem muss die Transformations-Determinante $= 1$ sein, so dass der obige Beweis nur für lineare Transformationen, deren drittes Glied gerade ist, gültig ist. Es lässt sich aber auch direct beweisen, dass eine lineare Transformation, bei welcher letztere Bedingung nicht erfüllt ist, nicht rational ist.

Wenn b_0 ungerade ist, so kann erstens

I. a_0 gerade sein. Die Gleichungen α) nach $a\Omega$, $a\Omega'$ aufgelöst geben

$$a\Omega = b_1\omega - 2a_1\omega'$$

$$a\Omega' = -\frac{b_0}{2}\omega + a_0\omega'$$

was man auch in der Form schreiben kann

$$a\lambda = 2b_1\frac{\omega}{2} - a_1 \cdot 2\omega'$$

$$a\lambda' = -b_0\frac{\omega}{2} + \frac{a_0}{2} \cdot 2\omega'$$

Hier sind die Coefficienten von $\frac{\omega}{2}$, $2\omega'$ lauter ganze Zahlen, und ihre Determinante ist gleich 1. Gelingt es daher eine ungerade Function zu finden, die als Elementarperioden $\frac{\omega}{2}$, $2\omega'$ hat, so wird sich diese rational durch y ausdrücken lassen. Eine solche Function ist

$$p \cdot \frac{\sin\mathrm{am}\, a}{\cos\mathrm{am}\, u} = \frac{px}{\sqrt{1-x^2}}$$

Digitized by Google

Da dies also eine rationale Function von y ist, die sich nicht rational in x ausdrücken lässt, so kann unmöglich y eine rationale Function von x sein.

II. sei a_0 ungerade. Man kann die Gleichungen

$$a\Omega = b_1\omega - 2a_1\omega'$$

$$a\Omega' = -\frac{b_0}{2}\omega + a_0\omega'$$

auch in folgender Form schreiben

$$a\Omega = (a_1+b_1)\omega - 2a_1\left(\frac{\omega}{2}+\omega'\right)$$

$$a\Omega' = -\left(\frac{a_0+b_0}{2}\right)\omega + a_0\left(\frac{\omega}{2}+\omega'\right)$$

Da a_0 und b_0 beide ungerade Zahlen sind, so ist $\frac{a_0+b_0}{2}$ eine ganze Zahl; die Determinante

$$(a_1+b_1)a_0 - (a_0+b_0)a_1 = a_0b_1 - a_1b_1 = 1$$

und es wird daher die Function

$$\frac{p\,\mathrm{sin\,am}\,u}{\Delta\,\mathrm{am}\,u} = \frac{px}{\sqrt{(1-c^2x^2)}}$$

sich rational durch y ausdrücken lassen, wodurch analog dem früheren der Beweis geliefert ist.

Wir haben also gesehen, dass nur Transformationen von der Form

$$\left.\begin{array}{llll} a_0\equiv 1, & a_1\equiv 0, & b_0\equiv 0, & b_1\equiv 1 \\ a_0\equiv 1, & a_1\equiv 1, & b_0\equiv 0, & b_1\equiv 1 \end{array}\right\} \pmod 2$$

oder

eine rationale Substitution entspricht und zwar, wie bekannt, der ersten die Substitution

$$y = \pm x$$

je nachdem

$$a_0 = 4n \pm 1$$

ist, und ebenso der zweiten die Substitution

$$y = \pm cx$$

Digitized by Google

II. Die Substitution und Transformation zweiten Grades.

Die allgemeine Substitution zweiten Grades wird mit Berücksichtigung der Bedingungen für die rationale Substitution überhaupt folgendermassen lauten:

$$y = \frac{a_1 x + a_2 x^2}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2}$$

Wenn a_2 nicht verschwindet, so muss sie sich auch in der Form

$$y = \frac{p(b_1 x + b_2 x^2)}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2}$$

schreiben lassen. Ist hingegen

$$b_2 = 0$$

so braucht eine solche Form nicht einzutreten, und es ist

$$y = \frac{a_1 x + a_2 x^2}{b_0 + b_1 x}$$

Diese Fälle sollen jedoch später beachtet werden, und zuerst $a_2 = 0$ angenommen werden.

Es sei also

$$y = \frac{ax}{1 + \alpha x + \alpha_1 x^2}$$

wie man ja offenbar schreiben kann. Es soll der Gleichung

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}} = \frac{1}{p}\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}} \qquad 1)$$

genügt werden. Bekanntlich ist

$$\frac{1}{p} = \lim\left(\frac{y}{x}\right)_0 = \lim \frac{a}{1 + \alpha x + \alpha_1 x^2} = a$$

Es ist nun

$$dy = \frac{a(1-\alpha_1 x^2)}{(1+\alpha x+\alpha_1 x^2)^2}\,dx$$

und daher aus 1)

$$\frac{a(1-\alpha_1 x^2)dx}{(1+\alpha x+\alpha_1 x^2)^2\sqrt{\left\{1-\left(\frac{ax}{1+\alpha x+\alpha_1 x^2}\right)^2\right\}\left\{1-k^2\left(\frac{ax}{1+\alpha x+\alpha_1 x^2}\right)^2\right\}}}$$

$$= \frac{a(1-\alpha_1 x^2)dx}{\sqrt{\{(1+\alpha x+\alpha_1 x^2)^2 - a^2x^2\}\{(1+\alpha x+\alpha_1 x^2)^2 - k^2a^2x^2\}}}$$

$$= \frac{a\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}} \qquad 2)$$

Digitized by Google

Aus der Gleichung 2) folgt dann weiter

$$\{(1+\alpha x+\alpha_1 x^2)^2-a^2x^2\}\{(1+\alpha x+\alpha_1 x^2)^2\}=(1-\alpha_1 x^2)^2(1-x^2)(1-c^2x^2)$$

und aus dieser Gleichung durch Vergleichen der Coefficienten gleicher Potenzen von x folgende:

$$\begin{gathered}
4\alpha = 0 \\
4\alpha_1+6\alpha^2-a^2(1+k^2) = -(1+c^2)-2\alpha_1 \\
12\alpha\alpha_1+4\alpha^3-2\alpha a(1+k^2)=0 \\
6\alpha_1^2+8\alpha^2\alpha_1+\alpha^4-2\alpha_1 a^2(1+k^2)+a^2a^2(1+k^2)+a^4k^2=c^2+2\alpha_1(1+c^2)+\alpha_1^2 \qquad 3) \\
12\alpha\alpha_1^2+4\alpha^3\alpha_1-2\alpha\alpha_1 a^2(1+k^2)=0 \\
4\alpha_1^3+6\alpha^2\alpha_1^2-\alpha_1^2 a^2)(1+k^2) = -2\alpha_1 c^2-(1+c^2)\alpha_1^2 \\
4\alpha\alpha_1^3=0 \\
\alpha_1^4=\alpha_1^2c^2
\end{gathered}$$

Setzt man das Resultat der ersten dieser Gleichungen $\alpha = 0$ in die anderen ein, und lässt die identischen weg, so erhält man

$$\begin{gathered}
4\alpha_1-a^2(1+k^2) = -(1+c^2)-2\alpha_1 \\
6\alpha_1^2-2\alpha_1 a^2(1+k^2=c^2+2\alpha_1(1+c^2)+\alpha_1^2 \qquad 3a) \\
4\alpha_1^3-\alpha_1^2a^2(1+k^2)=-2\alpha_1 c^2-(1+c^2)\alpha_1^2 \\
\alpha_1^4=\alpha_1^2c^2
\end{gathered}$$

Die Lösungen der letzten dieser Gleichungen sind

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_1 = \pm c$$

von denen die ersten zwei gleichen Wurzeln unter Berücksichtigung von $\alpha = 0$ den Fall der linearen Substitution geben, also nicht weiter berücksichtigt zu werden brauchen.

1) Sei also $\alpha_1 = +c$. Die Gleichungen 3a) gehen dann über in

$$\begin{gathered}
6c-a^2(1+k^2) = -(1+c^2) \\
6c^2-2a^2c(1+k^2)+a^4k^2 = 2c^2+2c+2c^2 \qquad 4) \\
6c^3-a^2c^2(1+k^2) = -c^2(1+c^2)
\end{gathered}$$

Die erste und dritte dieser Gleichungen sind identisch, da sie sich nur um den Factor c^2 von einander unterscheiden Aus der ersten und zweiten erhält man

$$\begin{gathered}
a^2k^2 = -a^2+1+6c+c^2 \qquad 4a) \\
a^2k^2(a^2-2c) = 2c+2a^2c-4c^2+2c^3
\end{gathered}$$

woraus dann durch Elimination von k^2 folgt

Digitized by Google

$$a^4 - a^2(1+6c+c^2) = -(4c^3+9c^2+4c) \qquad 3)$$

welche Gleichung zur Bestimmung von a dient. Ihre Lösungen sind

$$a = \pm\sqrt{\frac{1+6c+c^2}{2} \pm \sqrt{1-4c+6c^2-4c^3+c^4}}$$

das heisst

$$a = \pm(1+c) \quad \text{und} \quad a = \pm 2\sqrt{c}$$

Setzt man diese Werte in die Gleichungen 4a) ein, so erhält man

$$k = \pm\frac{2\sqrt{c}}{1+c} \quad \text{und} \quad k = \pm\frac{1+c}{2\sqrt{c}}$$

2) Sei $a_1 = -c$. Da in den Gleichungen 3a) c nur in der zweiten Potenz vorkommt, so muss man offenbar in den aus ihnen gefolgerten Gleichungen 4) und 4a) einfach statt c, $-c$ setzen, da das Auftreten der ersten und dritten Potenz von c lediglich eine Folge des α in 3a) ist, daraus folgt, dass die Resultate die aus 4) und 4a) gezogen werden, bis auf das Zeichen von c dieselben sind; es wird also in diesem Falle

$$a = \pm(1-c) \quad \text{und} \quad a = \pm 2i\sqrt{c}$$

sein, woraus dann mit Hilfe von 3a)

$$k = \pm\frac{2i\sqrt{c}}{1-c} \quad \text{und} \quad k = \pm\frac{(1-c)}{2i\sqrt{c}} \quad \text{folgt.}$$

II. Soll der Fall

$$y = \frac{a_1 x + a_2 x^2}{1+bx}$$

behandelt werden. Es reducirt sich, wie man gleich sehen wird, auf die lineare Substitution.

Geht man nämlich genau so vor wie im ersten Fall, so erhält man

$$dy = a_1 \frac{1+2\frac{a_2}{a_1}x+b\frac{a_2}{a_1}x^2}{(1+bx^2)^2}\,dx$$

ausserdem auf demselben Wege wie früher und mit denselben Bezeichnungen

$$\frac{1}{p} = a$$

Die Bedingungsgleichung, die man aus der Gleichung

Digitized by Google

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}} = \frac{1}{p} \cdot \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}}$$

zieht, wird also sein

$$\{(1+bx^2)^2 - a_1x + a_2x^2)^2\}\ \{(1+bx)^2 - k^2(a_1x+a_2x^2)^2\}$$
$$= \left(1 + 2\frac{a_2}{a_1}x = b\frac{a_2}{a_1}x^2\right)^2 \{1-(1+c^2)x^2+c^2x^4\}$$

und aus dieser, wie man einfach ausrechnet zur Bestimmung der Constanten folgende

$$4b = 4\frac{a_2}{a_1} \qquad 1)$$

$$6b^2 - a^2(1-k^2) = 4\frac{a_2^2}{a_1^2} + 2b\frac{a_2}{a_1} - (1+c^2 \qquad 2)$$

$$4b^3 - 2a_1^2b(1+k^2) - 2a_1a_2(1+k^2) = 4b\frac{a_2^2}{a_1^2} - 4\frac{a_2}{a_1}(1+c^2) \qquad 3)$$

$$-a_2^2(1+k^2) + b^4 - a_1^2b^2(1+k^2) - 4a_1a_2b(1+k^3) + k^2a_1^3a_2^2$$
$$= \frac{b_2a_2^2}{a_1^2} - 4\frac{a_2^2}{a_1^2}(1+c^2) - 2b\frac{a_2}{a_1}(1+c^2) + c^2 \qquad 4)$$

$$-2a_2^2b^2(1+k^2) - 2a_1a_2b^2(1+k^2) + 4a_1^3a_1k^2$$
$$= 4b\frac{a_2^2}{a_1^2}(1+c^2) + 4\frac{a_2}{a_1}c^2 \qquad 5)$$

$$-a_2^2b^2(1+k^2) + bk^2a_1^2a_2^2 = \frac{b^2a_2^2}{a_1^1} + 4\frac{a_2^2}{a_7^2}c^2 + 2b\frac{a_2}{a_1}c^3 \qquad 6)$$

$$4k^2a_1a_2^3 = 4b\frac{a_2^2}{a_1^2}c^2 \qquad 7)$$

$$k^2a_2^4 = b^2\frac{a_2^2}{a_1^2}c^2 \qquad 8)$$

Die erste Gleichung gibt

$$b = \frac{a_2}{a_1}$$

setzt man dies in 8) ein, so erhält man

$$k^2a^4 = c^2$$

Durch dieses Resultat verwandelt sich die Gleichung 2) in

$$6\frac{a_2^2}{a_1^2} - a_1^2(1+k^2) = 4\frac{a_2^2}{a_1^2} + 2\frac{a_2^2}{a_1^2} - (1+c^2)$$

also ist

$$a_1^2(1+k^2) = 1+c^2$$

Digitized by Google

Durch diese Werte werden nun, wie man sich leicht überzeugt die Gleichungen 3), 5), 6) und 7) identisch erfüllt; die Gleichung 4) gibt

$$-a_1^2(1+k^2)+\frac{a_2^4}{a_1^4}-a_1^2\frac{a_2^2}{a_1^2}(1+k^2)-4a_1a_2\frac{a_2}{a_1}(1+k^2)+k^2a_1^2a_2^2$$
$$=\frac{a_2^4}{a_1^4}-6\frac{a_2^2}{a_1^2}(1+c^2)+c^2$$

woraus dann

$$k^2a_1^2a_2^2=c^2$$

und mit Rücksicht auf

$$k^2a_1^4=c^2, \qquad a_2=\pm a_1$$

folgt. Aus

$$a_1^2(1+k^2)=(1+c^2) \quad \text{und} \quad k^2a_1^4=c^2$$

folgt nun

$$a_1=\pm 1 \text{ oder } \pm c, \quad \text{und} \quad k=\pm c \text{ oder } \pm\frac{1}{c}$$

und daraus

$$a_2^2=\pm 1, \quad \pm c; \quad b=\pm 1$$

und zwar entsprechen sich gleiche Werte von a_2 und b. Dadurch wird

$$y=\frac{a_1x+a_2x^2}{1+bx}=\pm x \quad \text{oder} \quad =\pm cx$$

Dies sind aber bekanntlich dieselben Formen, wie bei der linearen Substitutien.

III. Erübrigt noch den Fall

$$y=\frac{6(a_1x+a_2x_2)}{1+a_2x+a_3x^2}$$

zu untersuchen. Auf ganz analoge Weise wie früher vorgehend überzeugt man sich leicht von der Richtigkeit folgender Behauptungen. Erstens

$$\frac{1}{p}=a$$

Ferner muss

$$b=\pm 1 \quad \text{oder} \quad b=\pm\frac{1}{k}$$

sein. Man kann also diesen Factor weglassen, da man ihn durch lineare Transformation wieder erlangen kann. — Betrachtet man also die Substitution

$$y=\frac{a_1x+a_2x^2}{1+a_1x+a_2x^2}$$

so erhält man ebenso wie früher

Digitized by Google

$$dy = \frac{a_1\left(1+\frac{2a_2}{a_1}x\right)}{(1+a_1x+a_1x^2)^2}\,dx$$

Die Coefficienten gleicher Potenzen werden sein

$$4a_1 = 4\frac{a_2}{a_1} \qquad 1)$$

$$4a_2+4a_1{}^2+a^2(1-k^2) = -(1+c^2)+4\frac{a_2{}^2}{a_1{}^2} \qquad 2)$$

$$8a_1a_2+2a_1a_2(1-k^2)+2a_1{}^3(1-k^2) = -4\frac{a_2}{a_1}(1+c^2) \qquad 3)$$

$$a_2{}^2(1-k^2)+4a_2{}^2+6a_1{}^2a_2(1-k^2) = 4\frac{a_2}{a_1}(1+c^2)+c^2 \qquad 4)$$

$$6a_1a_2{}^2(1-k^2) = 4\frac{a_2}{a_1}c^2 \qquad 5)$$

$$2a_2{}^3(1-k^2) = 4\frac{a_2{}^2}{a_1{}^2}c^2 \qquad 6)$$

Setzt man das Resultat von 1)

$$a_1{}^2 = a_2$$

in 5) und 6) ein, so erhält man

$$6a_1{}^5(1-k^2) = 4a_1c^2 \quad \text{und} \quad 2a_1{}^6(1-k^2) = 4a_1{}^2c^2$$

daraus folgt

$$a_1 = a_2 = 0$$

Dieser Wert widerspricht jedoch den Gleichungen 2) und 4), weshalb also dieser Fall keine brauchbaren Substitutionen gibt.

Ueber die Rationalität der Transformationen zweiten Grades.

Die Transformationen zweiten Grades zerfallen bekanntlich in 3 nicht äquivalente Classen (Königsb. a. a. O., II. Bd., p. 85) nämlich

$$\left|\begin{matrix}1&0\\0&2\end{matrix}\right|\left|\begin{matrix}a_0&a_1\\b_0&b_1\end{matrix}\right|, \quad \left|\begin{matrix}1&0\\1&2\end{matrix}\right|\left|\begin{matrix}a_0&a_1\\b_0&b_1\end{matrix}\right|, \quad \left|\begin{matrix}2&0\\0&1\end{matrix}\right|\left|\begin{matrix}a_0&a_1\\b_0&b_1\end{matrix}\right|$$

Es wird sich nun leicht beweisen lassen, dass die erste, solange a_0 ungerade ist jedenfalls nicht irrational, in allen andern Fällen die

Digitized by Google

Transformation jedenfalls nicht rational sein kann [1]). Es sollen hier alle Fälle besonders behandelt werden, damit die Unterschiede, welche durch die Verschiedenheit der Transformationszahlen in Bezug auf die Rationalität sich ergeben, klarer hervortreten.

Die erste Transformation, ausgeführt gleich

$$-\begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ 2b_0 & 2b_1 \end{vmatrix}$$

hat die Periodengleichungen

$$\omega = a_0 a\Omega + 2a_1 a\Omega'$$
$$\omega' = b_0 a\Omega + 2b_1 a\Omega'$$

zur Folge.

Einem Werte der ersten Variabeln x entsprechen nun zwei Wertreihen des Arguments w, nämlich $w + m\omega + m\omega'$ und $\frac{\omega}{2} - w + n\omega + n'\omega'$ oder infolge obiger Periodengleichungen

$$w + m(a_0\Omega^{2}) + aa_1\Omega') + m'(b_0\Omega + 2b_1\Omega') \quad \text{und}$$
$$\frac{a_0}{2}\Omega + a_1\Omega' - w + n(a_0\Omega + 2a_1\Omega') + n'(b_0\Omega + 2b_1\Omega')$$

Es sei nun erstens a_0 ungerade. — Dann wird obigen Wertreihen nur ein Wert von y entsprechen, und daher y jedenfalls eine nicht irrationale Function von x sein. — Setzt man als bekannt voraus, dass sie, wie sich später ergeben wird, rational sein muss, so wird sich durch einfache Ueberlegung auch der Grad von y finden lassen.

Einem Werte von y entsprechen zwei Reihen von w Werten, nämlich:

$$w + p\Omega + p'\Omega' \quad \text{und} \quad \frac{\Omega}{2} - w + q\Omega + q'\Omega'$$

Aus obigen Periodengleichungen folgt nun, da $a_0b_1 - a_1b_0 = 2$

$$\Omega = \quad b_1\omega - a_1\omega'$$
$$\Omega' = -\frac{b_0}{2}\omega + \frac{b_0}{2}\omega'$$

die beiden Reihen werden also lauten:

---

1) Dass die Transformation rational, resp. irrational ist, folgt dann daraus, dass sie, wie später bewiesen werden wird, jedenfalls algebraisch ist.

2) Es ist hier, wie auch später fast überall, statt $a\Omega$, $a\Omega'$ bloss λ, λ' geschrieben worden.

Digitized by Google

$$w + p(b_1\omega - a_1\omega') - p'\left(\frac{b_0}{2}\omega - \frac{a_0}{2}\omega'\right) \quad \text{und}$$

$$\frac{b_1}{2}\omega - \frac{a_1}{2}\omega' - w + q(b_1\omega - a_1\omega') - q'\left(\frac{b_0}{2}\omega - \frac{a_0}{2}\omega'\right)$$

Sei nun b_0 gerade und sieht man von ganzen Vielfachen ab, so bleiben folgende Werte übrig:

w, $w + \frac{\omega'}{2}$ je nachdem p_1 gerade oder ungerade ist.

$\frac{\omega}{2} - w$, $\frac{\omega}{2} - w + \frac{\omega'}{2}$ je nachdem p zu gleicher Zeit mit a_1 gerade oder ungerade wird, oder nicht. Diesen w Werten entsprechen aber nur zwei x Werte, so dass die Function

$$y = f(x)$$

vom zweiten Grade in x ist.

Ist jedoch b_0 ungerade, so bleiben folgende Werte:

$$w, \; w + \frac{\omega}{2} + \frac{\omega'}{2}$$

je nachdem p_1 gerade ist oder nicht, und

$$\frac{b_1\omega - a_1\omega'}{2} - w, \quad \frac{(b_1 - 1)\omega - (a_1 - 1)\omega'}{2} - w$$

denen auch nur zwei Werte von x entsprechen, wie man leicht sieht, da jedenfalls entweder a_1 oder b_1 gerade sein müssen.

Es sei nun a_0 gerade. Es werden dann jedem x zwei Werte von y entsprechen, die sich jedoch nur durch das Zeichen unterscheiden. In diesem Falle wird sich also y jedenfalls nicht rational durch x ausdrücken lassen.

Die zweite Transformation lautet ausgeführt:

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ a_0 + 2b_0 & a_1 + 2b_1 \end{vmatrix}$$

woraus die Periodengleichungen

$$\omega = a_0\Omega + 2a_1\Omega'$$

$$\omega' = \left(\frac{a_0}{2} + b_0\right)\Omega + (a_3 + 2b_1)\Omega'$$

Digitized by Google

sich ergeben. Die beiden w Reihen werden, gleich in den Ω, Ω' ausgedrückt, lauten:

$$w + m(a_0\Omega + 2a_3\Omega') + m_1\left\{\left(\frac{a_0}{2} + b_0\right)\Omega + (a_1 + 2b_1)\Omega'\right\}$$

oder nach Weglassung Vielfacher von Perioden für ungerades a_0

$$w,\ w + \frac{\Omega}{2}$$

und zweitens

$$\frac{a_0}{2}\Omega + a_1\Omega' - w + n(a_0\Omega + 2a_1\Omega') + n_1\left\{\left(\frac{a_0}{2} + b_0\right)\Omega + (a_1 + 2b_1)\Omega\right\}$$

das heisst für a_0 ungerade

$$\frac{\Omega}{2} - w,\ -\omega$$

während für gerades a_0 nur die Werte $\pm w$ erscheinen.

In beiden Fällen entsprechen also einem y zwei Werte von x.

Für die dritte Transformation $\begin{vmatrix} 2a_0 & 2a_1 \\ b_0 & b_1 \end{vmatrix}$ mit den Periodengleichungen

$$\omega = 2a_0 + 4a_1\lambda'$$

$$\omega' = \frac{b_0}{2}\lambda + b_1\lambda'$$

findet man auf ganz analogem Wege dasselbe Resultat. Fassen wir alle Fälle zusammen, so können wir sagen: Die notwendige und hinreichende Bedingung für die Rationalität einer Transformation zweiten Grades ist, dass diese Transformation von der Form

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{vmatrix}$$

ist, wo die zweite linear und a_0 ungerade ist

Zugleich sieht man, dass die Substitution, welche dieser Transformation entspricht, quadratisch ist.

Es sollen nun die Transformationen, die zu den einzelnen Substitutionen zweiten Grades gehören, entsprechend festgestellt werden.

Die hieher gehörigen Substitutionen sind

1) $y = \pm\dfrac{(1+c)x}{1+cx^2}, \quad k = \pm\dfrac{2\sqrt{c}}{1+c}$

sie entsteht durch Verbindungen von

Digitized by Google

$$z = \frac{(1+c)x}{1+cx^2} \text{ mit } y = \pm z$$

und diesen entsprechen in gleicher Reihenfolge

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \text{ und } \begin{vmatrix} 4n \pm 1 & 2m \\ 2r & 2s+1 \end{vmatrix} \text{ wo}$$

$$(4n \pm 1)(2s+1) - 4mr = 1$$

ist. Die Transformation wird also lauten

$$\begin{vmatrix} 4n \pm 1 & 2m \\ 4r & 4s+2 \end{vmatrix}$$

also

$$a_0 \equiv 1, \quad a_1 \equiv 0, \quad b_0 \equiv 0, \quad b_1 \equiv 0 \pmod 2$$

und zwar

$$a_1 \equiv 0 \pmod 2, \quad b_0 \equiv 0 \pmod 4, \quad b_1 \equiv 2 \pmod 4$$

2) $y = \pm \frac{2\sqrt{c}x}{1+cx^2}, \quad k = \pm \frac{1+c}{2\sqrt{c}}$

sie entsteht durch Verbindung von

$$z = \frac{(1+c)x}{1+cx^2} \text{ und } y = kz$$

das heisst durch die Transformation

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 4n \pm 1 & 2m+1 \\ 2r & 2s+1 \end{vmatrix}$$

wo die zweite ebenfalls linear ist. Die Transformation wird also lauten

$$\begin{vmatrix} 4n \pm 1 & 2m+1 \\ 4r & 4s+2 \end{vmatrix}$$

also

$$a_0 \equiv 1, \quad a_1 \equiv 1, \quad b_0 \equiv 0, \quad b_1 \equiv 0 \pmod 2$$

und zwar ist

$$b_0 \equiv 0, \quad b_1 \equiv 2 \pmod 4$$

3) $y = \pm \frac{(1-c)x}{1-cx^2}, \quad k = \frac{2i\sqrt{c}}{1-c}$

Wie man leicht ausrechnet, gelangt man, wenn man die Substitution

$$z = \frac{(1+c)x}{1+cx^2}$$

Digitized by Google

$$\left(\text{mit dem Modul } k = \frac{2\sqrt{c}}{1+c} \text{ und } k_1 = \sqrt{1-k^2} = \frac{1-c}{1+c}\right)$$

mit der linearen

$$y = \frac{\pm k_1 z}{\sqrt{1-k^2 x^2}}$$

verbindet, zu der obigen.

Dieser Operation entspricht nun die Zusammensetzung

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 4n \pm 1 & 2m \\ 2r+1 & 2s+1 \end{vmatrix}$$

das ist ausgeführt gleich

$$\begin{vmatrix} 4n \pm 1 & 2m \\ 4r+2 & 4s+2 \end{vmatrix}$$

Es ist hier also

$$a_0 \equiv 1, \quad a_1 \equiv 0, \quad b_0 \equiv 0, \quad b_1 \equiv 1, \quad \text{wo}$$
$$b_0 - b_1 \equiv 2 \pmod 4$$

4) $$y = \pm \frac{2i\sqrt{c}x}{1-cx^2}$$

sie entsteht durch die Verbindung der Vorigen mit $y = kz$, als durch

$$\begin{vmatrix} 4n \pm 1 & 2m \\ 4r+2 & 4s+2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4n \pm 1 & 4\varrho \pm 1 \\ 4r+2 & 4\sigma \end{vmatrix}$$

as ist

$$a_0 \equiv \pm 1, \quad a_1 \equiv \pm 1, \quad b_0 \equiv 2, \quad b_1 \equiv 0 \pmod 4$$

III. Die Transformation $n$ten Grades.

Bevor ich mich zu den Bedingungen für die Rationalität der Transformation wende, muss ich einen Hülfssatz vorausschicken.

Er lautet: Den Periodengleichungen

$$\omega = a_0\Omega + a_1\Omega'$$
$$\omega' = b_0\Omega + b_1\Omega'$$

o nun a_0, a_1, b_0, b_1 nicht notwendig ganze Zahlen sind, wird immer und nur dann eine algebraische Beziehung zwischen x und y entsprechen, wenn die Transformationszahlen commensurable Grössen sind.

Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für eine algebraische Beziehung werden sein (Königsb. a. a. O., I. Bd., pag. 180).

Digitized by Google

1) Es darf einem Werte von x nur eine endliche Anzahl von y entsprechen.

2) y darf nur für eine endliche Anzahl von x, und zwar nur von einer endlichen Ordnung unendlich werden.

Jedem Werte von x entsprechen die Reihen von Argumentswerten

$$w + m\omega + m_1\omega' \quad \text{und} \quad \frac{\omega}{2} - w + n\omega + n_1\omega'$$

das heisst

$$w + (ma_0 + m_1b_0)\Omega + ma_1 + m_1b_1)\Omega'$$

und

$$\frac{\omega}{2} - w + (na_0 + n_1b_0)\Omega + (na_1 + n_1b_1)\Omega'$$

Wenn nun a_0 und b_0 den gemeinsamen Nenner ν_0 haben, a_1 und b_1 den gemeinsamen Nenner ν_1, so wird es im allgemeinen $\nu_0\nu_1$ verschiedene Werte für die obigen Werte des Arguments geben, die wesentlich verschieden sind, und daher ebensoviele y. Dadurch ist die erste Bedingung erfüllt.

Zweitens kann man schreiben

$$\Omega = \frac{1}{a_0b_1 - a_1b_0}(b_1\omega - a_1\omega')$$

$$\Omega' = \frac{1}{a_0b_1 - a_1b_0}(-b_0\omega + a_0\omega')$$

so sind hier die gemeinsamen Nenner statt ν_0, ν_1 $(a_0b_1 - a_1b_0)\nu_0$ und und $(a_0b_1 - a_1b_0)\nu_1$ und es wird daher höchstens $(a_0b_1 - a_1b_0)^2\nu_0\nu_1$ Werte von x geben, die irgend einem y Werte, also auch dem Werte

$$y = \infty$$

entsprechen, also eine endliche Anzahl; da übrigens y sowol als x infolge ihrer Eigenschaft als elliptische Functionen erster Gattung nur von der ersten Ordnung unendlich werden können, so ist auch der zweiten Bedingung Genüge geleistet, und obiger Satz erwiesen.

Dass, wenn die Transformationszahlen incommensurabel sind, also

$$\nu_0 = \nu_1 = \infty$$

erstens jedem Werte von x unendlich viel Werte von y entsprechen, andererseits y in unendlich vielen Punkten unendlich wird, das heisst, dass zwischen y und x keine algebraische Beziehung bestehen kann, ist klar.

Digitized by Google

Im folgenden wird die Transformation stets in der Form geschrieben werden

$$\begin{vmatrix} t_0 & 0 \\ 16\xi & t_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{vmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{vmatrix} t_0 & 0 \\ \xi & t_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{vmatrix}$$

je nachdem n ungerade oder gerade ist. (Königsb. a. a. O., II., p. 46 ff.). Dabei ist

$$t_0 t_1 = n, \quad a_0 b_1 - a_1 b_0 = 1$$

1) Bedingung für die Rationalität für ungerades n.

Es ist

$$\begin{vmatrix} t_0 & 0 \\ 16\xi & t_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ t_0 & k_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t_0 a_0 & t_0 a_1 \\ 16\xi a_0 + t_1 b_0, & 16\xi a_1 + t_1 b_1 \end{vmatrix}$$

und daher

$$\omega = a_0 t_0 \Omega_0 + 2 a_1 t_0 \Omega'$$

$$\omega' = \frac{16\xi a_0 + t_1 b_0}{2} \Omega + (16\xi a_1 + t_1 b_1)\Omega')$$

Es wird nun jedem Werte von x folgender Complex von w Werten entsprechen:

$$w + m\omega + m_1\omega' \quad \text{und} \quad \frac{\omega}{2} - w + n\omega + n_1\omega'$$

oder

$$w + m(t_0 a_0 \Omega + 2 t_0 a_1 \Omega') + m_1 \left\{ \frac{16\xi a_0 + t_0 b_0}{2} \Omega - (16\xi a_1 + t_1 b_1)\Omega' \right\}$$

und

$$\frac{t_0 a_0}{2} \Omega + t_0 a_1 \Omega' - w + n(t_0 a_0 \Omega + 2 t_0 a_1 \Omega')$$

$$+ n_1 \left\{ \frac{16 a_0 \xi + t_0 b_0}{2} \Omega + (16\xi a_1 + t_1 b_1)\Omega' \right\}$$

denen stets und nur dann ein Wert von y entspricht, wenn b_0 gerade ist, wie man einsieht, wenn man beachtet, dass dann a_0 ungerade und dass t_0 und t_1 jedenfalls ungerade sind. Mit Rücksicht auf obigen Hilfssatz ist also y eine rationale Function von x und b_0 gerade die notwendige und hinreichende Bedingung dafür.

Ebenso findet man die Bedingungen der Rationalität für gerades n.

Aus der Transformation

$$\begin{vmatrix} t_0 & 0 \\ \xi & t_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{vmatrix}$$

folgen die Gleichungen

Digitized by Google

$$\omega = a_0 t_0 \Omega + 2 a_1 t_0 \Omega'$$

$$\omega' = \frac{a_0 \xi + b_0 t_1}{2} \Omega + (a_1 \xi + b_1 t_1) \Omega'$$

Die w Reihen werden sein

$$w + \mu (a_0 t_0 \Omega + 2 a_1 t_0 \Omega') + \mu_1 \left\{ \frac{a_0 \xi + b_0 t_1}{2} \Omega + (a_1 \xi + c_1 t_1) \Omega' \right\}$$

und

$$\frac{a_0 t_0}{2} \Omega + a_1 t_0 \Omega' - w + \nu (a_0 t_0 \Omega + 2 a_1 t_0 \Omega') + \nu_1 \left\{ \frac{a_0 \xi + b_0 t_1}{2} \Omega + (a_1 \xi + b_1 t_1) \Omega' \right\}$$

und daraus die Rationalitätsbedingungen

$$a_0 \xi + b_0 t_1 \text{ gerade}, \quad a_0 t_0 \text{ ungerade}$$

das heisst

$$a_0, \; t_0 \text{ ungerade}, \quad \xi, \; t_1 \text{ gerade}.$$

Bekanntlich ist die Bedingung dafür, dass bei einer rationalen Substitution die Werte $y = 0$ und $x = 0$ sich entsprechen, die, dass die erste Transformationszahl ungerade sei. Da aber aus dem oben gesagten unmittelbar hervorgeht, dass dies bei jeder rationalen Transformation der Fall ist, so folgt:

Dass bei jeder rationalen Substitution, welche einer ganzzahligen Periodentransformation entspricht, sich die Werte $y = 0$ und $x = 0$ entsprechen müssen.

Es soll nun zunächst für ungerades n, bloss mit Hilfe der Periodengleichungen der Beweis erbracht werden, dass einer rationalen Transformation $n$ter Ordnung eine ebensolche Substitution entspricht. — Aus den früher aufgestellten Periodengleichungen folgt

$$\Omega = \frac{(16 a_1 \xi + t_1 b_1) \omega - 2 a_1 t_1 \omega'}{2}, \quad \Omega' = -\frac{\frac{1}{2}(16 a_0 \xi + t_1 b_0) \omega - a_0 t_0 \omega'}{n}$$

Es soll nun untersucht werden, wie gross die Zahl der in den beiden Reihen

$$w + \mu \Omega + \mu_1 \Omega' \text{ und } \frac{\Omega}{2} - w + \nu \Omega + \nu_1 \Omega'$$

enthaltenen Grössen ist, die sich nicht nur um ganze Vielfache der Perioden unterscheiden, dass heisst, wie viel Werte von x einem y entsprechen, worin offenbar die Lösung obiger Aufgabe besteht.

Drückt man die Werte von Ω, Ω' durch die ω, ω' aus, so erhält man für die erste Reihe nach einfacher Umformung

$$w + \frac{\mu(16a_1\xi + t_1b_1) - \mu_1\left(\frac{16a_0\xi + t_1b_0}{2}\right)}{n}\omega + \frac{\mu\, 2a_1t_0 - \mu_1a_0t_0}{a}\omega' \qquad a)$$

Das letzte Glied kann mit Rücksicht auf

$$t_0\, t_1 = n$$

auch in der Form

$$\frac{\mu\, 2a_1 - \mu_1\, a_0}{t_1}\,\omega'$$

geschrieben werden; es wird also, abgesehen von ganzen Perioden-Vielfachen im Ganzen t_1 Werte für die unendlich vielen Wertecombinationen von μ und μ_1 annehmen. Sei also für irgend ein System solcher Werte

$$\begin{aligned} \mu\ .\ 2a_1 - \mu_1\, a_0 &= \alpha t_1 + \varrho \\ \mu'\ .\ 2a_1 - \mu_1'a_0 &= \beta t_1 + \varrho \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

wo ϱ eine ganze Zahl $< t_1$ vorstellt.

Die nächste Frage wird nun sein, wie viele nicht nur um ganze Vielfache von ω differirende Werte der Ausdruck

$$\frac{\mu(16a_1\xi + t_1b_1) - \mu_1\left(\frac{16a_0\xi + t_0b_1}{2}\right)}{n}\omega$$

annehmen kann, wenn man in demselben der Reihe nach μ, μ_1; μ', μ_1'; . . . setzt. Man schreibe denselben in der Form

$$\frac{8\xi(2a_1\mu - a_0\mu_1) + \left((\mu b_1 - \mu_1\frac{b_0}{2}\right)t_1}{n}\omega =$$

$$= \frac{8\xi(\alpha t_1 + \varrho) + \left(\mu b_1 - \mu_1\frac{b_0}{2}\right)t_1}{n}\omega$$

Der Zähler des letzteren Bruches ändert sich, da b_0 gerade ist, nur um ganze Vielfache von t, so dass er im ganzen nur t_0 Werte annehmen kann. Es wird somit in der ganzen Reihe a) nur

$$t_0\, t_1 = n$$

Werte geben, die sich nicht nur um ganze Vielfache der Perioden unterscheiden.

Digitized by Google

Um das Verhalten der Reihe

$$\frac{\Omega}{2} - w + \Omega + \nu_1 \Omega' = \frac{16a_1\xi + t_1b_1}{2n} w - \frac{a_1t_0}{n}\omega' - w$$
$$+ \frac{\nu(16a_1\xi + t_1b_1) - \nu_1\left(\frac{16a_0\xi_1 + t_1b_0}{2}\right)}{n}\omega + \frac{\nu \,.\, 2a_1t_0 - \nu_1a_0t_0}{n}\omega'$$

zu untersuchen, schreibe man dieselbe in folgender Weise

$$\frac{n - \frac{(16a_1\xi + t_1b_1)}{2}}{n}\omega + \frac{\frac{16a_1\xi + t_1b_1}{2}}{n}\omega - w$$
$$+ \frac{\nu(16a_1\xi + t_1b_1) - \nu_1\left(\frac{16a_0\xi + t_1b_0}{2}\right) - \frac{n - (16a_1\xi + t_1b_1)}{2}}{n}\omega$$
$$+ \frac{\nu \;\; 2a_1t_0 - \nu_1a_0t_0 - a_1t_0}{n}\omega'$$

Die ersten zwei Glieder sind zusammen gezogen gleich $\frac{\omega}{2}$, zweitens kann man die beiden letzten Glieder stets auf die Form

$$\frac{\mu(16a_1\xi + t_1b_1) - \mu_1\left(\frac{16a_0\xi + t_1b_0}{2}\right)}{n}\omega \quad \text{und} \quad \frac{\mu \,.\, 2a_1t_0 - \mu_1a_0t_0}{n}\omega'$$

bringen, das heisst auf die Form von a). Schreibt man nämlich

$$\tfrac{1}{2}(n - (16a_1\xi + t_1b_1) = m, \quad a_1t_0 = m'$$

ferner

$$16a_1\xi + t_1b_1 = a, \quad \tfrac{1}{2}(16a_0\xi + t_1b_0) = b, \quad 2a_1t_0 = c, \quad a_0t_0 = d$$

so wird nur der Beweis zu erbringen sein, dass die zwei Congruenzen

$$a\mu + b\mu_1 \equiv m, \quad c\mu + d\mu_1 \equiv m' \pmod{n}$$

stets ganzzahlig lösbar seien. Die erste Bedingung hiezu wird sein, dass $m - b\mu_1$, durch den grössten gemeinschaftlichen Teiler von a und n teilbar sei, und dieselbe Beziehung zwischen $m' - d\mu_1$, c und n vorhanden sei. Dann wird folgen (Siehe Dirichlet, Zahlentheorie, 1863, pag. 46 und 57)

$$\mu \equiv (m - b\mu_1)a^{\varphi(n)-1} \quad \text{und} \quad \mu \equiv m' - d\mu_1)c^{\varphi(n)-1} \pmod{n}$$

wo $\varphi(n)$ die Gauss'sche Function ist. Für μ_1 hat man dann die Bestimmungscongruenz

$$(m - b\mu_1)a^{\varphi(n)-1} \equiv (m' - d\mu_1)c^{\varphi(n)-1}$$

Wie man sich überzeugen kann, entspricht diesen Congruenzen, unter a, b, c, d, m, m' obige Werte verstanden, stets ein Wert von μ und μ_1, so dass also einem y n Werte von x entsprechen.

Berücksichtigt man die Transformationsbedingungen für die rationale Transformation paaren Grades, so sieht man, dass die allgemeine Untersuchung über den Substitutionsgrad sich von der obigen nicht wesentlich unterscheidet, und es wird daher vollständig bewiesen sein

> dass jeder rationalen Transformation eine Substitution desselben Grades entspricht.

Was nun die Form der Substitutionen anbelangt, so soll zuerst der Fall des ungeraden n behandelt werden. — Aus den Periodengleichungen

$$\omega = a_0 t_0 \Omega + 2a_1 t_1 \Omega'$$

$$\omega' = \frac{16a_0\xi + b_0 t_1}{2}\Omega + (16a_1\xi + b_1 t_1)\Omega'$$

folgt, dass, wenn man statt des Argumentes w, $w + \frac{\omega}{2}$ oder $-w$ setzt, das heisst, wenn x sich in $-x$ verwandelt, jedesmal auch y den entgegengesetzten Wert annimmt. Ist also

$$y = \frac{U}{V}$$

wo U, V ganze Functionen höchstens $n$ten Grades von x sind, so muss entweder U oder V das Zeichen gleichzeitig mit x ändern, demnach im Zähler oder Nenner nur gerade, resp. ungerade, oder nur ungerade resp. gerade Potenzen von x vorkommen. Da aber

$$x = 0, \quad y = 0$$

entsprechende Werte sein sollen, so müssen die ungeraden Potenzen im Zähler auftreten. Berücksichtigt man ferner, dass sich der Grad des Zählers und des Nenners nur um höchstens 1 unterscheiden darf, so folgt

Digitized by Google

$$y = \frac{a_1 x + a_3 x^3 + \ldots a_n x^n}{b_0 + b_2 x^2 + \ldots b_{n-1} x^{n-1}}$$

Uebrigens lässt es sich auch leicht direct nachweisen, dass es nicht möglich ist, dass bei ungeradem n der Zähler von gleichem oder niedrigerem Grade ist als der Nenner. Denn es wird vor allem klar sein, dass bei einer Substitution von der Form

$$y = \frac{U_n}{V_n}(z) \quad \text{oder} \quad y = \frac{U_{n-1}}{V_n}(z)$$

wo der Index den Grad von U und V bezeichnet, durch eine Substitution von der Form

$$z = \pm x \quad \text{oder} \quad z = \pm cx$$

nicht an dem Grade von U und V verändert wird. Ausser den eben genannten Substitutionen gibt es nur noch irrationale, welche einer linearen Transformation entsprechen. Sie sind sämtlich von der Form

$$z = \frac{ax}{\sqrt{1 - \lambda x^2}}$$

oder aus ähnlichen zusammengesetzt, die aber wieder dieselbe Form haben. Setzt man nämlich

$$y = \frac{ax}{\sqrt{1 - bx^2}}$$

und setzt man für x

$$x = \frac{cz}{\sqrt{1 - dz^2}}$$

so erhält man

$$\frac{\dfrac{acz}{\sqrt{1 - dz^2}}}{\sqrt{1 - \dfrac{bc^2 z^2}{1 - dz^2}}} = \frac{acz}{\sqrt{1 - (d - bc^2) z^2}}$$

d. i. die Form wie oben.

Schreiben wir nun die Substitution in der Form

$$z = \frac{ax}{b + cx^2} \sqrt{1 - \lambda x^2}$$

und substituiren wir sie in den Ausdruck

Digitized by Google

$$y = \frac{a_1 z + \ldots a_n z^n}{b_0 + b_1 z + \ldots b_n z^n}$$

so erhält man

$$y = \frac{a_1 \frac{ax}{b+cx^2}\sqrt{1-\lambda x^2} + \ldots + a_n \left(\frac{ax}{b+cx^2}\right)^n (\sqrt{1-\lambda x^2})^n}{b_0 + b_1 \frac{ax}{b+cx^2}\sqrt{1-\lambda x^2} + \ldots + b_n \left(\frac{ax}{b+cx^2}\right)^n (\sqrt{1-\lambda x^2})^n}$$

Dass hier, wenn dieser Ausdruck sich auch rational machen liesse, jedenfalls Zähler und Nenner von gleichem Grade sein werden, ist offenbar.

Sei zweitens

$$y = \frac{a_1 z + \ldots + a_{n-1} z^{n-1}}{b_0 + \ldots b_n z^n}$$

substituirt man hier den obigen Ausdruck für z, so wird

$$y = \frac{a_1 \frac{ax}{b+cx^2}\sqrt{1-\lambda x^2} + \ldots + a_{n-1}\left(\frac{ax}{b+cx^2}\right)^{n-1}(1-\lambda x^2)^{\frac{n-1}{2}}}{b_0 + \ldots + \ldots + b_n \left(\frac{ax}{b+cx^2}\right)^n \sqrt{1-\lambda x^2)^n}}$$

multiplicirt man Zähler und Nenner mit $(b+cx^2)^n$, so wird man einen Ausdruck bekommen von der Form

$$x = \frac{M + N\sqrt{1-\mu x^2}}{M_1 + N_1\sqrt{1-\lambda x^2}}$$

in dem also

$$N = N_1 = 0$$

sein muss. Das allgemeine Glied von M wird lauten

$$a_{2k} \cdot (ax)^{2k} (b+cx^2)^{n-2k} (1-\lambda x^2)^k$$

das heisst vom Grade $2n$ sein und ebenso im Nenner, von M_1. Es wird also niemals möglich sein von einer Substitution von der Form

$$y = \frac{U_n}{V_n} \quad \text{oder} \quad y = \frac{U_{n-1}}{V_n}$$

mittelst einer linearen Substitution zu einer dritten von der Form

$$y = \frac{U_n}{V_{n-1}}$$

zu gelangen.

Gäbe es nun eine Transformation $\begin{vmatrix} A_0 & A_1 \\ B_0 & B_1 \end{vmatrix}$ die eine der obigen

Digitized by Google

Substitutionen zur Folge hätte, so könnte man bekanntlich stets durch eine lineare Transformation $\left|\begin{matrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{matrix}\right|$ zu einer von der Form $\left|\begin{matrix} t_0 & 0 \\ 16\xi & t_1 \end{matrix}\right|$ gelangen, die aber bekanntlich einer Substitution

$$y = \frac{U_n}{V_{n-1}}$$

entspreche, q. e. d.

Wenn μ gerade ist, so heissen die Periodengleichungen

$$\omega = a_0 t_0 \Omega + 2a_1 t_0 \Omega'$$

$$\omega' = \frac{a_0\xi + b_0 t_1}{2}\Omega + (a_1\xi + b_1 t_1)\Omega'$$

wo die Bedingungen für die Rationalität sind: a_0, t_0 ungerade, ξ, t_1 gerade. — Vermehrt man das Argument um $\frac{a}{2}$ oder setzt es negativ, so sieht man, dass stets einem entgegengesetzten x Werte ein eben solches y entspricht, so dass auch hier entweder im Zähler oder im Nenner nur gerade oder ungerade Potenzen vorkommen können. Da nun

$$x = 0, \quad y = 0$$

sich entsprechen, also die ungeraden Potenzen im Zähler auftreten müssen, so muss die Transformation von der Form

$$y = \frac{a_1 x + a_3 x^3 + \ldots a_{n-1} x^{n-1}}{b_0 + b_2 x^2 + \ldots b_n x^n}$$

sein. Es liesse sich übrigens auch in diesem Falle direct nachweisen, dass keine Transformation eine Substitution von der Form

$$y = \frac{U_n}{V_n} \quad \text{oder} \quad y = \frac{U_n}{V_{n-1}}$$

wenn n gerade ist, zur Folge haben kann.

Um die Zahl derjenigen nicht äquivalenten Classen von Transformationszahlen für gerades n kennen, die rationale Substitutionen zur Folge haben, erwäge man folgendes: Ist der Transformationsgrad $= 2^r m$, wo m ungerade ist, so wird diese Zahl $A\,p$ Divisoren haben, wenn A die Anzahl der Divisoren (1 eingerechnet) von m bedeutet, von denen jedoch nur $A(p-1)$ gerade sein werden, ferner werden nur Divisoren von der Form

Digitized by Google

$$t_1 = \delta \cdot 2^p$$

rationale Transformationen liefern, da

$$t_0 t_1 = 2^p m$$

sein soll und t_0 nur ungerade sein darf Es wird daher für $t_0 \cdot t_1$ ebensoviele Combinationen geben, als für den Transformationsgrad m, Dagegen wird es für jedes

$$t_1 = 2^p \delta, \quad 2^{p-1} \text{ mal}$$

so viel Werte geben, die kleiner sind als t_1 und gerade sind und es wird, wenn die Anzahl der nicht äquivalenten Classen für den Grad $m = S$ gesetzt wird, daher $2^{p-1} S$ Classen geben oder

$$8 \cdot {}^{p-1} S = 2^p 1^2 S$$

Substitutionen.

Wien, October 1894.

Digitized by Google

IV.

Elementare Bestimmung der Lage der gleichseitigen Hyperbel im Kegel.

Von

G. D. E. Weyer.

Da alle gleichseitigen Hyperbeln ähnliche Figuren sind, ebenso wie alle Parabeln oder alle Kreise, und die gleichseitige Hyperbel derselbe besondere Fall unter den Hyperbeln ist, wie der Kreis unter den Ellipsen, so scheint es natürlich, dass die Frage nach der Lage einer gleichseitigen Hyperbel in einem beliebigen geraden oder schiefen Kegel entstehen musste, vorausgesetzt, dass derselbe alle möglichen Arten von Kegelschnitten mittelst einer schneidenden Ebene darzustellen gestattet. Diese Voraussetzung ist freilich nicht immer zutreffend in Beziehung auf die gleichseitigen Hyperbeln, da bei jedem willkürlich angenommenen Kegel nur solche Hyperbeln sich ergeben, deren Achsenverhältniss eine gewisse Grenze nicht überschreitet, während keine derartige Einschränkung für die übrigen Kegelschnitte stattfindet, welche man als Schnitte aus jedem beliebigen Kegel erhalten kann. Die Betrachtung der möglichen Lagen der schneidenden Ebene, welche Hyperbeln liefert, giebt diese Einschränkung schon dadurch zu erkennen, dass die schneidende Ebene in ihrem Spielraum vom Parabelschnitt abwärts bis zu einer Seite vom Achsendreieck des Kegels, einen Winkel von gleicher Grösse mit dem Winkel an der Spitze des Kegels beschreibt. Ein sehr kleiner Winkel an der Spitze des Kegels würde daher nur solche Hyperbeln gestatten, die wenig von der Parabelform abweichen.

Digitized by Google

Indem also die gleichseitige Hyperbel keine allgemeine Beziehung zu jedem beliebigen Kegel hat, so ist man auch wol auf eine besondere Untersuchung ihrer Lage im Kegel bei elementaren Behandlungen der Kegelschnitte bisher überhaupt nicht näher eingegangen, wie es scheint [1]).

Ausgesprochen findet sich freilich wenigstens die Frage nach der Lage der gleichseitigen Hyperbel im Kegel bereits in einer älteren elementaren Schrift, die auch manche praktische Anwendungen der Kegelschnitte enthält, nämlich in De la Chapelle's Traité des sections coniques, Paris 1750, deutsch von Böckmann, Carlsruhe 1791 pag. 361. Aber die Beantwortung dazu fiel nicht nur ganz unvollständig aus, sondern der Gegenstand selbst wurde dabei aus dem Gesicht verloren und statt dessen die andere Frage verfolgt, welche Hyperbeln entstehen würden, wenn man in einem Kegel, dessen Winkel an der Spitze ein rechter, stumpfer oder spitzer Winkel wäre, den Schnitt allemal parallel zur Achse des Kegels legte? Der Verfasser scheint indessen diese Frage als identisch mit der vorgelegten angesehen zu haben, wenn er schliesslich bemerkt, man könne also bei dieser Art von Kegelschnitten allemal aus der Beschaffenheit des Winkels an der Spitze des Kegels schliessen, ob die Achsen sich gleich sind oder nicht, und wenn sie ungleich sind, welche von beiden die grösste sei. Hiernach sollte man also glauben, dass nur aus einem, an seiner Spitze rechtwinkligen Kegel sich eine gleichseitige Hyperbel schneiden lasse.

Die folgenden elementaren Untersuchungen ergeben, dass die Lage von gleichseitigen Hyperbeln in jedem Kegel, dessen Winkel an der Spitze nicht kleiner als 90^0 ist, immer in doppelter Weise bestimmt werden kann, ähnlich wie die Lage des Kreises, oder des Ellipsenschnitts von gegebener Form, und seines Wechselschnitts, ferner dass diese Bestimmung sich allgemein auf Hyperbeln von beliebigem Axenverhältniss ausdehnen lässt, und auch das Maximum der Excentricität der möglichen Hyperbeln für jeden gegebenen Kegel leicht darzustellen gestattet.

---

1) Abzusehen ist hier natürlich, wo es sich nur um eine elementare Bestimmung handelt, von den ganz allgemeinen Untersuchungen, wenn statt des Kegels eine Oberfläche zweiten Grades gesetzt wird. Solche allgemeine Diskussionen finden sich schon 1861 von Schlömilch in dessen Zeitschr. für Math. u. Physik, Jahrg. 6, pag 418; ferner in dessen Lehrb. der analyt. Geometrie des Raumes, wie auch neuerdings von A. Krosser in diesem Archiv, T. 12, pag. 195.

Digitized by Google

Wird die Gleichung der gleichseitigen Hyperbel

$$y^2 = x(2a+x)$$

entsprechend der Kreisgleichung

$$y^2 = x'(2a'-x')$$

zu Grunde gelegt, so ist bei dem gleichen Wert der Ordinate im Kegelschnitt:

$$x(2a+x) = x'(2a'-x')$$

wo $2a'$ hier den Durchmesser der kreisförmigen Grundfläche des geraden oder schiefen Kegels bezeichnet. Es sei ferner α der Winkel an der Spitze des Kegels, und v der Winkel, welchen eine Kegelseite des Achsendreiecks mit der Grundfläche bildet, aber u der Winkel der Achse der gleichseitigen Hyperbel mit derselben Seite, so ist der dritte Winkel im Achsendreieck das Supplement von $\alpha+v$ und man hat aus der Figur und der obigen Gleichung die Zusammenstellung:

$$\frac{x}{x'} = \frac{\sin v}{\sin u} = \frac{2a'-x'}{2a+x} = \frac{\sin(\alpha-u)}{\sin(\alpha+v)}$$

Es ist daher die aufzulösende Gleichung für die unbekannte Grösse u, wenn α und v gegeben sind:

$$\sin v \sin(\alpha+v) = \sin u(\alpha-u)$$

In dem besonderen Falle, wo $\alpha = 90^0$ ist, erhält man hiernach:

$$\sin v \cos v = \sin u \cos u$$
$$\sin 2v = \sin 2u$$
$$2u = 2v \text{ oder } 180^0 - 2v$$
$$u = v \text{ oder } 90^0 - v$$

Wenn also der Winkel an der Spitze des Kegels 90^0 ist, so giebt es folgende 2 Systeme von Schnitten für die gleichseitige Hyperbel. In dem einen System macht die Seite des Kegels gleich grosse Winkel mit der schneidenden Ebene und mit der Grundfläche. Ganz dasselbe lässt sich vom Kreisschnitte sagen, nur dass die gleichen Winkel dann als correspondirende Winkel bei parallelen Linien liegen. Auch im zweiten System, wo

$$u = 90^0 - v$$

ist und die Achse der gleichseitigen Hyperbel also senkrecht zur Grundfläche des Kegels steht, findet sich die entsprechende zweite

Digitized by Google

Lage der Kreisschnitte am Wechselschnitt des Kegels, indem die Durchmesser der Kreise um den Winkel $90^0 - v$ gegen dieselbe Seite des Kegels geneigt sind.

Die Gleichung

$$\sin v \sin(\alpha + v) = \sin u \sin(\alpha - u)$$

ergab also für u zwei reelle Werte, wenn

$$\alpha = 90^0$$

gesetzt wurde. Wie hieraus nicht geschlossen werden kann, dass der rechte Winkel an der Spitze des Kegels für den Schnitt der gleichseitigen Hyperbel durchaus notwendig ist, eben so wenig hat der hier vorkommende zweite Schnitt, welcher senkrecht zur Grundfläche steht, eine allgemeine Beziehung zur gleichseitigen Hyperbel. Denn nimmt man z. B. die eine Seite des Kegels senkrecht zur Grundfläche an, so wird ein damit paralleler Schnitt eine Parabel, und keine gleichseitige Hyperbel geben, obgleich der Schnitt senkrecht zur Grundfläche ist.

Die erste Auflösung, $u = v$, stimmt überein mit der von La Chapelle gegebenen, wonach ein Schnitt der gleichseitigen Hyperbel in diesem Falle parallel zur Achse des Kegels liegen muss. Denn weil das Achsendreieck hier rechtwinklig ist, so teilt die Achse des Kegels dasselbe Dreieck in zwei gleichschenklige Dreiecke, woraus $u = v$ folgt. Wie aber bei andern Achsendreiecken die Kegelschnitte sich gestalten, welche parallel zur Acho des Kegels liegen, das hat mit der vorliegenden Frage nichts zu tun, wonach nur die Lage der gleichseitigen Hyperbel im gegebenen Kegel gesucht wird.

Zur weiteren Erlangung der Bedingungen für diese Lage kann die Entwicklung der obigen Gleichung dienen:

$$\begin{aligned}\sin v \sin(\alpha + v) &= \sin u \sin(\alpha - u)\\ &= \sin u (\sin\alpha \cos u - \cos\alpha \sin u)\\ &= \sin u (\sin\alpha \sqrt{1 - \sin^2 u} - \cos\alpha \sin u)\end{aligned}$$

$$[\sin v \sin(\alpha + v) + \cos\alpha \sin^2 u]^2 = \sin^2 u \sin^2\alpha (1 - \sin^2\alpha)$$

$$\sin^4 u + \sin^2 u (2 \sin v \sin(\alpha + v) \cos\alpha - \sin^2\alpha) + \sin^2 v \sin^2(\alpha + v) = 0$$

$$\sin^2 u = \tfrac{1}{2}\sin^2\alpha - \sin v \sin(\alpha + v)\cos\alpha \pm \sqrt{[\tfrac{1}{2}\sin^2\alpha - \sin v \sin(\alpha + v)\cos\alpha]^2 - \sin^2 v \sin^2(\alpha + v)}$$

Damit dieser Ausdruck nicht sofort imaginär werde, muss die

Digitized by Google

Zahl unter dem Wurzelzeichen positiv sein, was nur möglich ist, wenn $\cos\alpha$ entweder null oder negativ, also α entweder 90^0 oder grösser als 90^0 wird. Der Fall $\alpha = 90^0$ ergiebt:

$$\begin{aligned}\sin^2 u &= \tfrac{1}{2} \pm \sqrt{\tfrac{1}{4} - \sin^2 v \cos^2 v} \\ &= \tfrac{1}{2} \pm \sqrt{\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{4}\sin^2 2v} \\ &= \tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2}\cos 2v\end{aligned}$$

Das obere Zeichen giebt $\cos^2 v$ und das untere $\sin^2 v$. Die beiden Auflösungen sind daher

$$u = 90^0 - v \quad \text{und} \quad u = v$$

wie schon vorher gefunden wurde.

Die allgemeine Bedingung für den möglichen Schnitt der gleichseitigen Hyperbel ist also, dass der Winkel an der Spitze des Kegels nicht unter 90^0 sein darf.

Was den zweiten Wert von u betrifft, so ergiebt er sich auch schon aus der ursprünglichen Gleichung

$$\sin v \sin(\alpha + v) = \sin u \sin(\alpha - u)$$

indem man die beiden Factoren vertauschen kann, so dass der zuerst gefundene Wert als $\alpha - u$ angesehen wird, und durch Subtraction desselben von α sich der zweite Wert von u ergeben muss: Die Summe beider Werte von u wird also notwendig gleich α sein.

Dieselbe ursprüngliche Gleichung wird nicht nur zur Prüfung der Rechnung, sondern auch zur schärfsten Bestimmung von u dienen können, welches dieser Gleichung vollkommen genügen muss. Ausserdem ist sie hinreichend, um u schon durch einige wiederholte Versuche genau zu finden, ohne erst die quadratische Gleichung durch Rechnung oder Construction aufzulösen. Letzteres würde zwar möglich, aber doch gar zu umständlich sein.

Nachdem hiermit die Bestimmung der Lage von gleichseitigen Hyperbeln in einem gegebenen Kegel erledigt ist, sei dabei ferner eine allgemeine Hyperbel mit dem Achsenverhältniss $\frac{b}{a}$ angenommen. Die Aufgabe wird also jetzt:

In einem gegebenen Kegel die Lage einer Hyperbel mit dem Achsenverhältniss: $\frac{b}{a}$ zu finden.

Digitized by Google

Zur Auflösung werde die allgemeine Gleichung der Hyperbel

$$y^2 = 2px + qx^2 = x(2p + qx)$$

verglichen mit der Gleichung des Kreises

$$y'^2 = x'(2a' - x')$$

wo wieder $2a'$ den Durchmesser der kreisförmigen Grundfläche des Kegels bezeichnet, so ist für gleiche Werte der Ordinaten

$$x(2p + qx) = x'(2a' - x')$$

und man erhält zunächst, wie in der vorigen Aufgabe, mit der Veränderung:

$$\frac{x}{x'} = \frac{\sin v}{\sin u} = \frac{2a' - x'}{2p + qx}$$

Aber nach der Figur ist auch wieder:

$$\frac{2a' - x'}{2a + x} = \frac{\sin(\alpha - u)}{\sin(\alpha + v)}$$

daher

$$2a' - x' = (2a + x)\frac{\sin(\alpha - u)}{\sin(\alpha + v)}$$

$$\frac{\sin v}{\sin u} = \frac{2a + x}{2p + qx} \cdot \frac{\sin(\alpha - u)}{\sin(\alpha + v)}$$

und weil $p = \frac{b^2}{a}$ und $q = \frac{b^2}{a^2}$ ist,

$$\frac{\sin v}{\sin u} = \frac{2a + x}{2\frac{b^2}{a} + \frac{b^2}{a^2}x} \cdot \frac{\sin(\alpha - u)}{\sin(\alpha + v)}$$

$$= \frac{(2a + x)a^2}{(2a + x)b^2} \cdot \frac{\sin(\alpha - u)}{\sin(\alpha + v)}$$

oder die für u aufzulösende Gleichung wird:

$$\frac{b^2}{a^2}\sin v \sin(\alpha + v) = \sin u \sin(\alpha - u)$$

Es sei $\alpha = 90^0$, so wird diese Gleichung

$$\frac{b^2}{a^2}\sin 2v = \sin 2u$$

Ist b kleiner als a, so ist die Gleichung immer lösbar, auch bis zu $b = a$, wie schon vorher behandelt. Aber für den Fall, wo b grösser

Digitized by Google

als a ist, entsteht die Bedingung, dass $\frac{b^2}{a^2}\sin 2v$ kleiner als 1 sein muss, oder höchstens $= 1$, um $\sin 2u$ bestimmen zu können, was bei hinreichend kleinem Werte von v auch immer möglich ist. Die zweite Auflösung ergiebt sich auch wieder durch Subtraction des gefundenen Wertes für u von 90^0.

Beispiel. $\alpha = 90^0$, $v = 1^0$ und $\frac{b}{a} = 4$ giebt

$$u = 16^0\,58',3 \quad \text{oder} \quad 73^0\,1',7$$

Als Grenzwert von

$$\frac{b^2}{a^2}\sin 2v = 1, \text{ wozu } 2u = 90^0 \text{ und } u = 45^0$$

gehört, würde auch die zweite Auflösung

$$\alpha - u = 45^0$$

werden, also beide Schnitte zusammenfallen. Damit wird

$$\frac{b^2}{a^2} = \frac{1}{\sin 2v} \quad \text{oder} \quad \frac{b}{a} = 5{,}353$$

als Maximum für die in diesem gegebenen Kegel möglichen Hyperbelschnitte, so dass alle andern Schnitte, wo u kleiner oder grösser als 45^0 ist, nur Hyperbeln ergeben, deren Achsenverhältniss $\frac{b}{a}$ kleiner als 5,353 ist.

Bei der Entwicklung der allgemeinen Gleichung bedarf es nur der Hinzufügung des Factors $\frac{b^2}{a^2}$ auf der linken Seite. Die entwickelte Gleichung wird daher jetzt werden:

$$\sin^2 u = \tfrac{1}{2}\sin^2\alpha - \frac{b^2}{a^2}\sin v \sin(\alpha + v)\cos\alpha$$
$$\pm\sqrt{\left[\tfrac{1}{2}\sin^2\alpha - \frac{b^2}{a^2}\sin v\sin(\alpha+v)\cos\alpha\right]^2 - \frac{b^4}{a^4}\sin^2 v\sin^2(\alpha+v)}$$

Für reelle Werte muss also

$$\tfrac{1}{2}\sin^2\alpha - \frac{b^2}{a^2}\sin v\sin(\alpha+v)\cos\alpha > \frac{b^2}{a^2}\sin v\sin(\alpha+v)$$

sein, oder:

Digitized by Google

$$\tfrac{1}{2}\sin^2\alpha > \frac{b^2}{a^2}\sin v\sin(\alpha+v)\,.\,(1+\cos\alpha)$$

$$2\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha\cos^2\tfrac{1}{2}\alpha > \frac{b^2}{a^2}\sin v\sin(\alpha+v)\,.\,2\cos^2\tfrac{1}{2}\alpha$$

$$\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha > \frac{b^2}{a^2}\sin v\sin(\alpha+v)$$

$$\frac{b^2}{a^2} < \frac{\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha}{\sin v\sin(\alpha+v)}$$

oder höchstens

$$\frac{b^2}{a^2} = \frac{\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha}{\sin v\sin(\alpha+v)}$$

In den folgenden Beispielen, welche am leichtesten und genauesten nach der ursprünglichen Gleichung

$$\frac{b^2}{a^2}\sin v\sin(\alpha+v) = \sin u\sin(\alpha-u)$$

durch einige wiederholte Versuche für u aufzulösen sind, ist das Maximum für $\frac{b}{a}$ hinzugefügt, wo beide Hyperbelschnitte zusammenfallen, indem die Quadratwurzel, bei der Auflösung nach der quadratischen Gleichung null wird. Es ist damit die Hyperbel von grösster Excentricität dargestellt, welche aus dem gegebenen Kegel geschnitten werden kann. Ihre Lage bestimmt sich einfach durch

$$u = \tfrac{1}{2}\alpha$$

als den Winkel, welchen diese Hyperbel mit den Seiten (im Achsendreieck) des Kegels bildet. Das ergiebt sich auch, wenn man die Quadratwurzel = 0 setzt, aus dem übrigen Teil der Gleichung, indem dabei ebenfalls der Maximalwert von $\frac{b}{a}$ eingeführt wird.

Beispiele.

1)	$\alpha = 90^0$	2) $\alpha = 91^0$	3) $\alpha = 100^0$
	$v = 33^0$	$v = 44^0\ 3'$	$v = 29^0$
	$\frac{b}{a} = 1$	$\frac{b}{a} = 1$	$\frac{b}{a} = 1$
	$u = 33^0$	$u = 37^0\ 55'$	$u = 22^0\ 43',3$
oder	57	oder $= 53\ .\ 5$	oder $= 77^0\ 16,7$
	$\frac{b}{a} = \max$	$\frac{b}{a} = \max$	$\frac{b}{a} = \max$
	$= 1{,}0462$	$= 1{,}0175$	$u = 1{,}24\ 80$
	$u = 45^0$	$u = 45^0\ 30'$	$u = 50^0$

Digitized by Google

4) $\alpha = 100^0$
$v = 28^0$
$\frac{b}{a} = 1$
$u = 22^0\,15'$
oder $= 77^0\,.\,45$
$\frac{b}{a} = \max$
$= 1{,}4167$
$u = 50^0$

5) $\alpha = 116^0$
$v = 24^0$
$\frac{b}{a} = 1$
$u = 15^0\,25',5$
oder $= 100^0.34{,}5$
$\frac{b}{a} = \max$
$= 1{,}6585$
$u = 58^0$

6) $\alpha = 120^0$
$v = 10^0$
$\frac{b}{a} = 1$
$u = 8^0\,14',1$
oder $= 111^0.45{,}9$
$\frac{b}{a} = \max$
$= 2{,}3745$
$u = 60^0$

7) $\alpha = 130^0$
$v = 35^0$
$\frac{b}{a} = 1$
$u = 9^0\,52',95$
oder $= 120.7{,}05$
$\frac{b}{a} = \max$
$= 2{,}3522$
$u = 65^0$

8) $\alpha = 170^0$
$v = 2^0$
$\frac{b}{a} = 1$
$u = 8^0\,42',56$
oder $= 161\;17{,}44$
$\frac{b}{a} = \max$
$= 4{,}5201$
$u = 85^0$

9) $\alpha = 80^0$
$v = 60^0$
$\frac{b}{a} = 0{,}5$
$u = 8^0\,26',1$
oder $= 71\,.\,33{,}9$
$\frac{b}{a} = \max$
$= 0{,}8615$
$u = 40^0$

10) $\alpha = 6^0$
$v = 85^0$
$\frac{b}{a} = 0{,}05$
$u = 2^0\,5',75$
oder $= 3^0\,54{,}25$
$\frac{b}{a} = \max$
$= 0{,}05244$
$u = 3^0$

Von den beiden Figuren hierzu gehört die erste zum ersten Beispiel mit den Winkeln

$$\alpha = 90^0 \quad \text{und} \quad v = 33^0$$

Die Lage der Hauptachse $2a$ für die gesuchte gleichseitige Hyperbel war leicht durch Verschiebung so zu wählen, dass beide Auflösungen eine gleich grosse Hauptachse erhielten. Die zweite Figur bezieht sich auf das dritte Beispiel, wo

Digitized by Google

$$\alpha = 100^0 \quad \text{und} \quad v = 29^0$$

sein soll. Auf der linken Seite in beiden Figuren ist der Raum benutzt, um die Hyperbel von grösster Excentricität hinzu zu fügen, welche in jedem der gegebenen Kegel noch möglich ist. In der ersten Figur wurde das maximale Achsenverhältniss

$$\frac{b}{a} = 1{,}0462$$

und in der zweiten Figur

$$\frac{b}{a} = 1{,}2480$$

Kiel, d. 20. Octbr. 1894.

Digitized by Google

V.

Zur Theorie des Kegelschnittbüschels.

Von

A. Wiman

in Lund.

---

1. Wir betrachten hier zuerst die Aufgabe „die Anzahl der „einem Kegelschnitt $S = 0$ eingeschriebenen Dreiecke zu bestim- „men, unter der Voraussetzung, dass die Seiten die Kegelschnitte „k_1, k_2, k_3 eines Büschels

$$S_1 + kS = 0$$

„der Reihe nach berühren."

Den Punkten des Kegelschnitts $S = 0$ kann man bekanntlich einen veränderlichen Parameter x eindeutig zuordnen. Von jedem Punkte x gehen zwei Tangenten des Kegelschnitts

$$S_1 + k_1 S = 0$$

So kommt man vom Punkte x zu zwei Punkten x_1 auf $S = 0$, welche durch die eben erwähnten Tangenten ausgeschnitten werden. Von diesen Punkten x_1 gehen vier Tangenten des Kegelschnitts

$$S_1 + k_2 S = 0$$

welche vier Punkte x_2 auf $S = 0$ bestimmen, und von den Punkten x_2 kommt man auf dieselbe Weise durch 8 Tangenten des Kegelschnitts

$$S_1 + k_3 S = 0$$

zu acht Punkten x_3 auf $S = 0$. Zu jedem Punkte x_3 gelangt man

Digitized by Google

aber von 2 Punkten x_2, 4 Punkten x_4 und 8 Punkten x, welche durch das Ziehen von Tangenten an die Kegelschnitte k_3, k_2', k_4 bestimmt werden. Jedem Punkte x entsprechen somit 8 Punkte x_3, und jedem Punkte x_3 8 Punkte x. Diese Correspondenz wird durch eine Gleichung vom 8. Grade in sowol x als x_3

$$F(x, x_3) = 0 = ax^8 x_3^8 + \ldots +$$

ausgedrückt. Die gebrochene Linie $x - x_1 - x_2 - x_3$ wird ein geschlossenes Dreieck von der in der gestellten Aufgabe angegebenen Art, falls $x = x_3$. Man erhält also eine Gleichung

$$F(x, x) = 0$$

welche vom Grade 16 ist. Die Anzahl der Lösungen ist somit 16, und man kann in derselben Weise den folgenden allgemeineren Satz beweisen:

„Es giebt 2^{n+1} einem Kegelschnitte $S = 0$ eingeschriebene n-„Ecke, deren Seiten die Kegelschnitte $k_1, k_2, \ldots k_n$ des Büschels

$$S_1 + kS = 0$$

„der Reihe nach berühren."

Diese Zahl kann indessen reducirt werden, wenn einige der k_i einander gleich sind; so z. B., wenn r auf einander folgende Kegelschnitte des Büschels

$$S_1 + kS = 0$$

identisch sind, erhält man nur 2^{n+2-r} Lösungen, denn man kommt $(r-1)$-Mal von je einem x_i zu nur einem x_{i+1}.

Es sei $r = n$, d. h. man suche „die Anzahl einem Kegelschnitte „eingeschriebener n-Ecke, welche einem zweiten Kegelschnitte um-„geschrieben sind." Nach den vorhergehenden Entwicklungen würde man hier 4 Lösungen erwarten. Die bekannten Sätze über die Poncelet'schen Polygone sagen aber, dass es im allgemeinen keine solche Vielecke giebt, in speciellen Fällen aber unendlich viele. Ob dergleichen Eigentümlichkeiten auch in den Fällen, wo die Seiten des Vielecks verschiedene Kegelschnitte des Büschels berühren, vorkommen können, wollen wir nun untersuchen.

2. Hier mag es angemessen sein den folgenden Satz einzuführen:

„Wenn von einem veränderlichen Punkt x eines Kegelschnitts „$S = 0$ die Tangenten $x - x_1$ und $x - x_2$ an die bezüglichen Kegel-„schnitte

$$S_1 + k_1 S = 0 \quad \text{und} \quad S_1 + k_2 S = 0$$

„gezogen werden, wo x_1 und x_2 die übrigen Schnittpunkte mit $S = 0$ „bezeichnen, so besteht die Enveloppe der Geraden $x_1 - x_2$ aus zwei „Kegelschnitten des Büschels

$$S_1 + kS = 0$$

Den Beweis hiefür erbringen wir leicht mit Hülfe folgender von Salmon-Fiedler [1]) behandelten Aufgabe:

„Unter welcher Bedingung kann in den Kegelschnitt $S = 0$ ein Dreieck eingeschrieben werden, dessen Seiten die Kegelschnitte k_1, k_2, k_3 eines Büschels

$$S_1 + kS = 0$$

der Reihe nach berühren"?

Diese Aufgabe haben wir in der Tat schon dahin beantwortet, dass ohne irgend welche Bedingung für k_1, k_2, k_3 16 solche Dreiecke vorkommen. Salmon-Fiedler findet aber das Verschwinden einer gewissen Invariante erforderlich. Dieser Widerspruch kommt daraus, dass es zwei Arten solcher Dreiecke giebt; doch nimmt Salmon nur die eine Möglichkeit in Betracht, wie die folgende Behandlungsweise lehrt. Das Dreieck wird als Coordinatendreieck genommen. Somit

$$S = 2a_{23} x_2 x_3 + 2a_{31} x_3 x_1 + 2a_{12} x_1 x_2$$

Die Coefficienten für x_1^2, x_2^2, x_3^2 in S_1 werden (durch projectivische Transformation) $= 1$ gesetzt. Dann hat man als mögliche Berührungspunkte nur die Punkte:

$$x_1 \pm x_2 = x_3 = 0; \quad x_2 \pm x_3 = x_1 = 0; \quad x_3 \pm x_1 = x_2 = 0$$

Diese 8 Combinationen lassen sich aber (durch geeignete Zeichenänderungen) zu 2 wesentlich verschiedenen Fällen reduciren:

1) $x_1 + x_2 = x_3 = 0; \quad x_2 + x_3 = x_1 = 0; \quad x_3 + x_1 = x_2 = 0$
2) $x_1 - x_2 = x_3 = 0; \quad x_2 - x_3 = x_1 = 0; \quad x_3 - x_1 = x_2 = 0$

Salmon nimmt nur Rücksicht auf den letzteren Fall, indem er für S_1 die folgende Gleichung nimmt:

$$S_1 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2(1 + k_1 a_{23}) x_2 x_3 - 2(1 + k_2 a_{31}) x_1 x_3 - 2(1 + k_3 a_{12}) x_1 x_2$$

---

1) Analytische Geometrie der Kegelschnitte, 5 Auflage. S. 644.

Betrachtet man nun die Discriminante für $S_1 + \lambda S$:

$$\Delta_1 + \lambda\Theta_1 + \lambda^2\Theta + \lambda^3\Delta$$

so hat man:

$$\Delta_1 = -(2 + k_1 a_{23} + k_2 a_{31} + k_3 a_{12})^2 - 2k_1 k_2 k_3 a_{23} a_{21} a_{12}$$

$$\Theta_1 = 2(a_{23} + a_{31} + a_{12})(2 + k_1 a_{23} + k_2 a_{31} + k_3 a_{13}) + 2a_{23} a_{31} a_{12}(k_2 k_3 + k_3 k_1 + k_1 k_2)$$

$$\Theta = -(a_{23} + a_{31} + a_{12})^2 - 2(k_1 + k_2 + k_3) a_{23} a_{31} a_{12}$$

$$\Delta = 2a_{23} a_{31} a_{12}$$

Diese Grössen sind nicht unabhängig, sondern stehen in der invarianten Beziehung:

$$\text{(A)} \qquad [\Theta_1 - \Delta(k_2 k_3 + k_3 k_1 + k_1 k_2)]^2 = 4(\Delta_1 + k_1 k_2 k_3 \Delta)(\Theta + \Delta(k_1 + k_2 + k_3)$$

Wären wir aber vom Falle 1), wo die Berührungspunkte auf einer Geraden ($x_1 + x_2 + x_3 = 0$) liegen, ausgegangen, so hätten wir keine solche Bedingung erhalten.

Die Gleichung (A) bestimmt zu gegebenen k_1 und k_2 zwei Werte k_3. Es ist nun leicht zu erweisen, dass unendlich viele Dreiecke dem Kegelschnitte $S = 0$ eingeschrieben werden können, deren Seiten drei so zusammengehörige Kegelschnitte k_1, k_2, k_3 berühren. Man kann ja den Schnittpunkt der beiden Seiten, welche k_1 und k_2 berühren, beliebig auf $S = 0$ wählen; die Verbindungsgerade $x_1 - x_2$ muss doch einen von jenen zwei Kegelschnitten k_3 berühren. Hiemit ist aber auch der im Anfang dieses Numerus gegebene Satz bewiesen.

Lässt man nun k_3 veränderlich sein, k_1 und k_2 aber constant, so erhält man für jeden Wert für k_3 16 in $S = 0$ eingeschriebene Dreiecke, deren Seiten k_1, k_2 und k_3 berühren. Diejenigen Dreiecksseiten, welche k_3 berühren, müssen aber Tangenten der beiden durch (A) bestimmten Kegelschnitte sein, somit gemeinschaftliche Tangenten zweier festen Kegelschnitte des Büschels und des veränderlichen Kegelschnitts k_3. Man erhält also acht solche Dreiecksseiten; zu jeder von diesen gehören aber zwei Dreiecke.

Wir können nun den folgenden allgemeineren Satz beweisen:

„Schreibt man einem Kegelschnitte $S = 0$ ein Polygon

$$x - x_1 - x_2 - \ldots x_{n-1} - x$$

„ein, wo die Seiten

Digitized by Google

$$x - x_1, \quad x_1 - x_2; \quad \ldots \; x_{n-2} - x_{n-1}$$

„die bezüglichen Kegelschnitte $k_1, k_2, \ldots k_{n-1}$ des Büchels

$$S_1 + kS = 0$$

„berühren, so besteht die Enveloppe der $n$ten Seite $x_{n-1} - x$ aus „2^{n-2} Kegelschnitten desselben Büschels".

Wir nehmen an, der Satz sei bewiesen für $n-1$ Seiten. Der Zug $x - x_1 - x_2 \ldots x_{n-2}$ kann also durch die einzige Gerade $x - x_{n-2}$ ersetzt werden, welche 2^{n-3} Kegelschnitte umhüllt. Von diesen Kegelschnitten sei einer durch k_r bezeichnet. Für das Dreieck $x - x_{n-2} - x_{n-1} - x$ bestimmt dann die Gleichung (A) zu k_{n-1} und je einem k_r zwei Kegelschnitte k_n, welche von der $n$ten Seite umhüllt werden. Da der Satz schon im voraus für $n = 3$ bewiesen war, ist der Beweis somit allgemein erbracht.

3. Wir suchen nun das gegenseitige Verhältniss dreier Kegelschnitte k_1, k_2, k_3, welche der Relation (A) genügen. Was wird hier aus den 16 mehr erwähnten Dreiecken, welche k_1, k_2 und k_3 in gerader Linie berühren? Der Kegelschnitt k_3 hat mit einem beliebigen anderen k_i des Büschels 4 Tangenten gemein, welche in 8 k_1, k_2 und k_i berührenden Dreiecken auftreten. Die Tangenten in den 4 Basispunkten des Büschels berühren aber keinen anderen Kegelschnitt, und man kann sagen, dass k_3 diese mit sich selbst gemein hat. Für k_1 und k_2 gelten natürlich gleichartige Verhältnisse. Hiernach erschliesst man leicht, dass die 16 Dreiecke in der folgenden Weise gruppirt sind:

In jedem der 4 Basispunkte befinden sich Eckpunkte je dreier von ihnen; so erhält man 12 Dreiecke. Die 4 übrigen sind von den Seiten dieser Dreiecke gebildet, welche durch keinen Basispunkt gehen.

Wenn in einem Basispunkt die Tangenten von k_1 und k_2 gezogen werden, so wird nach dem Obigen die Verbindungsgerade der übrigen Schnittpunkte dieser Geraden mit $S = 0$ von den 2 durch (A) zugeordneten Kegelschnitten k_3 berührt. Oder auch:

Zieht man im Basispunkte die Tangente an k_1, lässt die folgende Seite k_2 berühren, was zwar auf 2 Weisen vor sich gehen kann, und vollendet so das in $S = 0$ eingeschriebene Dreieck, so berühren die letzten Seiten im Basispunkte die beiden zugeordneten Kegelschnitte k_3. Die entsprechenden Sätze in Bezug auf die zusammengehörigen Kegelschnitte $k_1, k_2 \ldots k_n$ gelten für Polygone mit belie-

Digitized by Google

biger Seitenzahl, d. h. man kommt immer durch Tangenten der Kegelschnitte in cyklischer Reihenfolge, wobei man von einem beliebigen k_i ausgehen kann, von einem beliebigen Basispunkte zu demselben zurück.

4. Die vorigen Entwicklungen wenden wir auf die folgende specielle Aufgabe an:

Ein Polygon $x_1 - x_2 - \ldots - x_n - x_1$ sei dem Kegelschnitt $S = 0$ eingeschrieben, und die $n-1$ Seiten $x_1 - x_2 \ldots x_{n-1} - x_n$ berühren den Kegelschnitt $S_1 = 0$; man suche die Enveloppe der $n$ten Seite $x_n - x_1$.

Diese Aufgabe kann durch wiederholte Anwendung der Gleichung (A) gelöst werden. Man sucht zuerst die Enveloppe der Geraden $x_3 - x_1$. Weil hier

$$k_1 = k_2 = 0$$

erhält man die Lösung

$$S_1 + k_3 S = 0$$

wo

$$k_3 = \frac{\Theta_1^2 - 4\Delta_1\Theta_2}{4\Delta_1\Delta_2}$$

Wir nehmen an, man habe auf diese Weise fortgehend die Enveloppe der Geraden $x_{n-1} - x_1$ gefunden, und zwar bestehe diese aus dem Kegelschnitt

$$S_1 + k_{n-1} S = 0$$

Man betrachte nun das Dreieck $x_1 - x_{n-1} - x_n - x_1$. Die Enveloppen der beiden ersten Seiten sind die Kegelschnitte mit den Parametern k_{n-1} und 0. Somit kann k_n aus der Gleichung

$$(\Theta_1 - \Delta k_{n-1} k_n)^2 = 4\Delta_1 [\Theta_2 + \Delta (k_{n-1} + k_n)]$$

gefunden werden. Es besteht aber auch die Gleichung:

$$(\Theta_1 - \Delta k_{n-1} k_{n-2})^2 = 4\Delta_1 [\Theta + \Delta (k_{n-1} + k_{n-2})]$$

Eine Wurzel der Gleichung für k_n ist somit die schon bekannte k_{n-2}. Für die hier gesuchte Wurzel erhält man also leicht

$$\text{(B)} \qquad k_n = -k_{n-2} + \frac{4\Delta_1 + 2\Theta_1 k_{n-1}}{\Delta k_{n-1}}$$

Die gesuchte Enveloppe

$$S_1 + k_n S = 0$$

der Seite $x_n - x_1$ ist somit gefunden. Wenn $k_n = 0$, hat man die Bedingung, dass unendlich viele n-Ecke dem Kegelschnitte $S_1 = 0$ eingeschrieben und dem Kegelschnitte $S_1 = 0$ umgeschrieben werden können.

Digitized by Google

Man erhält 4 Polygone des Systems, deren $n$te Seiten einen beliebigen Kegelschnitt k des Büschels berühren. Diese Seiten sind nämlich die gemeinsamen Tangenten der Kegelschnitte k und k_n. Jede von diesen Polygonen wird aber zweimal gezählt, je nachdem man von dem einen oder anderen Schnittpunkte der bezüglichen $n$ten Seite mit $S = 0$ ausgeht.

Für $k = 0$ würde man also auch 4 n-Ecke erhalten, deren sämtliche Seiten den Kegelschnitt $S_1 = 0$ berühren. Bekanntlich sind aber diese Polygone ausgeartet, d. h. bestehen aus in sich (durch Vermittlung der gemeinsamen Punkte oder Tangenten von S und S_1) zurücklaufenden Zügen [1]).

---

1) Hinsichtlich der Poncelet'schen Polygone verweisen wir hier auf: Halphen Traité des fonctions elliptiques II S 367. Vgl. auch Sturm, Die Gebilde ersten und zweiten Grades der Liniengeometrie I S. 33, woselbst auch weitere Litteratur-Hinweisungen gegeben sind.

Digitized by Google

VI.

Ein Beitrag zur Theorie der Flächen zweiten Grades.

Von

Stephan Glaser.

Im 13. Teile der zweiten Reihe des Archivs pag. 113—209 habe ich auseinanderzusetzen versucht, wie sich die Curven zweiten Grades mit Hülfe eines Abbildungsprincips einer gemeinsamen Behandlung unterziehen lassen, und habe an einzelnen Beispielen den Vorteil dieser Methode nachgewiesen. Es liegt der Gedanke nahe, dasselbe Verfahren zur Untersuchung der Flächen zweiten Grades auf den Raum zu übertragen und diesen mit Hülfe der Substitution

$$x = a\xi, \quad y = b\eta, \quad z = c\zeta$$

abzubilden. Wie sich leicht nachweisen lässt, hat diese Abbildung fast ganz dieselben Eigenschaften wie die der Ebene und macht es möglich, alle für die Abbilder gewonnenen Resultate ohne weiteres auf die ursprünglichen Gebilde zu übertragen. Wir übergehen an dieser Stelle die Aufzählung und Ableitung dieser Eigenschaften und begnügen uns mit der Angabe der drei wichtigsten. Dieselben sind:

1. „Die Abbilder paralleler Geraden sind wieder parallel."

2. „Für Abschnitte paralleler Geraden ist das Verhältniss zum Bilde constant."

3. „Der Inhalt eines jeden Raumstücks ist gleich *abc* mal dem Inhalt des Bildes."

Digitized by Google

Mit Hülfe dieser Substitution nimmt die allgemeine Gleichung der Mittelpunktsflächen zweiten Grades

$$\frac{x^2}{a^2} + \varepsilon \frac{y^2}{b^2} + \mu \frac{z^2}{c^2} = 1$$

worin ε und μ die positive oder negative Einheit bedeuten, die einfachere Form

$$\xi^2 + \varepsilon\eta^2 + \mu\zeta^2 = 1$$

an, welche im Falle des Ellipsoids die Kugel vom Radius 1 darstellt.

Wir wollen nun im Folgenden eine Reihe von Aufgaben behandeln, welche wieder wie im Falle der Ebene dem Gebiete der relativen Maxima und Minima entnommen sind und sich auf beliebige Flächen zweiten Grades beziehen.

Die erste und eigentliche Aufgabe lautet: „Das Tetraeder vom grössten oder kleinsten Inhalt zu finden, von welchem 2 Ecken fest gegeben sind, die beiden andern auf einer Fläche zweiten Grades sich befinden."

Diese Aufgabe lässt sich vollständig lösen, ohne dass es nötig wäre eine Unterscheidung der Mittelpunktsflächen vorzunehmen.

Aus den Resultaten derselben lässt sich dann ohne Mühe die Lösung der weiteren beiden Aufgaben herleiten:

„Das Tetraeder vom grössten oder kleinsten Inhalt zu finden, von dem nur eine Ecke fest gegeben ist, die 3 andern auf einer Fläche zweiten Grades sich befinden."

„Das Tetraeder vom grössten oder kleinsten Inhalt zu finden, dessen 4 Ecken auf einer Fläche zweiten Grades sich befinden."

Was die übrigen Flächen zweiten Grades angeht, so lassen sich dieselben als Grenzfälle der Mittelpunktsflächen auffassen. Unsere Resultate sind aber derart, dass sie sich mit entsprechenden Modificationen auch auf solche Grenzfälle übertragen lassen. Doch wird im Folgenden weder auf diese Grenzfälle noch überhaupt auf eine Unterscheidung der Mittelpunktsflächen eingegangen, da es gerade in der Absicht des Verfassers liegt zu zeigen, bis zu welcher Vollständigkeit die Aufgabe gelöst werden kann, ohne eine solche Unterscheidung vorzunehmen.

Digitized by Google

1.

Die Fläche zweiten Grades sei gegeben durch die Gleichung

$$\xi^2+\varepsilon\eta^2+\mu\zeta^2=1$$

Die beiden auf der Fläche beweglichen Punkte seien

$$P_1=(\xi_1,\ \eta_1,\ \zeta_1) \quad \text{und} \quad P_2=(\xi_2,\ \eta_2,\ \zeta_2)$$

die beiden festen

$$P_3=(\xi_3,\ \eta_3,\ \zeta_3) \quad \text{und} \quad P_4=(\xi_4,\ \eta_4,\ \zeta_4)$$

und es sei die Bezeichnung so gewählt, dass die Kanten P_1P_2, P_1P_3 und P_1P_4 dieselbe Lage zu einander haben wie die positive ξ-, η- und ζ-axe. Dann wird der Inhalt des Tetraeders dargestellt durch

$$J=\frac{1}{6}\begin{vmatrix}1 & \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1\\ 1 & \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2\\ 1 & \xi_3 & \eta_3 & \zeta_3\\ 1 & \xi_4 & \eta_4 & \zeta_4\end{vmatrix}=\frac{1}{6}\Delta \tag{1}$$

Bezeichnen wir mit λ_1 und λ_2 zwei unbestimmte Multiplicatoren, so lauten die Bedingungen des Maximums oder Minimums:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial\Delta}{\partial\xi_1}+\lambda_1\xi_1=0,\quad \frac{\partial\Delta}{\partial\eta_1}+\varepsilon\lambda_1\eta_1=0,\quad \frac{\partial\Delta}{\partial\zeta_1}+\mu\lambda_1\zeta_1=0\\ &\qquad\qquad \xi_1^2+\varepsilon\eta_1^2+\mu\zeta_1^2=1\\ &\frac{\partial\Delta}{\partial\xi_2}+\lambda_2\xi_2=0,\quad \frac{\partial\Delta}{\partial\eta_2}+\varepsilon\lambda_2\eta_2=0,\quad \frac{\partial\Delta}{\partial\zeta_2}+\mu\lambda_2\zeta_2=0\\ &\qquad\qquad \xi_2^2+\varepsilon\eta_2^2+\mu\zeta_2^2=1\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Combiniren wir die Glieder sämtlicher Horizontalreihen der Determinante mit den adjungirten Elementen der ersten beiden Horizontalreihen, so ergiebt sich das folgende System von Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}&(2\,3\,\ 4)+\xi_1\frac{\partial\Delta}{\partial\xi_1}+\eta_1\frac{\partial\Delta}{\partial\eta_1}+\zeta_1\frac{\partial\Delta}{\partial\zeta_1}=\Delta\\ &\qquad -(3\,4\,1)+\xi_1\frac{\partial\Delta}{\partial\xi_2}+\eta_1\frac{\partial\Delta}{\partial\eta_2}+\zeta_1\frac{\partial\Delta}{\partial\zeta_2}=0\\ &(2\,3\,4)+\xi_2\frac{\partial\Delta}{\partial\xi_1}+\eta_2\frac{\partial\Delta}{\partial\eta_1}+\zeta_2\frac{\partial\Delta}{\partial\zeta_1}=0\\ &\qquad -(3\,4\,1)+\xi_2\frac{\partial\Delta}{\partial\xi_2}+\eta_2\frac{\partial\Delta}{\partial\eta_2}+\zeta_2\frac{\partial\Delta}{\partial\zeta_2}=\Delta\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Digitized by Google

$$\left.\begin{aligned}
&(2\,3\,4) + \xi_3\frac{\partial \Delta}{\partial \xi_1} + \eta_3\frac{\partial \Delta}{\partial \eta_1} + \zeta_3\frac{\partial \Delta}{\partial \zeta_1} = 0\\
&\quad -(3\,4\,1) + \xi_3\frac{\partial \Delta}{\partial \xi_2} + \eta_3\frac{\partial \Delta}{\partial \eta_2} + \zeta_3\frac{\partial \Delta}{\partial \zeta_2} = 0\\
&(2\,3\,4) + \xi_4\frac{\partial \Delta}{\partial \xi_1} + \eta_4\frac{\partial \Delta}{\partial \eta_1} + \zeta_4\frac{\partial \Delta}{\partial \zeta_1} = 0\\
&\quad -(3\,4\,1) + \xi_4\frac{\partial \Delta}{\partial \xi_2} + \eta_4\frac{\partial \Delta}{\partial \eta_2} + \zeta_4\frac{\partial \Delta}{\partial \zeta_2} = 0
\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

worin

$$\begin{vmatrix} \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2 \\ \xi_3 & \eta_3 & \zeta_3 \\ \xi_4 & \eta_4 & \zeta_4 \end{vmatrix} = (2\,3\,4) \quad \text{und}$$

$$\begin{vmatrix} \xi_3 & \eta_3 & \zeta_3 \\ \xi_4 & \eta_4 & \zeta_4 \\ \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 \end{vmatrix} = (3\,4\,1) \quad \text{gesetzt ist.}$$

Substituiren wir hierin die Werte der Differentialquotienten, die sich aus (2) ergeben, so erhalten wir

$$\left.\begin{aligned}
&(2\,3\,4) - \lambda_1 = \Delta\\
&\quad -(3\,4\,1) - \lambda_2(\xi_1\xi_2 + \varepsilon\eta_1\eta_2 + \mu\zeta_1\zeta_2) = 0\\
&(2\,3\,4) - \lambda_1(\xi_1\xi_2 + \varepsilon\eta_1\eta_2 + \mu\zeta_1\zeta_2) = 0\\
&\quad -(3\,4\,1) - \lambda_2 = \Delta\\
&(2\,3\,4) - \lambda_1(\xi_1\xi_3 + \varepsilon\eta_1\eta_3 + \mu\zeta_1\zeta_3) = 0\\
&\quad -(3\,4\,1) - \lambda_2(\xi_2\xi_3 + \varepsilon\eta_2\eta_3 + \mu\zeta_2\zeta_3) = 0\\
&(2\,3\,4) - \lambda_1(\xi_1\xi_4 + \varepsilon\eta_1\eta_4 + \mu\zeta_1\zeta_4) = 0\\
&\quad -(3\,4\,1) - \lambda_2(\xi_2\xi_4 + \varepsilon\eta_2\eta_4 + \mu\zeta_2\zeta_4) = 0
\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Daraus folgt, dass die Klammerausdrücke $\xi_\alpha\xi_\beta + \varepsilon\eta_\alpha\eta_\beta + \mu\zeta_\alpha\zeta_\beta$ für alle von einander verschiedenen Zeiger α und β denselben Wert besitzen mit alleiniger Ausnahme der Summe $\xi_3\xi_4 + \varepsilon\eta_3\eta_4 + \mu\zeta_3\zeta_4$ Bezeichnen wir diesen gemeinsamen Wert mit $-\frac{1}{\varrho}$, so reduciren sich unsere Gleichungen auf

$$\left.\begin{aligned}
&(2\,3\,4) - \lambda_1 = 0, \quad -(3\,4\,1) + \frac{\lambda_2}{\varrho} = 0\\
&(2\,3\,4) + \frac{\lambda_1}{\varrho} = 0, \quad -(3\,4\,1) - \lambda_2 = \Delta
\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Digitized by Google

Aus denselben folgt weiter

$$\Delta + \lambda_1 = -\frac{\lambda_1}{\varrho} \quad \text{und} \quad \Delta + \lambda_2 = -\frac{\lambda_2}{\varrho}$$

woraus

$$(\Delta + \lambda_1)\lambda_2 = (\Delta + \lambda_2)\lambda_1$$

und nach Division mit Δ

$$\lambda_2 = \lambda_1 \tag{6}$$

wird. Dann muss aber auch

$$-(3\,4\,1) = (2\,3\,4) \tag{7}$$

sein. Ausserdem wird

$$(2\,3\,4)\,\varrho + (2\,3\,4) = \Delta$$

also

$$(2\,3\,4) = -(3\,4\,1) = \frac{\Delta}{\varrho+1} \tag{8}$$

Andrerseits ist aber

$$\Delta = (2\,3\,4) - (3\,4\,1) + (4\,1\,2) - (1\,2\,3)$$

Daher muss

$$(4\,1\,2) - (1\,2\,3) = \Delta - \frac{2\Delta}{\varrho+1} = \frac{\varrho-1}{\varrho+1}\Delta \tag{9}$$

sein. Die beiden letzten Gleichungen können zur Bestimmung von ϱ benutzt werden. Quadriren wir dieselben und eliminiren dann $\frac{\Delta^2}{(\varrho+1)^2}$, so kommt

$$(\varrho-1)^2\,(2\,3\,4)^2 = (4\,1\,2)^2 + (1\,2\,3)^2 - 2(4\,1\,2)\,(1\,2\,3) \tag{10}$$

Directe Ausrechnung ergiebt aber, sofern wir der Kürze wegen

$$\xi_3^2 + \varepsilon\eta_3^2 + \mu\zeta_3^2 = \sigma_3$$

$$\xi_4^2 + \varepsilon\eta_4^2 + \mu\zeta_4^2 = \sigma_4$$

$$\xi_3\xi_4 + \varepsilon\eta_3\eta_4 + \mu\zeta_3\zeta_4 = -\frac{1}{\varrho_{34}}$$

setzen:

$$\varepsilon\mu(2\,3\,4)^2 = \frac{1}{\varrho^3}\begin{vmatrix} \varrho, & -1, & -1 \\ -1, & \varrho\sigma_3, & -\frac{\varrho}{\varrho_{34}} \\ -1, & -\frac{\varrho}{\varrho_{34}}, & \varrho\sigma_4 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{\varrho^2}\left[\varrho^2\left(\sigma_3\sigma_4 - \frac{1}{\varrho_{34}^2}\right) - \left(\sigma_3 + \sigma_4 + \frac{2}{\varrho_{34}}\right)\right] \quad \text{und}$$

Digitized by Google

$$\varepsilon\mu[(4\,1\,2)^2+(1\,2\,3)^2-2(4\,1\,2)\,(1\,2\,3)]$$

$$-\frac{1}{\varrho^3}\begin{vmatrix}\varrho\sigma_4, & -1, & -1\\ -1, & \varrho, & -1\\ -1, & -1, & \varrho\end{vmatrix}+\frac{1}{\varrho^3}\begin{vmatrix}\varrho, & -1, & -1\\ -1, & \varrho, & -1\\ -1, & -1, & \varrho\sigma_3\end{vmatrix}-\frac{2}{\varrho^3}\begin{vmatrix}-1, & -1, & -\frac{\varrho}{\varrho_{34}}\\ \varrho, & -1, & -1\\ -1, & \varrho, & -1\end{vmatrix}$$

$$=\frac{\varrho^2-1}{\varrho^2}\left(\sigma_3+\sigma_4+\frac{2}{\varrho_{34}}\right)$$

Setzen wir diese Werte in (10) ein, so kommt:

$$(\varrho-1)\left[\varrho^2\left(\sigma_3\,\sigma_4-\frac{1}{\varrho_{34}{}^2}\right)-\left(\sigma_3+\sigma_4+\frac{2}{\varrho_{34}}\right)\right]$$

$$=(\varrho+1)\left(\sigma_3+\sigma_4+\frac{2}{\varrho_{34}}\right)$$

und daraus für ϱ die Bestimmungsgleichung

$$\varrho(\varrho-1)=2\,\frac{\sigma_3+\sigma_4+\frac{2}{\varrho_{34}}}{\sigma_3\,\sigma_4-\frac{1}{\varrho_{24}{}^2}} \qquad (11)$$

2.

Aus den bisherigen Resultaten lassen sich die folgenden geometrischen Schlüsse ziehen:

Aus der Gleichheit der Summenausdrücke $\xi_\alpha\xi_\beta+\varepsilon\eta_\alpha\eta_\beta+\mu\zeta_\alpha\zeta_\beta$. folgt, dass die Seitenfläche $P_2P_3P_4$ des maximalen oder minimalen Tetraeders parallel der Tangentialebene in P_1, die Seitenfläche $P_1P_3P_4$ parallel der Tangentialebene in P_2 läuft oder OP_1 zu $P_2P_3P_4$ und OP_2 zu $P_1P_3P_4$ conjugirt ist, dass ferner P_1P_2 zur Ebene P_3OP_4 und P_3P_4 zur Ebene P_1OP_2 conjugirt ist. Nennen wir den Schnittpunkt der durch 0 zu P_3P_4 conjugirt gelegten Ebene mit der Geraden P_3P_4 oder deren Verlängerung P und die Schnittcurve derselben Ebene mit der gegebenen Fläche K, so liegen die Punkte P_1 und P_2 auf K und stellen die Endpunkte einer zur Richtung OP conjugirten Sehne dar, es muss also OP oder dessen Verlängerung durch den Mittelpunkt R von P_1P_2 gehen. Suchen wir ferner den Schnittpunkt R_1 von P_1O oder dessen Verlängerung mit $P_2P_3P_4$, den Schnittpunkt R_2 von P_2O oder dessen Verlängerung mit $P_1P_3P_4$, so ist

$$OP_1 : OR_1 = OP_2 : OR_2 = \pm\varrho$$

je nachdem $\varrho \gtrless 0$ ist, d. h. je nachdem 0 auf den Strecken P_1R_1, P_2R_2 oder auf der Verlängerung derselben liegt.

Endlich muss sich die Polarebene zu P_3 mit der Polarebene zu P_4 in einem Punkte S auf OP oder auf der Verlängerung von OP derart schneiden, dass

$$OS : OR = \pm \varrho$$

ist, je nachdem $\varrho \gtrless 0$ ist, d. h. je nachdem 0 auf SR oder auf der Verlängerung von SR liegt. Da nun S ein Schnittpunkt der Polarebenen zu P_3 und P_4 ist und P auf der Verbindungslinie dieser beiden Punkte sich befindet, so muss die Polarebene zu P ebenfalls durch S gehen. Darum muss auch die Polare zu P in Bezug auf die Schnittcurve K durch S gehen, also S der Schnittpunkt dieser Polaren mit OP oder der Verlängerung von OP sein.

Damit ist die Construction des maximalen oder minimalen Tetraeders bis auf die Bestimmung von ϱ gefunden.

Man construire durch 0 die zu P_3P_4 conjugirte Ebene, welche P_3P_4 oder die Verlängerung von P_3P_4 im Punkte P und die gegebene Fläche in der Curve K schneidet. Dann verbinde man P mit 0 und bestimme den Punkt S, in welchem diese Verbindungslinie oder die Verlängerung derselben von der Polaren von P in Bezug auf die Schnittcurve K getroffen wird, und suche den Punkt R, für welchen

$$OS : OR = \pm \varrho$$

ist. Dann trifft die durch R zur Polare parallel gezogene Gerade die Curve K in den gesuchten Eckpunkten P_1 und P_2.

Die Gleichung (4) besagt, dass die Teiltetraeder $OP_1P_3P_4$ und $OP_2P_3P_4$ denselben Inhalt haben. Dies versteht sich nach dem Vorhergesagten von selbst, da sie die Grundfläche OP_3P_4 gemeinsam haben und gleich hoch sind.

Es erübrigt noch die Berechnung von Δ und J.

Nach (8) ist

$$(2\,3\,4) \quad -\frac{\Delta}{\varrho+1}$$

Ferner hatten wir gefunden

Digitized by Google

$$\varepsilon\mu\,(2\,3\,4)^2 = \frac{1}{\varrho^2}\left[\varrho^2\left(\sigma_3\sigma_4 - \frac{1}{\varrho_{34}^2}\right) - \left(\sigma_3+\sigma_4+\frac{2}{\varrho_{34}}\right)\right]$$

Also wird

$$\Delta = (\varrho+)(2\,3\,4) = \pm\frac{\varrho+1}{\varrho}\sqrt{\varepsilon\mu\left[\varrho^2\left(\sigma_3\sigma_4 - \frac{1}{\varrho_{34}^2}\right) - \left(\sigma_3+\sigma_4+\frac{2}{\varrho_{34}}\right)\right]}$$

und es ergeben sich mit Benutzung von (11) nach wenigen Umformungen die beiden Darstellungen

$$\Delta = \pm\frac{\varrho+1}{\varrho}\sqrt{\varepsilon\mu\,\frac{\varrho(\varrho+1)}{2}\left(\sigma_3\sigma_4 - \frac{1}{\varrho_{34}^2}\right)}$$

$$= \pm\frac{\varrho+1}{\varrho}\sqrt{\varepsilon\mu\,\frac{\varrho+1}{\varrho-1}\left(\sigma_3+\sigma_4+\frac{2}{\varrho_{34}}\right)} \qquad (12)$$

wo das Vorzeichen so zu wählen ist, dass der Ausdruck positiv wird, Mit Δ ist aber auch J bestimmt.

3.

Zur weiteren Bestimmung von ϱ denken wir uns um 0 als Mittelpunkt eine mit der gegebenen ähnliche (eventuell der conjugirten ähnliche) Fläche construirt, welche P_3P_4 oder die Verlängerung von P_3P_4 in P berührt.

Die Gleichung der berührenden Fläche sei

$$\xi^2+\varepsilon\eta^2+\mu\zeta^2 = s$$

Bezeichnen wir die Coordinaten von P mit u, v, w, so gelten die folgenden Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} &u^2+\varepsilon v^2+\mu w^2 = s \\ &u\xi_3+\varepsilon v\eta_3+\mu w\zeta_3 = s, \quad u\xi_4+\varepsilon v\eta_4+\mu w\zeta_4 = s \\ &u-\xi_3 = t(\xi_4-\xi_3), \quad v-\eta_3 = t(\eta_4-\eta_3) \\ &\qquad\qquad w-\zeta = t(\zeta_4-\zeta_3) \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

Wir quadriren die letzten 3 Gleichungen, fügen bei der vorletzten, den Factor ε, bei der letzten den Factor μ hinzu und addiren. Dann kommt

$$\sigma_3 - s = t^2\left(\sigma_3+\sigma_4+\frac{2}{\varrho_{34}}\right) \qquad (11)$$

Multipliciren wir dieselben 3 Gleichungen respective mit ξ_3, $\varepsilon\eta_3$, $\mu\xi_3$ und addiren, so wird

Digitized by Google

$$s - \sigma_3 = t\left(-\frac{1}{\varrho_{34}} - \sigma_3\right) \tag{15}$$

Multipliciren wir sie mit ξ_4, $\varepsilon\eta_4$, $\mu\zeta_4$ und addiren wiederum, so ergibt sich

$$s + \frac{1}{\varrho_{34}} = t\left(\sigma_4 + \frac{1}{\varrho_{34}}\right) \tag{16}$$

Nun vereinigen wir (15) und (16) durch Multiplication und setzen den obigen Wert für $\sigma_3 - s$ ein. Dann kommt nach Division mit t^2

$$\left(\sigma_3 + \sigma_4 + \frac{2}{\varrho_{34}}\right)\left(s + \frac{1}{\varrho_{34}}\right) = \left(\frac{1}{\varrho_{34}} + \sigma_3\right)\left(\frac{1}{\varrho_{34}} + \varrho_4\right)$$

woraus

$$s = \frac{\sigma_3\sigma_4 - \frac{1}{\varrho_{34}^2}}{\sigma_3 + \sigma_4 + \frac{2}{\varrho_{34}}} \tag{17}$$

wird. Mit Einsetzung dieses Wertes nimmt die zur Bestimmung von ϱ gefundene Gleichung die einfache Gestalt an

$$\varrho(\varrho - 1) = \frac{2}{s} \tag{18}$$

welche vollkommen übereinstimmt mit der Gleichung, welche in der im Eingang erwähnten Abhandlung für die entsprechende Aufgabe der Ebene (pag. 126—145) aufgestellt und für die verschiedenen Arten der Curven zweiten Grades eingehend discutirt worden ist.

Ausserdem erkennt man, dass s und damit auch ϱ nur abhängig ist von der Lage der durch P_3 und P_4 bestimmten Geraden, aber nicht von der Lage der Punkte P_3 und P_4 auf dieser Geraden, dass also zu allen Punktepaaren auf derselben Geraden dieselben Eckpunkte P_1 und P_2 des maximalen oder minimalen Tetraeders gehören.

Nehmen wir ferner an, es sei die auf ihre Hauptaxe bezogene Gleichung der Schnittcurve K

$$\frac{x'^2}{a^2} + \varepsilon\frac{y'^2}{b^2} = 1$$

so wird die Schnittcurve der durch P zu P_3P_4 conjugirt gelegten Ebene mit der berührenden Fläche

$$\xi^2 + \varepsilon\eta^2 + \mu\zeta^2 = s$$

dargestellt durch die Gleichung

Digitized by Google

$$\frac{x'^2}{a^2} + \varepsilon \frac{y'^2}{b^2} = s$$

Bilden wir beide Curven mit Substitution

$$x' = a\xi', \quad y' = b\eta'$$

ab, so werden die Gleichungen der Abbilder

$$\xi'^2 + \varepsilon\eta'^2 = 1 \quad \text{und} \quad \xi'^2 + \varepsilon\eta'^2$$

Es stellt also s die damals mit σ bezeichnete Grösse dar, welche aus der linken Seite der Gleichung

$$\xi^2 + \varepsilon\eta^2 = 1$$

hervorgeht, wenn man darin ξ und η durch die Coordinaten des Punktes P ersetzt. Damit ist gezeigt, dass die Construction der Punkte P_1 und P_2 identisch ist mit der Lösung der bereits in aller Vollständigkeit behandelten Aufgabe: Das Dreieck vom grössten oder kleinsten Inhalt zu suchen, dessen eine Ecke der Punkt P' ist, während die beiden andern Ecken auf der Curve K sich befinden.

Wir gewinnen hiernach das definitive Resultat:

Man zeichne durch O die zu P_3P_4 conjugirte Ebene, welche P_3P_4 oder dessen Verlängerung im Punkte P und die gegebene Fläche in der Curve K schneidet. Dann construire man das Dreieck vom grössten oder kleinsten Inhalt, dessen eine Ecke der feste Punkt P ist, und dessen andere beiden Ecken auf K liegen. Diese beiden Ecken sind dann die gesuchten Eckpunkte P_1 und P_2 des maximalen oder minimalen Tetraeders.

Eine besondere Beachtung verdient der Fall, dass P_3P_4 oder dessen Verlängerung durch O geht. Während im allgemeinen die Anzahl der Lösungen unserer Aufgabe höchstens 2 beträgt, sind in diesem speciellen Falle unendlich viele Lösungen vorhanden. Es fällt dann P mit O zusammen, und es wird durch jedes beliebige Paar von conjugirten Halbmessern der Curve K ein maximales Dreieck und damit auch ein maximales Tetraeder bestimmt.

4.

Wir wollen nun die Annahme, dass die beiden Punkte P_3 und P_4 fest gegeben seien, fallen lassen und voraussetzen, dass nur P_4 der Lage nach bestimmt sei, während die drei Punkte P_1, P_2 und

Digitized by Google

P_3 auf der Fläche wandern, und fragen wiederum nach dem Tetraeder grössten oder kleinsten Inhalts, das sich construiren lässt; dann treten zu (2) noch die Bedingungsgleichungen hinzu:

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \xi_3} + \lambda_3 \xi_3 = 0, \quad \frac{\partial \Delta}{\partial \eta_3} + \varepsilon \lambda_3 \eta_3 = 0$$

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \zeta_3} + \mu \lambda_3 \zeta_3 = 0, \quad \xi_3^2 + \varepsilon \eta_3^2 + \mu \zeta_3^4 = 1 \qquad (19)$$

Daraus ergiebt sich weiter

$$\left.\begin{aligned}
(4\,1\,2) + \xi_1 \frac{\partial \Delta}{\partial \xi_3} + \eta_1 \frac{\partial \Delta}{\partial \eta_3} + \zeta_1 \frac{\partial \Delta}{\partial \zeta_3} &= 0 \\
(4\,1\,2) + \xi_2 \frac{\partial \Delta}{\partial \xi_3} + \eta_2 \frac{\partial \Delta}{\partial \eta_3} + \zeta_2 \frac{\partial \Delta}{\partial \zeta_3} &= 0 \\
(4\,1\,2) + \xi_3 \frac{\partial \Delta}{\partial \xi_3} + \eta_3 \frac{\partial \Delta}{\partial \eta_3} + \zeta_3 \frac{\partial \Delta}{\partial \zeta_3} &= \Delta \\
(4\,1\,2) + \xi_4 \frac{\partial \Delta}{\partial \xi_3} + \eta_4 \frac{\partial \Delta}{\partial \eta_3} + \zeta_4 \frac{\partial \Delta}{\partial \zeta_3} &= 0
\end{aligned}\right\} \qquad (20)$$

oder

$$\left.\begin{aligned}
(4\,1\,2) - \lambda_3(\xi_1 \xi_3 + \varepsilon \eta_1 \eta_3 + \mu \zeta_1 \zeta_3 &= 0 \\
(4\,1\,2) - \lambda_3(\xi_2 \xi_3 + \varepsilon \eta_2 \eta_3 + \mu \zeta_2 \zeta_3 &= 0 \\
(4\,1\,2) - \lambda_3 &= 0 \\
(4\,1\,2) - \lambda_3(\xi_3 \xi_4 + \varepsilon \eta_3 \eta_4 + \mu \zeta_3 \zeta_4) &= 0
\end{aligned}\right\} \qquad (21)$$

Daraus folgt, dass in diesem Falle auch die von uns bisher mit $-\frac{1}{\varrho_{34}}$ bezeichnete Summe gleich $-\frac{1}{\varrho}$ ist. Geometrisch bedeutet dieses Resultat, dass auch die Seitenfläche $P_1 P_2 P_4$ parallel der Tangentialebene in P_3 und die Seitenfläche $P_2 P_3 P_4$ parallel der Polarebene zu P_4 läuft. Ferner wird

$$\Delta + \lambda_3 = -\frac{\lambda_3}{\varrho}$$

es muss also

$$\lambda_3 = \lambda_2 = \lambda_1 = \lambda$$

sein. Endlich ist auch

$$(4\,1\,2) = -(3\,4\,1) = (2\,3\,4)$$

d. h. es haben die Tetraeder $P_4 P_1 P_3$, $P_3 P_4 P_1$, $P_2 P_3 P_4$ sämtlich denselben Inhalt.

Digitized by Google

Bezeichnen wir wie oben mit R_1 den Schnittpunkt von $P_1 0$ oder dessen Verlängerung mit $P_2P_3P_4$, mit R_2 den Schnittpunkt von $P_2 0$ oder dessen Verlängerung mit $P_1P_3P_4$, ferner mit R_3 den Schnittpunkt von $P_3 0$ oder dessen Verlängerung mit $P_1P_2P_4$, mit R_4 den Schnittpunkt von $P_4 0$ oder dessen Verlängerung mit $P_1P_2P_3$, endlich mit S den Schnittpunkt von $P_4 0$ oder dessen Verlängerung mit der Polarebene zu P_4, so ist

$$0P_1 : 0R_1 = 0P_2 : 0R_2 = 0P_3 : 0R_3 = 0S : 0R_4 = \pm \varrho$$

je nachdem $\varrho \gtrless 0$ ist, d. h. je nachdem 0 auf den Strecken P_1R_1, P_2R_2, P_3R_3, SR_4 oder auf der Verlängerung derselben liegt.

Was die Bedingungsgleichung für ϱ angeht, so erhalten wir dieselbe aus (11), indem wir darin

$$\sigma_3 = 1, \quad \varrho_{34} = \varrho$$

setzen. Dann kommt

$$\varrho(\varrho-1) = 2\,\frac{1+\sigma_4+\dfrac{2}{\varrho}}{\sigma_6 - \dfrac{1}{\varrho^2}}$$

oder

$$\varrho(\varrho-2)(\varrho+1)\sigma_4 = 3(\varrho+1)$$

woraus, da $\varrho+1$ nicht gleich null sein kann

$$\varrho(\varrho-2) = \frac{3}{\sigma_4} \tag{22}$$

folgt. Für die Determinante Δ kommt

$$\Delta = \pm\,\frac{\varrho+1}{\varrho}\sqrt{\varepsilon\mu\,\frac{\varrho(\varrho+1)}{2}\left(\sigma_4 - \frac{1}{\varrho^2}\right)}$$

woraus sich nach kurzer Transformation

$$\Delta = \pm\,\frac{(\varrho+1)^2}{\varrho}\sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{\varrho(\varrho-2)}} = \pm\,\frac{(\varrho+1)^2}{\varrho}\sqrt{\varepsilon\mu\,\frac{\sigma_4}{3}} \tag{23}$$

ergiebt. Dieser letztere Ausdruck lässt erkennen, dass nur für solche Punkte P_4 ein Maximum oder Minimum vorhanden sein kann, für welche

$$\varepsilon\mu\sigma_4 > 0 \quad \text{ist.}$$

Digitized by Google

Die Construction verläuft folgendermassen:

Man zeichne die Ebene

$$\xi\xi_4 + \varepsilon\eta\eta_4 + \mu\zeta\zeta_4 = -\frac{1}{\varrho}$$

und nehme auf der Schnittcurve dieser Ebene mit der gegebenen Fläche den Punkt P_3 beliebig an. Dann zeichne man die Ebene

$$\xi\xi_3 + \varepsilon\eta\eta_3 + \mu\zeta\zeta_3 = -\frac{1}{\varrho}$$

welche die Schnittcurve in den Ecken P_1 und P_2 schneidet.

Es entsprechen also jedem der beiden Werte von ϱ, die sich aus (22) ergeben, sofern sie überhaupt reell sind und zur Construction verwendet werden können, unendlich viele Lösungen unserer Aufgabe.

5.

In dem besondern Falle, dass auch P_4 auf der Fläche liegt, also

$$\sigma_4 = 1$$

ist, heisst die Gleichung für ϱ

$$\varrho(\varrho - 2) = 3$$

wonach

$$\varrho = 3$$

wird. Dann ist

$$\Delta = \frac{16}{9}\sqrt{\varepsilon\mu \cdot 3}$$

und

$$(2\,3\,4) = -(3\,4\,1) = (4\,1\,2) = \frac{\Delta}{\varrho+1} = \frac{\Delta}{4}$$

daher muss auch

$$-(1\,2\,3) = \frac{\Delta}{4}$$

sein. Es sind also die sämtlichen Tetraeder unter einander gleich. Damit sind die Lösungen der letzten Aufgabe gefunden: „Das Tetraeder der grössten oder kleinsten Inhalts zu finden, dessen Ecken sämtlich auf einer Fläche zweiten Grades liegen."

Die Aufgabe ist nur dann zu lösen, wenn

Digitized by Google

$$\varepsilon\mu = +1$$

ist, und zwar giebt es in diesem Falle unendlich viele Lösungen.

Man nimmt P_4 beliebig an und zeichnet die Ebene

$$\xi\xi_4 + \varepsilon\eta\eta_4 + \mu\zeta\zeta_4 = -\tfrac{1}{3}$$

Dann nimmt man auf der Schnittcurve dieser Ebene mit der Fläche P_3 beliebig an und construirt die Ebene

$$\xi\xi_3 + \varepsilon\eta\eta_3 + \mu\zeta\zeta_3 = -\tfrac{1}{3}$$

Diese trifft die Schnittcurve in den gesuchten beiden Ecken P_1 und P_2.

Berlin, Juni 1895.

Digitized by Google

VII.

Integration der Differentialgleichung $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = k^2 f$ für elliptische und parabolische Coordinaten.

Von

Dr. J. H. Hartenstein

in Dresden *).

Einleitung.

A. *Integration der Differentialgleichung*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = k^2 f$$

für Polarcoordinaten.

Der Differentialgleichung

1) $$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = k^2 f$$

wird, wie Herr C. Neumann bemerkt hat, genügt durch die Besselsche Function

---

*) Vergl. Ueber die Integration der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = k^2 f$$

für Polar- und elliptische Coordinaten u. s. w. von demselben Verf., Dresden 1887.

Digitized by Google

2) $$J_0(P) = \sum_0^\infty (-1)^n \frac{P^{2n}}{\Pi 2n \Pi 2n}$$

falls

3) $$\begin{cases} P = ikR \quad (i = \sqrt{-1}) \\ R^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 \\ \Pi 2n = 2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2n \end{cases}$$

(Π ist also nicht die Gauss'sche Function).

Hierin bedeuten x_1, y_1 die rechtwinkligen Coordinaten eines beliebigen Punktes.

Durch Einführung von Polarcoordinaten, die definirt sind durch

4) $$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi \\ (x_1 = r_1\cos\varphi_1, \quad y_1 = r_1\sin\varphi_1) \end{cases}$$

verwandelt sich obige Differentialgleichung in

5a) $$\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} = k^2 r f$$

oder in

5b) $$\frac{\partial}{\partial \varrho}\left(\varrho\frac{\partial f}{\partial \varrho}\right) + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \varrho f = 0$$

falls

6) $$\varrho = ikr \quad (\varrho_1 = ikr_1)$$

Dieser Gleichung wird nach Herrn C. Neumann genügt durch

7a) $$J_0(P) = J_0(\sqrt{\varrho^2 + \varrho_1^2 - 2\varrho\varrho_1\cos(\varphi - \varphi_1)})$$
$$= \sum_0^\infty \varepsilon_n J_n(\varrho) J_n(\varrho_1)\cos n(\varphi - \varphi_1)$$

oder

7b) $$J_0(P) = \sum_0^\infty \varepsilon_n (C_n C_n' + S_n S_n')$$

falls

8) $$\varepsilon_0 = 1, \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 \ldots = 2$$

9) $$\begin{cases} C_n = J_n(\varrho)\cos n\varphi & S_n = J_n(\varrho)\sin n\varphi \\ C_n' = J_n(\varrho_1)\cos n\varphi_1 & S_n' = J_n(\varrho_1)\sin n\varphi_1 \end{cases}$$

10) $$J_n(\varrho) = \sum_0^\infty (-1)^h \frac{\varrho^{2h+n}}{\Pi 2h \Pi 2(h+n)}$$

Da der Punkt (r_1, φ_1) ganz beliebig gewählt werden kann, so sind

Digitized by Google

in 7b) die C_n' und S_n' als willkürliche Constante aufzufassen und die particulären Lösungen der Differentialgleichung 5) haben die Form

$$11) \qquad \left\{ \begin{array}{l} C_n = J_n(\varrho)\cos n\varphi \\ S_n = J_n(\varrho)\sin n\varphi \end{array} \right\} \; n = 0,\ 1,\ 2\ \ldots\ \infty$$

B. *Recurrirende Relationen für die* C_n *und* S_n.

Es ist

$$C_n = J_n(\varrho)\cos n\varphi \quad \text{und} \quad S_n = J_n(\varrho)\sin n\varphi$$

daher:

$$\frac{\partial C_n}{\partial \varrho} = J_n'(\varrho)\cos n\varphi, \qquad \frac{\partial S_n}{\partial \varrho} = J_n'(\varrho)\sin n\varphi$$

$$\frac{\partial C_n}{\partial \varphi} = -nJ_n(\varrho)\sin n\varphi, \quad \frac{\partial S_n}{\partial \varphi} = nJ_n(\varrho)\cos n\varphi$$

Die $J_n(\varrho)$ genügen aber bekanntlich den recurrirenden Relationen

$$12) \qquad \left\{ \begin{array}{l} 2J_n'(\varrho) = J_{n-1}(\varrho) - J_{n+1}(\varrho) \\ 2n\dfrac{J_n(\varrho)}{\varrho} = J_{n-1}(\varrho) + J_{n+1}(\varrho) \end{array} \right.$$

daher kommt:

$$2\frac{\partial C_n}{\partial \varrho} = (J_{n-1}(\varrho) - J_{n+1}(\varrho))\cos n\varphi$$

$$2\frac{\partial S_n}{\partial \varrho} = (J_{n-1}(\varrho) - J_{n+1}(\varrho))\sin n\varphi$$

$$\frac{2}{\varrho}\frac{\partial C_n}{\partial \varphi} = -(J_{n-1}(\varrho) + J_{n+1}(\varrho))\sin n\varphi$$

$$\frac{2}{\varrho}\frac{\partial S_n}{\partial \varphi} = (J_{n-1}(\varrho) + J_{n+1}(\varrho))\cos n\varphi$$

Hieraus ergiebt sich leicht:

$$\frac{\partial C_n}{\partial \varrho} - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial S_n}{\partial \varphi} = -J_{n+1}(\varrho)\cos n\varphi$$

$$\frac{\partial S_n}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial C_n}{\partial \varphi} = -J_{n+1}(\varrho)\sin n\varphi$$

$$\frac{\partial C_n}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial S_n}{\partial \varphi} = J_{n-1}(\varrho)\cos n\varphi$$

Digitized by Google

$$\frac{\partial S_n}{\partial \varrho} - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial C_n}{\partial \varphi} = J_{n-1}(\varrho)\sin n\varphi$$

Multiplicirt man die erste dieser Gleichungen mit $\cos\varphi$, die zweite mit $-\sin\varphi$ und addirt, so erhält man auf diese und ähnliche Weise:

Ia.
$$\begin{cases} \left(\frac{\partial C_n}{\partial \varrho} - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial S_n}{\partial \varphi}\right)\cos\varphi - \left(\frac{\partial S_n}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial C_n}{\partial \varphi}\right)\sin\varphi = -C_{n+1} \\ \left(\frac{\partial C_n}{\partial \varrho} - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial S_n}{\partial \varphi}\right)\sin\varphi + \left(\frac{\partial S_n}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial C_n}{\partial \varphi}\right)\cos\varphi = -S_{n+1} \end{cases}$$

Ib.
$$\begin{cases} \left(\frac{\partial C_n}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial S_n}{\partial \varphi}\right)\cos\varphi + \left(\frac{\partial S_n}{\partial \varrho} - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial C_n}{\partial \varphi}\right)\sin\varphi = C_{n-1} \\ -\left(\frac{\partial C_n}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial S_n}{\partial \varphi}\right)\sin\varphi + \left(\frac{\partial S_n}{\partial \varrho} - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial C_n}{\partial \varphi}\right)\cos\varphi = S_{n-1} \end{cases}$$

Hieraus folgt leicht:

II.
$$\begin{cases} 2\left(\frac{\partial C_n}{\partial \varrho}\cos\varphi - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial C_n}{\partial \varphi}\sin\varphi\right) = C_{n-1} - C_{n+1} \\ 2\left(\frac{\partial S_n}{\partial \varrho}\cos\varphi - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial S_n}{\partial \varphi}\sin\varphi\right) = S_{n-1} - S_{n+1} \end{cases}$$

Diese Relationen bleiben auch richtig für $n = 0$, wenn man setzt

$$C_{-1} \equiv -C_1 \quad \text{und} \quad S_{-1} \equiv S_1$$

Cap. I.

Integration der Differentialgleichung $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = k^2 f$ für elliptische Coordinaten

A. *Einführung elliptischer Coordinaten.*

Setzt man

1a) $$x + iy = c\cos i(\vartheta + i\omega)$$

oder

Digitized by Google

1b.
$$\begin{cases} x = c\cos i\vartheta\cos w = c\,\dfrac{e^{\vartheta}+e^{-\vartheta}}{2}\cos w \\ y = \dfrac{c}{i}\sin i\vartheta\sin w = c\,\dfrac{e^{\vartheta}-e^{-\vartheta}}{2}\sin w \end{cases}$$

so folgt leicht:

2a)
$$\left(\frac{x}{c\,\dfrac{e^{\vartheta}+e^{-\vartheta}}{2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{c\,\dfrac{e^{\vartheta}-e^{-\vartheta}}{2}}\right)^2 = 1$$

2b)
$$\left(\frac{x}{c\cos w}\right)^2 - \left(\frac{y}{c\sin w}\right)^2 = 1$$

Man erkennt, dass die Curven $\vartheta = \text{Const.}$ confocale Ellipsen repräsentiren mit den Halbachsen

3)
$$a = c\,\frac{e^{\vartheta}+e^{-\vartheta}}{2}, \quad b = c\,\frac{e^{\vartheta}-e^{-\vartheta}}{2}$$

während die Curven $w = \text{Const.}$ confocale Hyperbeln darstellen. Da

$$a^2 - b^2 = c^2$$

so bedeutet c die lineare Excentricität der Schar confocaler Ellipsen $\vartheta = \text{Const.}$

Wir setzen nun weiter:

4)
$$ika = \alpha, \quad ikb = \beta, \quad ikc = \gamma$$

so dass

5)
$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{\gamma}{2}(e^{\vartheta}+e^{-\vartheta}) = u+v \\ \beta = \dfrac{\gamma}{2}(e^{\vartheta}-e^{-\vartheta}) = u-v \end{cases}$$

falls

6a)
$$u = \frac{\gamma}{2}e^{\vartheta}, \qquad v = \frac{\gamma}{2}e^{-\vartheta}$$

Aus 5) ergiebt sich sofort:

6b)
$$u = \frac{\alpha+\beta}{2}, \qquad v = \frac{\alpha-\beta}{2}$$

Aus 1b) folgt ferner:

7a)
$$ikx = (u+v)\cos w, \quad iky(u-v)\sin w$$

Digitized by Google

7b) $$\varrho = ikr = \sqrt{(ikx)^2 + (iky)^2} = \sqrt{u^2 + v^2 + 2uv\cos 2w}$$

7c) $$\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{x}{r} = \dfrac{ikx}{\varrho} = \dfrac{(u+v)\cos w}{\varrho} \\ \sin\varphi = \dfrac{y}{r} = \dfrac{iky}{\varrho} = \dfrac{(u-v)\sin w}{\varrho} \end{cases}$$

Durch Einführung der elliptischen Coordinaten ϑ und w verwandelt sich endlich die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 f}{x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = k^2 f$$

in

8a) $$\frac{\partial^2 f}{\partial h^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial w^2} = \frac{k^2 c^2}{2}(\cos 2i\vartheta - \cos 2w) f$$

oder

8b) $$\frac{\partial^2 f}{\partial \vartheta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial w^2} + (u^2 + v^2 - 2uv\cos 2w) f = 0$$

B. *Recurrirende Relationen für die C_n und S_n in elliptischen Coordinaten.*

Denkt man sich in den Ausdrücken

$$C_n = J_n(\varrho)\cos n\varphi \quad \text{und} \quad S_n = J_n(\varrho)\sin n\varphi$$

die ϱ und φ auf Grund der Relationen 7b) und 7c) durch elliptische Coordinaten ersetzt, so ist

9) $$\begin{cases} \dfrac{\partial C_n}{\partial u} = \dfrac{\partial C_n}{\partial \varrho}\dfrac{\partial \varrho}{\partial u} + \dfrac{\partial C_n}{\partial \varphi}\dfrac{\partial \varphi}{\partial u} \\ \dfrac{\partial C_n}{\partial v} = \dfrac{\partial C_n}{\partial \varrho}\dfrac{\partial \varrho}{\partial v} + \dfrac{\partial C_n}{\partial \varphi}\dfrac{\partial \varphi}{\partial v} \\ \dfrac{\partial S_n}{\partial u} = \dfrac{\partial S_n}{\partial \varrho}\dfrac{\partial \varrho}{\partial u} + \dfrac{\partial S_n}{\partial \varphi}\dfrac{\partial \varphi}{\partial u} \\ \dfrac{\partial S_n}{\partial v} = \dfrac{\partial S_n}{\partial \varrho}\dfrac{\partial \varrho}{\partial v} + \dfrac{\partial S_n}{\partial \varphi}\dfrac{\partial \varphi}{\partial v} \end{cases}$$

Hieraus folgt durch Auflösung nach $\dfrac{\partial C_n}{\partial \varrho}$ und $\dfrac{\partial C_n}{\partial \varphi}$ bzhw. nach $\dfrac{\partial S_n}{\partial \varrho}$ und $\dfrac{\partial S_n}{\partial \varphi}$:

Digitized by Google

10)
$$\begin{cases} N\dfrac{\partial C_n}{\partial \varrho_n} = \dfrac{\partial C_n}{\partial u}\dfrac{\partial \varphi}{\partial v} - \dfrac{\partial C_n}{\partial v}\dfrac{\partial \varphi}{\partial u} \\ N\dfrac{\partial C_n}{\partial \varphi} = \dfrac{\partial C_n}{\partial v}\dfrac{\partial \varrho}{\partial u} - \dfrac{\partial C_n}{\partial u}\dfrac{\partial \varrho}{\partial v} \\ N\dfrac{\partial S_n}{\partial \varrho} = \dfrac{\partial S_n}{\partial u}\dfrac{\partial \varphi}{\partial v} - \dfrac{\partial S_n}{\partial v}\dfrac{\partial \varphi}{\partial u} \\ N\dfrac{\partial S_n}{\partial \varphi} = \dfrac{\partial S_n}{\partial v}\dfrac{\partial \varrho}{\partial u} - \dfrac{\partial S_n}{\partial u}\dfrac{\partial \varrho}{\partial v} \end{cases}$$

falls

11)
$$N \equiv \frac{\partial \varrho}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial v} - \frac{\partial \varrho}{\partial v}\frac{\partial \varphi}{\partial u}$$

Substituirt man die Ausdrücke 10) in die mit N multiplicirten Gleichungen Ia und Ib der Einleitung, so gehen diese nach einigen leichten Transformationen über in

12a)
$$\begin{cases} \dfrac{\partial C_n}{\partial u}\left[\cos\varphi\dfrac{\partial \varphi}{\partial v} + \dfrac{\sin\varphi}{\varrho}\dfrac{\partial \varrho}{\partial v}\right] - \dfrac{\partial C_n}{\partial v}\left[\cos\varphi\dfrac{\partial \varphi}{\partial u} + \dfrac{\sin\varphi}{\varrho}\dfrac{\partial \varrho}{\partial u}\right] \\ - \dfrac{\partial S_n}{\partial u}\left[\sin\varphi\dfrac{\partial \varphi}{\partial v} - \dfrac{\cos\varphi}{\varrho}\dfrac{\partial \varrho}{\partial v}\right] + \dfrac{\partial S_n}{\partial v}\left[\sin\varphi\dfrac{\partial \varphi}{\partial u} - \dfrac{\cos\varphi}{\varrho}\dfrac{\partial \varrho}{\partial u}\right] \\ \qquad = -N C_{n+1} \\ \dfrac{\partial C_n}{\partial u}\left[\sin\varphi\dfrac{\partial \varphi}{\partial v} - \dfrac{\cos\varphi}{\varrho}\dfrac{\partial \varrho}{\partial v}\right] - \dfrac{\partial C_n}{\partial v}\left[\sin\varphi\dfrac{\partial \varphi}{\partial u} - \dfrac{\cos\varphi}{\varrho}\dfrac{\partial \varrho}{\partial u}\right] \\ + \dfrac{\partial S_n}{\partial u}\left[\cos\varphi\dfrac{\partial \varphi}{\partial v} + \dfrac{\sin\varphi}{\varrho}\dfrac{\partial \varrho}{\partial v}\right] - \dfrac{\partial S_n}{\partial v}\left[\cos\varphi\dfrac{\partial \varphi}{\partial u} + \dfrac{\sin\varphi}{\varrho}\dfrac{\partial \varrho}{\partial u}\right] \\ \qquad = -N S_{n+1} \end{cases}$$

12b)
$$\begin{cases} \dfrac{\partial C_n}{\partial u}\left[\cos\varphi\dfrac{\partial \varphi}{\partial v} + \dfrac{\sin\varphi}{\varrho}\dfrac{\partial \varrho}{\partial v}\right] - \dfrac{\partial C_n}{\partial v}\left[\cos\varphi\dfrac{\partial \varphi}{\partial u} + \dfrac{\sin\varphi}{\varrho}\dfrac{\partial \varrho}{\partial u}\right] \\ + \dfrac{\partial S_n}{\partial u}\left[\sin\varphi\dfrac{\partial \varphi}{\partial v} - \dfrac{\cos\varphi}{\varrho}\dfrac{\partial \varrho}{\partial v}\right] - \dfrac{\partial S_n}{\partial v}\left[\sin\varphi\dfrac{\partial \varphi}{\partial u} - \dfrac{\cos\varphi}{\varrho}\dfrac{\partial \varrho}{\partial u}\right] \\ \qquad = N C_{n-1} \\ - \dfrac{\partial C_n}{\partial u}\left[\sin\varphi\dfrac{\partial \varphi}{\partial v} - \dfrac{\cos\varphi}{\varrho}\dfrac{\partial \varrho}{\partial v}\right] + \dfrac{\partial C_n}{\partial v}\left[\sin\varphi\dfrac{\partial \varphi}{\partial u} - \dfrac{\cos\varphi}{\varrho}\dfrac{\partial \varrho}{\partial u}\right] \\ + \dfrac{\partial S_n}{\partial u}\left[\cos\varphi\dfrac{\partial \varphi}{\partial v} + \dfrac{\sin\varphi}{\varrho}\dfrac{\partial \varrho}{\partial v}\right] - \dfrac{\partial S_n}{\partial v}\left[\cos\varphi\dfrac{\partial \varphi}{\partial u} + \dfrac{\sin\varphi}{\varrho}\dfrac{\partial \varrho}{\partial u}\right] \\ \qquad = N S_{n-1} \end{cases}$$

Digitized by Google

Infolge eines Missverständnisses sind leider einige Druckfehler stehen geblieben, die wir gütigst zu berichtigen bitten:

S. 171 u. 7a) l. $J_n(\varrho_1)\cos n(\varphi-\varphi_1)$ statt $J_n(\varrho_1)\cos^n(\varphi-\varphi_1)$

S. 172 u. 12) l. $J_{n-1}(\varrho)$ „ $J_{n-1}(\varrho)$

S. 174 u. 7a) l. $iky = (u-v)\sin w$ statt $iky(u-v)\sin w$

S. 175 u. 8a) l. $\frac{\partial^2 f}{\partial \vartheta^2}$ „ $\frac{\partial^2 f}{\partial h^2}$

S. 176 Z. 1 v. o. l. $\frac{\partial C_n}{\partial \varrho}$ „ $\frac{\partial C_1}{\partial \varrho_n}$

S. 179 IIIa. l. $2uv$ „ $2nv$

S. 179 Z. 5. v. u. l. $[(J_{n-1}(u)$ „ $[J_{n-1}(u)$

S. 180 Z. 1 v. u l. $-\sum_0^\infty$ „ $-\sum_\nu^\infty$

S. 183 Z. 6 v. u. l. $J_n(v)+J_{n+1}(u)J_n'(v)$ statt $J_n(v)+J_{n+1}(u)J_n'(v)$

S. 183 Z. 4 v. u. l. $(J_{n-1}(v)$ statt $J_{n-1}(v)$

S. 184 Z. 10 v. o. l. $\sin(2n+1)w\cos w$ statt $\sin(2n+1)w\ .\ w$

S. 184 Z. 1 v. u. l. $S_{2\sigma}$ statt $S_2{}^\sigma$ u. $J_{n+\sigma}(v)]\sin 2nw$ statt $J_{n=\sigma}(v)]\sin 2nw$

S. 186 u. 1a) l. $x+iy = (\xi+i\eta)^2$ „ $x+iy = (\xi+i\eta)^3$

S. 186 u. 2) l. $y^2 = 4\eta^2 x+4\eta^4$ „ $y^2 = 4\eta^2 x+4b^4$

S. 187 Z. 2 v. o. l. $= ik(\xi+i\eta)^2\ .\ ik(\xi-i\eta)^2$ statt $= tk(\xi+i\eta)^2\ .\ ik(\xi-i\eta)^2$

S. 190 Z. 8 v. o. l. $-J_n''(x) = J_{n+1}(x)$ statt $= J_n'(x) = J_{n+1}(x)$

S. 192 u. 15b. l. $-20uv+6v^2)$ statt $-2uv+6v^2)$

S. 192 u. 20b) l. $S_3 = J_{3,3}(\varrho)\sqrt{uv}$ statt $S_3 = J_{3,3}(\varrho)uv$

S. 193 Z. 6 v. o. l. $\cos 2nw$ statt $\cos 2nv$

S. 193 Z. 7 v. u. l. $\cos 2nw$ „ $\cos 2aw$

S. 194 Z. 8 v. u. l. $J_{n+1}(v)$ „ $J_{u+1}(v)$

S. 194 Z. 6 v. u. l. $\frac{\varepsilon_{2n}}{2}$ statt $\frac{\varepsilon_{nn}}{2}$

S. 194 Z. 1 v. u. l. $J_{n+1}(v)]$ statt $J_{n+1}(v)$

S. 195 Z. 7 v. u. l. $J_{n-2}(u)$ „ $J_{n-}{}^2(u)$

S. 196 Z. 5 v. o. l. $2n(J_{n+3}(u)$ statt $2n)J_{n+3}(u)$

S. 196 Z. 3 v. u. l. $J_{n,1}(x)$ statt $J_{n,l}(x)$

S. 196 Z. 2 v. u. l. $J_{n-2,1}(x)$ statt $J_{n\ 2,1}(x)$

Digitized by Google

Aus

$$\cos\varphi = \frac{(u+v)\cos w}{\varrho} \quad \text{und} \quad \sin\varphi = \frac{(u-v)\sin w}{\varrho}$$

folgt aber leicht durch partielle Differentiation:

$$13a) \quad -\sin\varphi\,\frac{\partial\varphi}{\partial u} = \frac{\cos w}{\varrho} - \frac{(u+v)\cos w}{\varrho^2}\,\frac{\partial\varrho}{\partial u} = \frac{\cos w}{\varrho} - \frac{\cos\varphi}{\varrho}\,\frac{\partial\varrho}{\partial u}$$

$$13b) \quad -\sin\varphi\,\frac{\partial\varphi}{\partial v} = \frac{\cos w}{\varrho} - \frac{(u+v)\cos w}{\varrho^2}\,\frac{\partial\varrho}{\partial v} = \frac{\cos w}{\varrho} - \frac{\cos\varphi}{\varrho}\,\frac{\partial\varrho}{\partial v}$$

$$13c) \quad \cos\varphi\,\frac{\partial\varphi}{\partial u} = \frac{\sin w}{\varrho} - \frac{(u-v)\sin w}{\varrho^2}\,\frac{\partial\varrho}{\partial u} = \frac{\sin w}{\varrho} - \frac{\sin\varphi}{\varrho}\,\frac{\partial\varrho}{\partial u}$$

$$13d) \quad \cos\varphi\,\frac{\partial\varphi}{\partial v} = -\frac{\sin w}{\varrho} - \frac{(u-v)\sin w}{\varrho^2}\,\frac{\partial\varrho}{\partial v} = -\frac{\sin w}{\varrho} - \frac{\sin\varphi}{\varrho}\,\frac{\partial\varrho}{\partial v}$$

so dass:

$$14) \quad \begin{cases} \sin\varphi\,\dfrac{\partial\varphi}{\partial u} - \dfrac{\cos\varphi}{\varrho}\,\dfrac{\partial\varrho}{\partial u} = -\dfrac{\cos w}{\varrho} \\ \sin\varphi\,\dfrac{\partial\varphi}{\partial v} - \dfrac{\cos\varphi}{\varrho}\,\dfrac{\partial\varrho}{\partial v} = -\dfrac{\cos w}{\varrho} \\ \cos\varphi\,\dfrac{\partial\varphi}{\partial u} + \dfrac{\sin\varphi}{\varrho}\,\dfrac{\partial\varrho}{\partial u} = -\dfrac{\sin w}{\varrho} \\ \cos\varphi\,\dfrac{\partial\varphi}{\partial v} + \dfrac{\sin\varphi}{\varrho}\,\dfrac{\partial\varrho}{\partial v} = -\dfrac{\sin w}{\varrho} \end{cases}$$

Multiplicirt man weiter die Gleichungen 13c) und 13d) bzhw. mit $-\frac{\partial\varrho}{\partial v}$ und $+\frac{\partial\varrho}{\partial u}$ und addirt, so kommt mit Rücksicht auf 11)

$$N\cos\varphi = -\frac{\sin w}{\varrho}\left(\frac{\partial\varrho}{\partial u} + \frac{\partial\varrho}{\partial v}\right)$$

oder weil

$$\frac{\partial\varrho}{\partial u} + \frac{\partial\varrho}{\partial v} = 2\cos\varphi\cos w$$

$$15) \quad N = -\frac{2\sin w\cos w}{\varrho}$$

Digitized by Google

Unter Berücksichtigung von 14) und 15) kann man den Gleichungen 12a) und 12b) die Gestalt geben:

Ia.
$$\begin{cases} \frac{1}{2\cos w}\left(\frac{\partial C_n}{\partial u}+\frac{\partial C_n}{\partial v}\right)-\frac{1}{2\sin w}\left(\frac{\partial S_n}{\partial u}-\frac{\partial S_n}{\partial v}\right)=-C_{n+1} \\ \frac{1}{2\sin w}\left(\frac{\partial C_n}{\partial u}-\frac{\partial C_n}{\partial v}\right)+\frac{1}{2\cos w}\left(\frac{\partial S_n}{\partial u}+\frac{\partial S_n}{\partial v}\right)=-S_{n+1} \end{cases}$$

Ib.
$$\begin{cases} \frac{1}{2\cos w}\left(\frac{\partial C_n}{\partial u}+\frac{\partial C_n}{\partial v}\right)+\frac{1}{2\sin w}\left(\frac{\partial S_n}{\partial u}-\frac{\partial S_n}{\partial v}\right)=C_{n-1} \\ -\frac{1}{2\sin w}\left(\frac{\partial C_n}{\partial u}-\frac{\partial C_n}{\partial v}\right)+\frac{1}{2\cos w}\left(\frac{\partial S_n}{\partial u}+\frac{\partial S_n}{\partial v}\right)=S_{n-1} \end{cases}$$

Hieraus folgt:

II.
$$\frac{1}{\cos w}\left(\frac{\partial C_n}{\partial u}+\frac{\partial C_n}{\partial v}\right)=C_{n-1}-C_{n+1}$$
$$\frac{1}{\cos w}\left(\frac{\partial S_n}{\partial u}+\frac{\partial S_n}{\partial v}\right)=S_{n-1}-S_{n+1}$$

Diese Gleichungen gelten wiederum auch für $n=0$, falls

$$C_{-1}\equiv -C_1 \quad \text{und} \quad S_{-1}\equiv S_1$$

C. Transformation der C_n und S_n in elliptische Coordinaten.

Für Polarcoordinaten ist

$$J_0\sqrt{\varrho^2+\varrho_1{}^2-2\varrho\varrho_1\cos(\varphi-\varphi_1)}=\sum_0^\infty{}_n\,\varepsilon_n J_n(\varrho)J_n(\varrho_1)\cos n(\varphi-\varphi_1)$$

Demnach kommt, wenn man

$$\varphi-\varphi_1=\psi$$

setzt

$$J_0\sqrt{\varrho^2+\varrho_1{}^2-2\varrho\varrho_1\cos\psi}=\sum_0^\infty{}_n\,\varepsilon_n J_n(\varrho)J_n(\varrho_1)\cos n\psi$$

Vertauscht man hierin ϱ, ϱ_1 und ψ bzhw. mit u, $-v$ und $2w$, so erhält man

$$J_0\sqrt{u^2+v^2+2uv\cos 2w}=\sum_0^\infty{}_n\,\varepsilon_n J_n(u)J_n(-v)\cos 2nw$$

Digitized by Google

Bedenkt man weiter, dass $\sqrt{u^2+v^2+2uv\cos w}$ der Ausdruck für ϱ in elliptischen Coordinaten, und dass

$$J_n(-v) = (-1)^n J_n(v)$$

so folgt für elliptische Coordinaten, da überdies

$$\varepsilon_n = \varepsilon_{2n} \quad \text{ist,}$$

III a. $C_0 = J_0(\varrho) = J_0\left(\sqrt{u^2+v^2+2uv\cos 2w}\right)$

$$= \sum_0^\infty{}_n \varepsilon_{2n} (-1)^n J_n(u) J_n(v) \cos 2nw$$

Ferner ist

III b. $$S_0 = 0$$

Um C_1 und S_1 für elliptische Coordinaten zu gewinnen, bedienen wir uns der Relationen I a. Setzt man in denselben $n = 0$, so kommt

$$C_1 = -\frac{1}{2\cos w}\left(\frac{\partial C_0}{\partial u} + \frac{\partial C_0}{\partial v}\right)$$

$$S_1 = -\frac{1}{2\sin w}\left(\frac{\partial C_0}{\partial u} - \frac{\partial C_0}{\partial v}\right)$$

Mit Rücksicht auf III a. folgt aber

$$\frac{\partial C_0}{\partial u} = \sum_0^\infty{}_n \varepsilon_{2n} (-1)^n J_n'(u) J_n(v) \cos 2nw$$

$$\frac{\partial C_0}{\partial v} = \sum_0^\infty{}_n \varepsilon_{2n} (-1)^n J_n(u) J_n'(v) \cos 2nw$$

demnach ist

$$\frac{\partial C_0}{\partial u} + \frac{\partial C_0}{\partial v} = \sum_0^\infty{}_n \varepsilon_{2n} (-1)^n \left[J_n'(u) J_n(v) + J_n(u) J_n'(v)\right] \cos 2nw$$

oder, da

$$2J_n'(x) = J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial C_0}{\partial u} + \frac{\partial C_0}{\partial v} &= \sum_0^\infty \frac{\varepsilon_{2n}}{2} (-1)^n \left[J_{n-1}(u) - J_{n+1}(u)\right) J_n(v) \\ &\quad + J_n(u)\left(J_{n-1}(v) - J_{n+1}(v)\right)\Big] \cos 2nw \\ &= \sum_0^\infty \frac{\varepsilon_{2n}}{2} (-1)^n \left[J_{n-1}(u) J_n(v) + J_n(u) J_{n-1}(v)\right] \cos 2nw \\ &\quad - \sum_0^\infty{}_n \frac{\varepsilon_{2n}}{2} (-1)^n \left[J_{n+1}(u) J_n(v) + J_n(u) J_{n+1}(v)\right] \cos 2nw\end{aligned}$$

Da weiter

Digitized by Google

$$J_{-1}(x) = -J_1(x)$$

so ergiebt sich auch

$$\frac{\partial C_0}{\partial u} + \frac{\partial C_0}{\partial v} = -\tfrac{1}{2}(J_1(u)J_0(v)+J_0(u)J_1(v))$$

$$+\sum_1^\infty{}_n(-1)^n[J_{n-1}(u)J_n(v)+J_n(u)J_{n-1}(v)]\cos 2nw$$

$$-\sum_0^\infty{}_n\frac{\varepsilon_{2n}}{2}(-1)^n[J_{n+1}(u)J_n(v)+J_n(u)J_{n+1}(v)]\cos 2nw$$

$$= -\tfrac{1}{2}(J_1(u)J_0(v)+J_0(u)J_1(v))$$

$$-\sum_0^\infty{}_n(-1)^n[J_n(u)J_{n+1}(v)+J_{n+1}(u)J_n(v)]\cos 2(n+1)w$$

$$-\sum_0^\infty{}_n\frac{\varepsilon_{2n}}{2}(-1)^n[J_{n+1}(u)J_n(v)+J_n(u)J_{n+1}(v)]\cos 2nw$$

$$= -\sum_0^\infty{}_n(-1)^n[J_{n+1}(u)J_n(v)+J_n(u)J_{n+1}(v)]\cos 2(n+1)w$$

$$-\sum_0^\infty{}_n(-1)^n[J_{n+1}(u)J_n(v)+J_n(u)J_{n+1}(v)]\cos 2nw$$

$$= -\sum_0^\infty{}_n(-1)^n[J_{n+1}(u)J_n(v)+J_n(u)J_{n+1}(v)](\cos 2(n+1)w+\cos 2nw)$$

$$= -2\sum_0^\infty{}_n(-1)^n[J_{n+1}(u)J_n(v)+J_n(u)J_{n+1}(v)]\cos(2n+1)w\cos w$$

Demnach kommt

$$C_1 = \sum_0^\infty{}_n(-1)^n[J_{n+1}(u)J_n(v)+J_n(u)J_{n+1}(v)]\cos(2n+1)w$$

oder

IVa. $$C_1 = \sum_0^\infty{}_n\frac{\varepsilon_{2n+1}}{2}(-1)^n[J_{n+1}(u)J_n(v)+J_{n+1}(u)J_n(v)]\cos(2n+1)w$$

Ferner ist

$$\frac{\partial C_0}{\partial u} - \frac{\partial C_0}{\partial v} = \sum_0^\infty{}_n\,\varepsilon_{2n}(-1)^n[J_n'(u)J_n(v)-J_n(u)J_n')]\cos 2nw$$

Hieraus folgt leicht

$$\frac{\partial C_0}{\partial u} - \frac{\partial C_0}{\partial v} = -\tfrac{1}{2}[J_1(u)J_0(v)-J_0(u)J_1(v)]$$

$$-\sum_0^\infty{}_n(-1)^n[J_n(u)J_{n+1}(v)-J_{n+1}(u)J_n(v)]\cos 2(n+1)w$$

$$-\sum_0^\infty{}_n\frac{\varepsilon_{2n}}{2}(-1)^n[J_{n+1}(u)J_n(v)-J_n(u)J_{n+1}(v)]\cos 2nw$$

Digitized by Google

$$= -\sum_0^\infty{}_n (-1)^n [J_n(u)J_{n+1}(v) - J_{n+1}(u)J_n(v)] \cos 2(n+1)w$$

$$- \sum_0^\infty{}_n (-1)^n [J_{n+1}(u)\, J_n(v) - J_n(u)\, J_{n+1}(v)] \cos 2nw$$

$$= -\sum_0^\infty{}_n (-1)^n [J_{n+1}(u)\, J_n(v) - J_n(u)\, J_{n+1}(v)] (\cos 2nw - \cos 2(n+1)w)$$

$$= -2\sum_0^\infty{}_n (-1)^n [J_{n+1}(u)\, J_n(v) - J_n(v)\, J_{n+1}(v)] \sin(2n+1)w \,.\, \sin w$$

so dass

$$S_1 = \sum_0^\infty{}_n (-1)^n [J_{n+1}(u)\, J_n(v) - J_n(u)\, J_{n+1}(v)] \sin(2n+1)w$$

oder

IV b. $$S_1 = \sum_0^\infty{}_n \frac{\varepsilon_{2n+1}}{2} (-1)^n [J_{n+1}(u)\, J_n(v) - J_n(u)\, J_{n+1}(v)] \sin(2n+1)w$$

Unter Benutzung von I a. könnte man jetzt, indem man $n = 1$ setzt, C_2 und S_2 für elliptische Coordinaten entwickeln. Schneller zum Ziele führen jedoch die Relationen II. Nach diesen ist

$$C_2 = C_0 - \frac{1}{\cos w}\left(\frac{\partial C_1}{\partial u} + \frac{\partial C_1}{\partial v}\right)$$

$$S_2 = S_0 - \frac{1}{\cos w}\left(\frac{\partial S_1}{\partial u} + \frac{\partial S_1}{\partial v}\right)$$

Nun ist

$$C_1 = \sum_0^\infty{}_n (-1)^n [J_{n+1}(u)\, J_n(v) + J_n(u)\, J_{n+1}(v)] \cos(2n+1)w$$

also:

$$\frac{\partial C_1}{\partial u} = \sum_0^\infty{}_n (-1)^n [J_{n+1}'(u) J_n(v) + J_n'(u)\, J_{n+1}(v)] \cos(2n+1)w$$

$$\frac{\partial C_1}{\partial v} = \sum_0^\infty{}_n (-1)^n [J_{n+1}(u)\, J_n'(v) + J_n(u)\, J_{n+1}'(v)] \cos(2n+1)w$$

$$\frac{\partial C_1}{\partial u} + \frac{\partial C_1}{\partial v} = \sum_0^\infty{}_n (-1)^n [J_{n+1}'(u)\, J_n(v) + J_{n+1}(u)\, J_n'(v)$$
$$+ J_n'(u)\, J_{n+1}(v) + J_n(u)\, J_{n+1}'(v)] \cos(2n+1)w$$

$$= \tfrac{1}{2}\sum_0^\infty{}_n (-1)^n [(J_n(u) - J_{n+2}(u))\, J_n(v) + J_{n+1}(u)(J_{n-1}(v) - J_{n+1}(v))$$

$$+ (J_{n-1}(u) - J_{n+1}(u))\, J_{n+1}(v) + J_n(u)\,(J_n(v) - J_{n+2}(v))] \cos(2n+1)w$$

Digitized by Google

$$= \tfrac{1}{2}\sum_0^\infty{}_n (-1)^n [2J_n(u)\,J_n(v) + J_{n-1}(u)\,J_{n+1}(v) + J_{n+1}(u)\,J_{n-1}(v)]\cos(2n+1)w$$

$$- \tfrac{1}{2}\sum_0^\infty{}_n (-1)^n [2J_{n+1}(u)\,J_{n+1}(v) + J_n(u)\,J_{n+2}(v) + J_{n+2}(u)\,J_n(v)]\cos(2n+1)w$$

oder da

$$J_{-1}(x) = -J_1(x)$$

$$\frac{\partial C_1}{\partial u} + \frac{\partial C_1}{\partial v} = [J_0(u)J_0(v) - J_1(u)\,J_1(v)]\cos w$$

$$+ \tfrac{1}{2}\sum_1^\infty{}_n (-1)^n [2J_n(u)\,J_n(v) + J_{n-1}(u)\,J_{n+1}(v) + J_{n+1}(u)\,J_{n-1}(v)]\cos(2n+1)w$$

$$- \tfrac{1}{2}\sum_0^\infty{}_n (-1)^n [2J_{n+1}(u)\,J_{n+1}(v) + J_n(u)\,J_{n+2}(v) + J_{n+2}(u)\,J_n(v)]\cos(2n+1)w$$

$$= [J_0(u)J_0(v) - J_1(u)\,J_1(v)]\cos w$$

$$- \tfrac{1}{2}\sum_0^\infty{}_n (-1)^n [2J_{n+1}(u)\,J_{n+1}(v) + J_n(u)\,J_{n+2}(v) + J_{n+2}(u)\,J_n(v)]\cos(2n+3)w$$

$$- \tfrac{1}{2}\sum_0^\infty{}_n (-1)^n [2J_{n+1}(u)\,J_{n+1}(v) + J_n(u)\,J_{n+2}(v) + J_{n+2}(u)\,J_n(v)]\cos(2n+1)w$$

$$= J_0(u)J_0(v) - J_1(u)\,J_1(v)]\cos w$$

$$- \tfrac{1}{2}\sum_0^\infty{}_n (-1)^n [2J_{n+1}(u)\,J_{n+1}(v) + J_n(u)\,J_{n+2}(v) + J_{n+2}(u)\,J_n(v)](\cos(2n+1)w + \cos(2n+3)w)$$

$$= [J_0(u)J_0(v) - J_1(u)\,J_1(v)]\cos w$$

$$- \sum_0^\infty{}_n (-1)^n [2J_{n+1}(u)\,J_{n+1}(v) + J_n(u)\,J_{n+2}(v) + J_{n+2}(u)\,J_n(v)]\cos 2(n+1)w\cos w$$

Demnach kommt:

Digitized by Google

$$-\frac{1}{\cos w}\left(\frac{\partial C_1}{\partial u}+\frac{\partial C_1}{\partial v}\right) = J_1(u)\,J_1(v)-J_0(u)J_0(v)$$

$$+ \sum_0^\infty{}_n(-1)^n\,[2J_{n+1}(u)\,J_{n+1}(v)+J_n(u)\,J_{n+2}(v)$$

$$+ J_{n+2}(u)\,J_n(v)]\cos 2(n+1)w$$

$$= I_1(u)J_1(v)-J_0(u)\,J_0(v)$$

$$- \sum_1^\infty{}_n(-1)^n\,[2J_n(u)\,J_n(v)+J_{n-1}(u)\,J_{n+1}(v)$$

$$+ J_{n+1}(u)\,J_{n-1}(v)]\cos 2nw$$

$$= -\sum_0^\infty{}_n\,\varepsilon_{2n}(-1)^n\,J_n(u)\,J_n(v)\cos nw$$

$$- \sum_0^\infty{}_n\,\frac{\varepsilon_{2n}}{2}(-1)^n\,[J_{n-1}(u)J_{n-1}(v)+J_{n+1}(u)J_{n-1}(v)]\cos 2nw$$

$$= -C_0$$

$$- \sum_0^\infty{}_n\,\frac{\varepsilon_{2n}}{2}(-1)^n\,[J_{n-1}(u)J_{n+1}(v)+J_{n+1}(u)\,J_{n-1}(v)]\cos 2nw$$

so dass

$$C_2 = -\sum_0^\infty{}_n\,\frac{\varepsilon_{2n}}{2}(-1)^n[J_{n-1}(u)\,J_{n+1}(v)+J_{n+1}(u)J_{n-1}(v)]\cos 2nw$$

oder

Va. $$C_2 = +\sum_0^\infty{}_n\,\frac{\varepsilon_{2n}}{2}(-1)^{n-1}\,[J_{n+1}(u)J_{n-1}(v)+J_{n-1}(u)J_{n+1}(v)]\cos 2nw$$

Ferner ist:

$$S_1 = \sum_0^\infty{}_n[J_{n+1}(u)\,J_n(v)-J_n(u)\,J_{n+1}(v)]\sin(2n+1)w$$

$$\frac{\partial S_1}{\partial u}+\frac{\partial S_1}{\partial v} = \sum_0^\infty{}_n(-1)^n[J_{n+1}'(u)\,J_n(v)+J_{n+1}(u)\,J_u'(v)$$

$$- J_n'(u)\,J_{n+1}(v)-J_n(u)\,J_{n+1}'(v)]\sin(2n+1)w$$

$$= \tfrac{1}{2}\sum_0^\infty{}_n(-1)^n[(J_n(u)-J_{n+2}(u))J_n(v)+J_{n+1}(u)\,J_{n-1}(v)$$

$$-J_{n+1}(v))$$

$$-(J_{n-1}(u)-J_{n+1}(u))\,J_{n+1}(v)-J_n(u)\,(J_n(v)-J_{n+2}(v))]$$

$$\sin(2n+1)w$$

Digitized by Google

$$= -\tfrac{1}{2}\sum_0^\infty{}_n (-1)^n [J_{n-1}(u) J_{n+1}(v) - J_{n+1}(u) J_{n-1}(v)] \sin(2n+1)w$$
$$+\tfrac{1}{2}\sum_0^\infty{}_n (-1)^n [J_n(u) J_{n+2}(v) - J_{n+2}(u) J_n(v)] \sin(2n+1)w$$

oder weil das erste Glied der ersten Summe gleich null ist:

$$\frac{\partial S_1}{\partial u} + \frac{\partial S_1}{\partial v} = \tfrac{1}{2}\sum_0^\infty{}_n (-1)^n [J_n(u) J_{n+2}(v) - J_{n+2}(u) J_n(v)] \sin(2n+3)w$$
$$+ \tfrac{1}{2}\sum_0^\infty{}_n (-1)^n [J_n(u) J_{n+2}(v) - J_{n+2}(u) J_n(v)] \sin(2n+1)w$$
$$= \tfrac{1}{2}\sum_0^\infty{}_n (-1)^n [J_n(u) J_{n+2}(v) - J_{n+2}(u) J_n(v)] \times (\sin(2n+3)w + \sin(2n+1)w)$$
$$= \sum_0^\infty{}_n (-1)^n [J_n(u) J_{n+2}(v) - J_{n+2}(u) J_n(v)] \times \sin 2(n+1)w \,.\, w$$

$$-\frac{1}{\cos w}\left(\frac{\partial S_1}{\partial u} + \frac{\partial S_1}{\partial v}\right) = \sum_0^\infty{}_n (-1)^n [J_{n+2}(u) J_n(v) - J_n(u) J_{n+2}(v)] \sin 2(n+1)w$$
$$= \sum_1^\infty{}_n (-1)^{n-1} [J_{n+1}(u) J_{n-1}(v) - J_{n-1}(u) J_{n+1}(v)] \sin 2nw$$
$$= \sum_0^\infty{}_n (-1)^{n-1} [J_{n+1}(u) J_{n-1}(v) - J_{n-1}(u) J_{n+1}(v)] \sin 2nw$$

Da ferner

$$S_0 = 0$$

so kommt:

$$S_2 = \sum_0^\infty{}_n (-1)^{n-1} [J_{n+1}(u) J_{n-1}(v) - J_{n-1}(u) J_{n+1}(v)] \sin 2nw$$

oder

$$\text{Vb.} \quad S_2 = \sum_0^\infty{}_n \frac{\varepsilon_{2n}}{2} (-1)^{n-1} [J_{n+1}(u) J_{n-1}(v) - J_{n-1}(u) J_{n+1}(v)] \sin 2nw$$

Durch Fortsetzung dieser Betrachtungen erhält man allgemein:

$$\text{VI.} \quad \begin{cases} C_{2\sigma} = \sum_0^\infty{}_n \frac{\varepsilon_{2n}}{2} (-1)^{n-\sigma} [J_{n+\sigma}(u) J_{n-\sigma}(v) + J_{n-\sigma}(u) J_{n+\sigma}(v)] \cos 2nw \\ S_2{}^\sigma = \sum_0^\infty{}_n \frac{\varepsilon_{2n}}{2} (-1)^{n-\sigma} [J_{n+\sigma}(u) J_{n-\sigma}(v) - J_{n-\sigma}(u) J_{n-\sigma}(v)] \sin 2nw \end{cases}$$

Digitized by Google

VI.
$$\begin{cases} C_{2\sigma+1} = \sum_0^\infty{}_n \frac{\varepsilon_{2n+1}}{2}(-1)^{n-\sigma}\left[J_{n+\sigma+1}'(u)J_{n-\sigma}'(v)\right. \\ \qquad\qquad \left. + J_{n-\sigma}(u)\,J_{n+\sigma+1}(v)\right]\cos(2n+1)w \\ S_{2\sigma+1} = \sum_0^\infty{}_n \frac{\varepsilon_{2n+1}}{2}(-1)^{n-\sigma}\left[J_{n+\sigma+1}(u)\,J_{n-\sigma}(v)\right. \\ \qquad\qquad \left. - J_{n-\sigma}(u)\,J_{n+\sigma+1}(v)\right]\sin(2n+1)w \end{cases}$$

Von der Richtigkeit dieser Relationen kann man sich überdies auch ohne Schwierigkeit durch den Schluss von n auf $n+1$ überzeugen. Ist

$$J_{-n}(x) \equiv (-1)^n J_n(x)$$

so kann man den Gleichungen VI. auch die Gestalt geben:

VII.
$$\begin{cases} C_{2\sigma} = \sum_0^\infty{}_n \frac{\varepsilon_{2n}}{2}\left[J_{\sigma+n}(u)\,J_{\sigma-n}(v) + J_{\sigma-n}(u)\,J_{\sigma+n}(v)\right]\sin 2nw \\ S_{2\sigma} = \sum_0^\infty{}_n \frac{\varepsilon_{2n}}{2}\left[J_{\sigma+n}(u)\,J_{\sigma-n}'(v) - J_{\sigma-n}(u)\,J_{\sigma+n}'(v)\right]\sin 2nw \\ C_{2\sigma+1} = \sum_0^\infty{}_n \frac{\varepsilon_{2n+1}}{2}\left[J_{\sigma+n+1}'(u)\,J_{\sigma-n}(v) + J_{\sigma-n}(u)J_{\sigma+n+1}(v)\right] \\ \qquad\qquad \cdot\cos(2n+1)w \\ S_{2\sigma+1} = \sum_0^\infty{}_n \frac{\varepsilon_{2n+1}}{2}\left[J_{\sigma+n+1}(u)\,J_{\sigma-n}(v) - J_{\sigma-n}(u)\,J_{\sigma+n+1}(v)\right] \\ \qquad\qquad \cdot\sin(2n+1)w \end{cases}$$

Die Entwickelungen VII. lassen sich zusammenfassen in:

VIII.
$$\begin{cases} C_\sigma = \Sigma_n \frac{\varepsilon_n}{2}\left[\frac{J_{\sigma+n}}{2}(u)\frac{J_{\sigma-n}}{2}(v) + \frac{J_{\sigma-n}}{2}(u)\frac{J_{\sigma+n}}{2}(v)\right]\cos nw \\ S_\sigma = \Sigma_n \frac{\varepsilon_n}{2}\left[\frac{J_{\sigma+n}}{2}(u)\frac{J_{\sigma-n}}{2}(v) - \frac{J_{\sigma-n}}{2}(u)\frac{J_{\sigma+n}}{2}(v)\right]\sin nw \end{cases}$$

falls n die mit σ gleichartigen Werte zu durchlaufen hat.

D. *Resultat.*

Haben die C_σ und S_σ die in VIII. *angegebene Bedeutung und entstehen die C_σ' und S_σ' aus diesen durch einfache Vertauschung von u, v, w mit u_1, v_1, w_1, so ist für elliptische Coordinaten*

Digitized by Google

$$J_0(P) = \sum_0^\infty \varepsilon\sigma\,(C_\sigma C_\sigma' + S_\sigma S_\sigma')$$

und die C_σ *und* S_σ *sind particulare Lösungen der Differentialgleichung.*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \vartheta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial w^2} + (u^2 + v^2 - 2uv\cos 2w) f = 0$$

Cap. II.

Integration der Differentialgleichung $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = k^2 f$ für parabolische Coordinaten.

A. *Einführung paraboliscber Coordinaten.* *)

Setzt man

1a) $$x + iy = (\xi + i\eta)^2$$

oder

1b) $$\begin{cases} x = \xi^2 - \eta^2 \\ y = 2\xi\eta \end{cases}$$

so folgt leicht

2) $$\begin{cases} y^2 = -4\xi^2 x + 4\xi^4 \\ y^2 = 4\eta^2 x + 4\eta^4 \end{cases}$$

Die Curven $\xi =$ Const. und $\eta =$ Const. repräsentiren je ein System confocaler und orthogonaler Parabeln, deren gemeinsamer Brennpunnt der Anfangspunkt der Coordinaten ist.

Setzt man ferner

3) $$ik\xi^2 = u \quad \text{und} \quad ik\eta^2 = v$$

so kommt

4a) $$ikx = u - v \qquad iky = 2\sqrt{uv}$$

Weiter ergiebt sich

---

*) Vergl. die Functionen des parabolischen Cylinders von Dr. Karl Baer, Küstrin 1883.

Digitized by Google

$$\varrho^2 = (ikx)^2 + (iky)^2 = ik(x+iy) \,.\, ik(x-iy)$$
$$= ik(\xi+i\eta)^2 \,.\, ik(\xi-i\eta)^2$$
$$= (ik)^2(\xi^2+\eta^2)^2$$

also

$$\varrho = ik(\xi^2+\eta^2)$$

oder

4b) $$\varrho = u + v$$

4c)
$$\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{x}{r} = \dfrac{ikx}{\varrho} = \dfrac{u-v}{\varrho} \\ \sin\varphi = \dfrac{y}{r} = \dfrac{iky}{\varrho} = \dfrac{2\sqrt{uv}}{\varrho} \end{cases}$$

Die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = k^2 f$$

verwandelt sich durch Einführung der parabolischen Coordinaten ξ η in

5a) $$\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} = 4(\xi^2+\eta^2)k^2 f$$

oder

5b) $$\frac{\partial^2 f}{\partial(\sqrt{u})^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial(\sqrt{v})^2} + 4(u+v)f = 0$$

B. *Recurrirende Relationen für die C_n und S_n in parabolischen Coordinaten.*

Denkt man sich in den Ausdrücken

$$C_n = J_n(\varrho)\cos n\varphi \quad \text{und} \quad S_n = J_n(\varrho)\sin n\varphi$$

Die ϱ und φ auf Grund der Relationen 4b) und 4c) durch parabolische Coordinaten ersetzt, so ist

6)
$$\begin{cases} \dfrac{\partial C_n}{\partial u} = \dfrac{\partial C_n}{\partial \varrho}\dfrac{\partial \varrho}{\partial u} + \dfrac{\partial C_n}{\partial \varphi}\dfrac{\partial \varphi}{\partial u} \\ \dfrac{\partial C_n}{\partial v} = \dfrac{\partial C_n}{\partial \varrho}\dfrac{\partial \varrho}{\partial v} + \dfrac{\partial C_n}{\partial \varphi}\dfrac{\partial \varphi}{\partial v} \end{cases}$$

Digitized by Google

6)
$$\begin{cases} \dfrac{\partial S_n}{\partial u} = \dfrac{\partial S_n}{\partial \varrho}\dfrac{\partial \varrho}{\partial u} + \dfrac{\partial S_n}{\partial \varphi}\dfrac{\partial \varphi}{\partial u} \\ \dfrac{\partial S_n}{\partial v} = \dfrac{\partial S_n}{\partial \varrho}\dfrac{\partial \varrho}{\partial v} + \dfrac{\partial S_n}{\partial \varphi}\dfrac{\partial \varphi}{\partial v} \end{cases}$$

Da diese Relationen mit den Gleichungen 9) im Cap. I. völlig übereinstimmen, so ergeben sich aus ihnen auch die Gleichungen 10), 11), 12 a) und 12 b) des genannten Capitels.

Aus
$$\cos\varphi = \frac{u-v}{\varrho} \quad \text{und} \quad \sin\varphi = \frac{2\sqrt{uv}}{\varrho}, \quad \varrho = u+v$$
folgt aber durch partielle Differentiation:

7 a)
$$\begin{cases} -\sin\varphi\dfrac{\partial\varphi}{\partial u} = \dfrac{2v}{\varrho^2} \\ -\sin\varphi\dfrac{\partial\varphi}{\partial v} = -\dfrac{2u}{\varrho^2} \end{cases}$$

7 b)
$$\begin{cases} \cos\varphi\dfrac{\partial\varphi}{\partial u} = \sqrt{\dfrac{v}{u}}\dfrac{v-u}{\varrho^2} \\ \cos\varphi\dfrac{\partial\varphi}{\partial v} = \sqrt{\dfrac{u}{v}}\dfrac{u-v}{\varrho^2} \end{cases}$$

so dass

8 a)
$$\begin{cases} \sin\varphi\dfrac{\partial\varphi}{\partial u} - \dfrac{\cos\varphi}{\varrho}\dfrac{\partial\varrho}{\partial u} = -\dfrac{1}{\varrho} \\ \sin\varphi\dfrac{\partial\varphi}{\partial v} - \dfrac{\cos\varphi}{\varrho}\dfrac{\partial\varrho}{\partial v} = \dfrac{1}{\varrho} \end{cases}$$

8 b)
$$\begin{cases} \cos\varphi\dfrac{\partial\varphi}{\partial u} + \dfrac{\sin\varphi}{\varrho}\dfrac{\partial\varrho}{\partial u} = \dfrac{\sqrt{uv}}{u\cdot\varrho} \\ \cos\varphi\dfrac{\partial\varphi}{\partial v} + \dfrac{\sin\varphi}{\varrho}\dfrac{\partial\varrho}{\partial v} = \dfrac{\sqrt{uv}}{v\cdot\varrho} \end{cases}$$

Ferner ist
$$N = \frac{\partial\varrho}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v} - \frac{\partial\varrho}{\partial v}\frac{\partial\varphi}{\partial u} = \frac{\partial\varphi}{\partial v} - \frac{\partial\varphi}{\partial u}$$

Aus 7 b) aber folgt leicht
$$\cos\varphi\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v} - \frac{\partial\varphi}{\partial u}\right) = \frac{u-v}{\varrho\sqrt{uv}} = \frac{\cos\varphi}{\sqrt{uv}}$$

so dass

Digitized by Google

9) $$N = \frac{1}{\sqrt{uv}}$$

Die Gleichungen 12a) und 12b) des vorigen Capitels gehen demnach für parabolische Coordinaten über in:

$$\frac{\partial C_n}{\partial u}\frac{\sqrt{uv}}{v\varrho} - \frac{\partial C_n}{\partial v}\frac{\sqrt{uv}}{u\varrho} - \frac{\partial S_n}{\partial u}\frac{1}{\varrho} - \frac{\partial S_n}{\partial v}\frac{1}{\varrho} = -\frac{C_{n+1}}{\sqrt{uv}}$$

$$\frac{\partial C_n}{\partial u}\frac{1}{\varrho} + \frac{\partial C_n}{\partial v}\frac{1}{\varrho} + \frac{\partial S_n}{\partial u}\frac{\sqrt{uv}}{v\,.\,\varrho} - \frac{\partial S_n}{\partial v}\frac{\sqrt{uv}}{u\,.\,\varrho} = -\frac{S_{n+1}}{\sqrt{uv}}$$

$$\frac{\partial C_n}{\partial u}\frac{\sqrt{uv}}{v\,.\,\varrho} - \frac{\partial C_n}{\partial v}\frac{\sqrt{uv}}{u\,.\,\varrho} + \frac{\partial S_n}{\partial u}\frac{1}{\varrho} + \frac{\partial S_n}{\partial v}\frac{1}{\varrho} = \frac{C_{n-1}}{\sqrt{uv}}$$

$$-\frac{\partial C_n}{\partial u}\frac{1}{\varrho} - \frac{\partial C_n}{\partial v}\frac{1}{\varrho} + \frac{\partial S_n}{\partial u}\frac{\sqrt{uv}}{v\,.\,\varrho} - \frac{\partial S_n}{\partial v}\frac{\sqrt{uv}}{u\,.\,\varrho} = \frac{S_{n-1}}{\sqrt{uv}}$$

oder in

I a.
$$\begin{cases} u\frac{\partial C_n}{\partial u} - v\frac{\partial C_n}{\partial v} - \sqrt{uv}\left(\frac{\partial S_n}{\partial u} + \frac{\partial S_n}{\partial v}\right) = -\varrho C_{n+1} \\ \sqrt{uv}\left(\frac{\partial C_n}{\partial u} + \frac{\partial C_n}{\partial v}\right) + u\frac{\partial S_n}{\partial u} - v\frac{\partial S_n}{\partial v} = -\varrho S_{n+1} \end{cases}$$

und

I b.
$$\begin{cases} u\frac{\partial C_n}{\partial u} - v\frac{\partial C_n}{\partial v} + \sqrt{uv}\left(\frac{\partial S_n}{\partial u} + \frac{\partial S_n}{\partial v}\right) = \varrho C_{n-1} \\ -\sqrt{uv}\left(\frac{\partial C_n}{\partial u} + \frac{\partial C_n}{\partial v}\right) + u\frac{\partial S_n}{\partial u} - v\frac{\partial S_n}{\partial v} = \varrho S_{n-1} \end{cases}$$

so dass

II.
$$\begin{cases} 2\left(u\frac{\partial C_n}{\partial u} - v\frac{\partial C_n}{\partial v}\right) = \varrho(C_{n-1} - C_{n+1}) \\ 2\left(u\frac{\partial S_n}{\partial u} - v\frac{\partial S_n}{\partial v}\right) = \varrho(S_{n-1} - S_{n+1}) \end{cases}$$

C. *Transformation der C_n und S_n in parabolische Coordinaten.*

Im Folgenden sei

10) $$J_{n,n}(x) \equiv \frac{J_n(x)}{x^n}$$

Dann ist

Digitized by Google

$$\frac{\partial J_{n,n}(x)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{J_n(x)}{x^n}\right) = \frac{x^n J_n'(x) - n J_n(x) \cdot x^{n-1}}{x^{2n}}$$

$$= -\frac{1}{x^n}\left[n\frac{J_n(x)}{x} - J_n'(x)\right]$$

Nun aber ist

$$\frac{2n J_n(x)}{x} = J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x)$$

$$2J_n'(x) = J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)$$

Hieraus folgt durch Subtraction

$$\frac{2n J_n(x)}{x} - 2J_n'(x) = 2J_{n+1}(x)$$

oder

$$\frac{n J_n(x)}{x} = J_n'(x) = J_{n+1}(x)$$

Daher kommt

$$\frac{\partial J_{n,n}(x)}{\partial x} = -\frac{1}{x^n} J_{n+1}(x)$$

oder

11 a) $$-\frac{1}{x}\frac{\partial J_{n,n}(x)}{\partial x} = \frac{J_{n+1}(x)}{x^{n+1}} = J_{n+1,n+1}(x)$$

Weiter folgt aus

$$\frac{2n J_n(x)}{x} = J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x)$$

$$\frac{2n J_n(x)}{x^n} - \frac{J_{n-1}(x)}{x^{n-1}} = x^2 \frac{J_{n+1}(x)}{x^{n+1}}$$

oder

11 b) $$2n J_{n,n}(x) - J_{n-1,n-1}(x) = x^2 J_{n+1,n+1}(x)$$

Mit Rücksicht auf 10) ergiebt sich

12 a) $$C_0 = J_0(\varrho) = J_{0,0}(\varrho), \quad \varrho = u + v$$

12 b) $$S_0 = 0$$

Ferner ist nach Ia) für $n = 0$

$$-\varrho C_1 = u\frac{\partial C_0}{\partial u} - v\frac{\partial C_0}{\partial v}$$

$$-\varrho S_1 = \sqrt{uv}\left(\frac{\partial C_0}{\partial u} + \frac{\partial C_0}{\partial v}\right)$$

Nun ist

$$\frac{\partial C_0}{\partial u} = \frac{\partial J_{0,0}(\varrho)}{\partial \varrho}\frac{\partial \varrho}{\partial u} = \frac{\partial J_{0,0}(\varrho)}{\partial \varrho}$$

Digitized by Google

$$\frac{\partial C_0}{\partial v} = \frac{\partial J_{0,0}(\varrho)}{\partial \varrho}\,\frac{\partial \varrho}{\partial v} = \frac{\partial J_{0,0}(\varrho)}{\partial \varrho}$$

also

$$C_1 = -\frac{1}{\varrho}\,\frac{\partial J_{0,0}(\varrho)}{\partial \varrho}\,(u-v)$$

$$S_1 = -\frac{1}{\varrho}\,\frac{\partial J_{0,0}(\varrho)}{\partial \varrho}\,2\sqrt{uv}$$

oder nach 11 a)

13 a) $$C_1 = J_{1,1}(\varrho)\,(u-v)$$

13 b) $$S_1 = J_{1,1}(\varrho)\,.\,2\sqrt{uv}$$

Weiter folgt aus II) für $n = 1$

$$\varrho\,(C_0 - C_2) = 2\left(u\,\frac{\partial C_1}{\partial u} - v\,\frac{\partial C_1}{\partial v}\right)$$

$$\varrho\,(S_0 - S_2) = 2\left(u\,\frac{\partial S_1}{\partial u} - v\,\frac{\partial S_1}{\partial v}\right)$$

Nun ist

$$\frac{\partial C_1}{\partial u} = J_{1,1}(\varrho) + (u-v)\,\frac{\partial J_{1,1}(\varrho)}{\partial \varrho}$$

$$\frac{\partial C_1}{\partial v} = -J_{1,1}(\varrho) + (u-v)\,\frac{\partial J_{1,1}(\varrho)}{\partial \varrho}$$

$$\frac{\partial S_1}{\partial u} = \frac{v}{\sqrt{uv}}\,J_{1,1}(\varrho) + 2\sqrt{uv}\,\frac{\partial J_{1,1}(\varrho)}{\partial \varrho}$$

$$\frac{\partial S_1}{\partial v} = \frac{u}{\sqrt{uv}}\,J_{1,1}(\varrho) + 2\sqrt{uv}\,\frac{\partial J_{1,1}(\varrho)}{\partial \varrho}$$

demnach kommt

$$\varrho\,.\,(C_0 - C_2) = 2(u+v)\,J_{1,1}(\varrho) + 2(u-v)^2\,\frac{\partial J_{1,1}(\varrho)}{\partial \varrho}$$

$$\varrho\,.\,(S_0 - S_2) = 4\sqrt{uv}\,(u-v)\,\frac{\partial J_{1,1}(\varrho)}{\partial \varrho}$$

oder

$$C_2 = -(2J_{1,1}(\varrho) - J_{0,0}(\varrho)) - \frac{1}{\varrho}\,\frac{\partial J_{1,1}(\varrho)}{\partial \varrho}\,2(u-v)^2$$

$$S_2 = -\frac{1}{\varrho}\,\frac{\partial J_{1,1}(\varrho)}{\partial \varrho}\,4\sqrt{uv}\,(u-v)$$

oder mit Rücksicht auf 11 a) und 11 b)

$$C_2 = -\varrho^2 J_{2,2}(\varrho) + J_{2,2}(\varrho)\,2(u-v)^2$$

Digitized by Google

$$S_2 = J_{2,2}(\varrho)\, 4\sqrt{uv}\,(u-v)$$

oder

44a) $$C_2 = J_{2,2}(\varrho)\,(u^2 - 6uv + v^2)$$

14b) $$S_2 = J_{2,2}(\varrho)\sqrt{uv}\,(4u - 4v)$$

In ähnlicher Weise ergiebt sich

15a) $$C_3 = J_{3,3}(\varrho)\,(u^3 - 15u^2v + 15uv^2 - v^3)$$

15b) $$S_3 = J_{3,3}(\varrho)\sqrt{uv}\,(6u^2 - 2uv + 6v^2)$$

u. s. w. Ist nun

16) $$\binom{n}{h} = \frac{n(n-1)\,.\,.\,.\,(n-h+1)}{1\,.\,2\,.\,h}$$

so kann man den Ausdrücken 12) bis 15) auch die Gestalt geben:

17a) $C_0 = J_{0,0}(\varrho)$

17b) $S_0 = 0$

18a) $$C_1 = J_{1,1}(\varrho)\left[\binom{2}{0}u - \binom{2}{2}v\right]$$

18b) $$S_1 = J_{1,1}(\varrho)\sqrt{uv}\,.\,\binom{2}{1}$$

19a) $$C_2 = J_{2,2}(\varrho)\left[\binom{4}{0}u^2 - \binom{4}{2}uv + \binom{4}{4}v^2\right]$$

19b) $$S_2 = J_{2,2}(\varrho)\sqrt{uv}\left[\binom{4}{1}u - \binom{4}{3}v\right]$$

20a) $$C_3 = J_{3,3}(\varrho)\left[\binom{6}{0}u^3 - \binom{6}{2}u^2v + \binom{6}{4}uv^2 - \binom{6}{6}v^3\right]$$

20b) $$S_3 = J_{3,3}(\varrho)\,uv\left[\binom{6}{1}u^2 - \binom{6}{3}uv + \binom{6}{5}v^2\right]$$

u. s. w.

Auf Grund der Relation

$$\frac{2nJ_n(x)}{x} = J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x)$$

lässt sich leicht zeigen, dass

Digitized by Google

$$21)\quad \begin{cases} J_{1,1}(\varrho) = \dfrac{J_0(\varrho)+J_2(\varrho)}{2} \\ J_{2,2}(\varrho) = \dfrac{J_0(\varrho)+J_2(\varrho)}{2\,.\,4} + \dfrac{J_2(\varrho)+J_4(\varrho)}{4\,.\,6} \\ J_{3,3}(\varrho) = \dfrac{J_0(\varrho)+J_2(\varrho)}{2\,.\,4\,.\,6} + \dfrac{J_2(\varrho)+J_4(\varrho)}{4\,.\,6\,.\,8} + \dfrac{J_4(\varrho)+J_6(\varrho)}{6\,.\,8\,.\,10} \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Nach III a. des vorigen Capitels ist

$$J_0(\sqrt{u^2+v^2+2uv\cos 2w}) = \sum_0^\infty{}_n\, \varepsilon_{2n}(-1)^n J_n(u) J_n(v) \cos 2nv$$

Setzt man hierin $w = 0$, so kommt

$$J_0(u+v) = \sum_0^\infty{}_n\, \varepsilon_{2n}(-1)^n J_n(u) J_n(v)$$

Da aber für parabolische Coordinaten

$$u+v = \varrho$$

so kommt für diese

$$22a)\qquad J_0(\varrho) = \sum_0^\infty{}_n\, \varepsilon_{2n}(-1)^n J_n(u) J_n(v)$$

Ferner ist nach V a. des vorigen Capitels

$$C_2 = J_2(\varrho)\cos 2\varphi = \sum_0^\infty \frac{\varepsilon_{2n}}{2}(-1)^{n-1}\left[J_{n+1}(u)J_{n-1}(v) + J_{n-1}(u)J_{n+1}(v)\right]\cos 2aw$$

falls wir uns ϱ und $\cos 2\varphi$ in elliptischen Coordinaten ausgedrückt denken. Nun ist aber nach Cap. I., 7)

$$\varrho = \sqrt{u^2+v^2+2uv\cos 2w}$$

$$\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi = \frac{(u^2+v^2)\cos 2w + 2uv}{\varrho^2} = \frac{(u^2+v^2)\cos 2w + 2uv}{u^2+v^2+2uv\cos 2w}$$

Setzt man daher $w = 0$, so folgt

Digitized by Google

$$= -\tfrac{1}{2}\sum_0^\infty{}_n (-1)^n [J_{n-1}(u) J_{n+1}(v) - J_{n+1}(u) J_{n-1}(v)] \sin(2n+1)w$$

$$+\tfrac{1}{2}\sum_0^\infty{}_n (-1)^n [J_n(u) J_{n+2}(v) - J_{n+2}(u) J_n(v)] \sin(2n+1)w$$

oder weil das erste Glied der ersten Summe gleich null ist:

$$\frac{\partial S_1}{\partial u} + \frac{\partial S_1}{\partial v} = \tfrac{1}{2}\sum_0^\infty{}_n (-1)^n [J_n(u) J_{n+2}(v) - J_{n+2}(u) J_n(v)] \sin(2n+3)w$$

$$+ \tfrac{1}{2}\sum_0^\infty{}_n (-1)^n [J_n(u) J_{n+2}(v) - J_{n+2}(u) J_n(v)] \sin(2n+1)w$$

$$= \tfrac{1}{2}\sum_0^\infty{}_n (-1)^n [J_n(u) J_{n+2}(v) - J_{n+2}(u) J_n(v)] \times (\sin(2n+3)w + \sin(2n+1)w)$$

$$= \sum_0^\infty{}_n (-1)^n [J_n(u) J_{n+2}(v) - J_{n+2}(u) J_n(v)] \times \sin 2(n+1)w \,.\, w$$

$$-\frac{1}{\cos w}\left(\frac{\partial S_1}{\partial u} + \frac{\partial S_1}{\partial v}\right) = \sum_0^\infty{}_n (-1)^n [J_{n+2}(u) J_n(v) - J_n(u) J_{n+2}(v)] \sin 2(n+1)w$$

$$= \sum_1^\infty{}_n (-1)^{n-1} [J_{n+1}(u) J_{n-1}(v) - J_{n-1}(u) J_{n+1}(v)] \sin 2nw$$

$$= \sum_0^\infty{}_n (-1)^{n-1} [J_{n+1}(u) J_{n-1}(v) - J_{n-1}(u) J_{n+1}(v)] \sin 2nw$$

Da ferner

$$S_0 = 0$$

so kommt:

$$S_2 = \sum_0^\infty{}_n (-1)^{n-1} [J_{n+1}(u) J_{n-1}(v) - J_{n-1}(u) J_{n+1}(v)] \sin 2nw$$

oder

$$\text{V b.} \quad S_2 = \sum_0^\infty{}_n \frac{\varepsilon_{2n}}{2} (-1)^{n-1} [J_{n+1}(u) J_{n-1}(v) - J_{n-1}(u) J_{n+1}(v)] \sin 2nw$$

Durch Fortsetzung dieser Betrachtungen erhält man allgemein:

$$\text{VI.} \quad \begin{cases} C_{2\sigma} = \sum_0^\infty{}_n \frac{\varepsilon_{2n}}{2} (-1)^{n-\sigma} [J_{n+\sigma}(u) J_{n-\sigma}(v) + J_{n-\sigma}(u) J_{n+\sigma}(v)] \cos 2nw \\ S_2{}^\sigma = \sum_0^\infty{}_n \frac{\varepsilon_{2n}}{2} (-1)^{n-\sigma} [J_{n+\sigma}(u) J_{n-\sigma}(v) - J_{n-\sigma}(u) J_{n-\sigma}(v)] \sin 2nw \end{cases}$$

Digitized by Google

VI.
$$\begin{cases} C_{2\sigma+1} = \sum_0^\infty{}_n \frac{\varepsilon_{2n+1}}{2}(-1)^{n-\sigma}\left[J_{n+\sigma+1}'(u)J_{n-\sigma}'(v) \right. \\ \qquad\qquad \left. + J_{n-\sigma}(u)\,J_{n+\sigma+1}(v)\right]\cos(2n+1)w \\ S_{2\sigma+1} = \sum_0^\infty{}_n \frac{\varepsilon_{2n+1}}{2}(-1)^{n-\sigma}\left[J_{n+\sigma+1}(u)\,J_{n-\sigma}(v) \right. \\ \qquad\qquad \left. - J_{n-\sigma}(u)\,J_{n+\sigma+1}(v)\right]\sin(2n+1)w \end{cases}$$

Von der Richtigkeit dieser Relationen kann man sich überdies auch ohne Schwierigkeit durch den Schluss von n auf $n+1$ überzeugen. Ist

$$J_{-n}(x) \equiv (-1)^n J_n(x)$$

so kann man den Gleichungen VI. auch die Gestalt geben:

VII.
$$\begin{cases} C_{2\sigma} = \sum_0^\infty{}_n \frac{\varepsilon_{2n}}{2}\left[J_{\sigma+n}(u)\,J_{\sigma-n}(v) + J_{\sigma-n}(u)\,J_{\sigma+n}(v)\right]\sin 2nw \\ S_{2\sigma} = \sum_0^\infty{}_n \frac{\varepsilon_{2n}}{2}\left[J_{\sigma+n}(u)\,J_{\sigma-n}'(v) - J_{\sigma-n}(u)\,J_{\sigma+n}'(v)\right]\sin 2nw \\ C_{2\sigma+1} = \sum_0^\infty{}_n \frac{\varepsilon_{2n+1}}{2}\left[J_{\sigma+n+1}'(u)\,J_{\sigma-n}(v) + J_{\sigma-n}(u)J_{\sigma+n+1}(v)\right] \\ \qquad\qquad \cdot\cos(2n+1)w \\ S_{2\sigma+1} = \sum_0^\infty{}_n \frac{\varepsilon_{2n+1}}{2}\left[J_{\sigma+n+1}(u)\,J_{\sigma-n}(v) - J_{\sigma-n}(u)\,J_{\sigma+n+1}(v)\right] \\ \qquad\qquad \cdot\sin(2n+1)w \end{cases}$$

Die Entwickelungen VII. lassen sich zusammenfassen in:

VIII.
$$\begin{cases} C_\sigma = \Sigma_n \frac{\varepsilon_n}{2}\left[\frac{J_{\sigma+n}}{2}(u)\frac{J_{\sigma-n}}{2}(v) + \frac{J_{\sigma-n}}{2}(u)\frac{J_{\sigma+n}}{2}(v)\right]\cos nw \\ S_\sigma = \Sigma_n \frac{\varepsilon_n}{2}\left[\frac{J_{\sigma+n}}{2}(u)\frac{J_{\sigma-n}}{2}(v) - \frac{J_{\sigma-n}}{2}(u)\frac{J_{\sigma+n}}{2}(v)\right]\sin nw \end{cases}$$

falls n die mit σ gleichartigen Werte zu durchlaufen hat.

D. *Resultat.*

Haben die C_σ und S_σ die in VIII. *angegebene Bedeutung und entstehen die C_σ' und S_σ' aus diesen durch einfache Vertauschung von u, v, w mit u_1, v_1, w_1, so ist für elliptische Coordinaten*

Digitized by Google

$$J_0(P) = \sum_0^\infty \varepsilon_\sigma (C_\sigma C_\sigma' + S_\sigma S_\sigma')$$

und die C_σ *und* S_σ *sind particulare Lösungen der Differentialgleichung.*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \vartheta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial w^2} + (u^2 + v^2 - 2uv\cos 2w) f = 0$$

Cap. II.

Integration der Differentialgleichung $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = k^2 f$ für parabolische Coordinaten.

A. *Einführung parabolischer Coordinaten.* *)

Setzt man

1a) $$x + iy = (\xi + i\eta)^2$$

oder

1b) $$\begin{cases} x = \xi^2 - \eta^2 \\ y = 2\xi\eta \end{cases}$$

so folgt leicht

2) $$\begin{cases} y^2 = -4\xi^2 x + 4\xi^4 \\ y^2 = 4\eta^2 x + 4\eta^4 \end{cases}$$

Die Curven $\xi = \text{Const.}$ und $\eta = \text{Const.}$ repräsentiren je ein System confocaler und orthogonaler Parabeln, deren gemeinsamer Brennpunnt der Anfangspunkt der Coordinaten ist.

Setzt man ferner

3) $$ik\xi^2 = u \quad \text{und} \quad ik\eta^2 = v$$

so kommt

4a) $$ikx = u - v \qquad iky = 2\sqrt{uv}$$

Weiter ergiebt sich

---

*) Vergl. die Functionen des parabolischen Cylinders von Dr. Karl Baer, Küstrin 1883.

Digitized by Google

$$\begin{aligned}\varrho^2 = (ikx)^2 + (iky)^2 &= ik(x+iy)\,.\,ik(x-iy)\\ &= ik(\xi+i\eta)^2\,.\,ik(\xi-i\eta)^2\\ &= (ik)^2(\xi^2+\eta^2)^2\end{aligned}$$

also

$$\varrho = ik(\xi^2+\eta^2)$$

oder

4b) $$\varrho = u + v$$

4c)
$$\begin{cases}\cos\varphi = \dfrac{x}{r} = \dfrac{ikx}{\varrho} = \dfrac{u-v}{\varrho}\\[2ex] \sin\varphi = \dfrac{y}{r} = \dfrac{iky}{\varrho} = \dfrac{2\sqrt{uv}}{\varrho}\end{cases}$$

Die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = k^2 f$$

verwandelt sich durch Einführung der parabolischen Coordinaten ξ η in

5a) $$\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} = 4(\xi^2+\eta^2)k^2 f$$

oder

5b) $$\frac{\partial^2 f}{\partial(\sqrt{u})^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial(\sqrt{v})^2} + 4(u+v)f = 0$$

B. *Recurrirende Relationen für die C_n und S_n in parabolischen Coordinaten.*

Denkt man sich in den Ausdrücken

$$C_n = J_n(\varrho)\cos n\varphi \quad \text{und} \quad S_n = J_n(\varrho)\sin n\varphi$$

Die ϱ und φ auf Grund der Relationen 4b) und 4c) durch parabolische Coordinaten ersetzt, so ist

6)
$$\begin{cases}\dfrac{\partial C_n}{\partial u} = \dfrac{\partial C_n}{\partial \varrho}\dfrac{\partial \varrho}{\partial u} + \dfrac{\partial C_n}{\partial \varphi}\dfrac{\partial \varphi}{\partial u}\\[2ex] \dfrac{\partial C_n}{\partial v} = \dfrac{\partial C_n}{\partial \varrho}\dfrac{\partial \varrho}{\partial v} + \dfrac{\partial C_n}{\partial \varphi}\dfrac{\partial \varphi}{\partial v}\end{cases}$$

Digitized by Google

6)
$$\begin{cases} \dfrac{\partial S_n}{\partial u} = \dfrac{\partial S_n}{\partial \varrho}\dfrac{\partial \varrho}{\partial u} + \dfrac{\partial S_n}{\partial \varphi}\dfrac{\partial \varphi}{\partial u} \\ \dfrac{\partial S_n}{\partial v} = \dfrac{\partial S_n}{\partial \varrho}\dfrac{\partial \varrho}{\partial v} + \dfrac{\partial S_n}{\partial \varphi}\dfrac{\partial \varphi}{\partial v} \end{cases}$$

Da diese Relationen mit den Gleichungen 9) im Cap. I. völlig übereinstimmen, so ergeben sich aus ihnen auch die Gleichungen 10), 11), 12a) und 12b) des genannten Capitels.

Aus
$$\cos\varphi = \frac{u-v}{\varrho} \quad \text{und} \quad \sin\varphi = \frac{2\sqrt{uv}}{\varrho}, \quad \varrho = u+v$$
folgt aber durch partielle Differentiation:

7a)
$$\begin{cases} -\sin\varphi\dfrac{\partial\varphi}{\partial u} = -\dfrac{2v}{\varrho^2} \\ -\sin\varphi\dfrac{\partial\varphi}{\partial v} = -\dfrac{2u}{\varrho^2} \end{cases}$$

7b)
$$\begin{cases} \cos\varphi\dfrac{\partial\varphi}{\partial u} = \sqrt{\dfrac{v}{u}}\dfrac{v-u}{\varrho^2} \\ \cos\varphi\dfrac{\partial\varphi}{\partial v} = \sqrt{\dfrac{u}{v}}\dfrac{u-v}{\varrho^2} \end{cases}$$

so dass

8a)
$$\begin{cases} \sin\varphi\dfrac{\partial\varphi}{\partial u} - \dfrac{\cos\varphi}{\varrho}\dfrac{\partial\varrho}{\partial u} = -\dfrac{1}{\varrho} \\ \sin\varphi\dfrac{\partial\varphi}{\partial v} - \dfrac{\cos\varphi}{\varrho}\dfrac{\partial\varrho}{\partial v} = \dfrac{1}{\varrho} \end{cases}$$

8b)
$$\begin{cases} \cos\varphi\dfrac{\partial\varphi}{\partial u} + \dfrac{\sin\varphi}{\varrho}\dfrac{\partial\varrho}{\partial u} = \dfrac{\sqrt{uv}}{u\cdot\varrho} \\ \cos\varphi\dfrac{\partial\varphi}{\partial v} + \dfrac{\sin\varphi}{\varrho}\dfrac{\partial\varrho}{\partial v} = \dfrac{\sqrt{uv}}{v\cdot\varrho} \end{cases}$$

Ferner ist
$$N = \frac{\partial\varrho}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v} - \frac{\partial\varrho}{\partial v}\frac{\partial\varphi}{\partial u} = \frac{\partial\varphi}{\partial v} - \frac{\partial\varphi}{\partial u}$$

Aus 7b) aber folgt leicht
$$\cos\varphi\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v} - \frac{\partial\varphi}{\partial u}\right) = \frac{u-v}{\varrho\sqrt{uv}} = \frac{\cos\varphi}{\sqrt{uv}}$$

so dass

Digitized by Google

9) $$N = \frac{1}{\sqrt{uv}}$$

Die Gleichungen 12a) und 12b) des vorigen Capitels gehen demnach für parabolische Coordinaten über in:

$$\frac{\partial C_n}{\partial u}\frac{\sqrt{uv}}{v\varrho} - \frac{\partial C_n}{\partial v}\frac{\sqrt{uv}}{u\varrho} - \frac{\partial S_n}{\partial u}\frac{1}{\varrho} - \frac{\partial S_n}{\partial v}\frac{1}{\varrho} = -\frac{C_{n+1}}{\sqrt{uv}}$$

$$\frac{\partial C_n}{\partial u}\frac{1}{\varrho} + \frac{\partial C_n}{\partial v}\frac{1}{\varrho} + \frac{\partial S_n}{\partial u}\frac{\sqrt{uv}}{v\,.\,\varrho} - \frac{\partial S_n}{\partial v}\frac{\sqrt{uv}}{u\,.\,\varrho} = -\frac{S_{n+1}}{\sqrt{uv}}$$

$$\frac{\partial C_n}{\partial u}\frac{\sqrt{uv}}{v\,.\,\varrho} - \frac{\partial C_n}{\partial v}\frac{\sqrt{uv}}{u\,.\,\varrho} + \frac{\partial S_n}{\partial u}\frac{1}{\varrho} + \frac{\partial S_n}{\partial v}\frac{1}{\varrho} = \frac{C_{n-1}}{\sqrt{uv}}$$

$$-\frac{\partial C_n}{\partial u}\frac{1}{\varrho} - \frac{\partial C_n}{\partial v}\frac{1}{\varrho} + \frac{\partial S_n}{\partial u}\frac{\sqrt{uv}}{v\,.\,\varrho} - \frac{\partial S_n}{\partial v}\frac{\sqrt{uv}}{u\,.\,\varrho} = \frac{S_{n-1}}{\sqrt{uv}}$$

oder in

Ia.
$$\begin{cases} u\frac{\partial C_n}{\partial u} - v\frac{\partial C_n}{\partial v} - \sqrt{uv}\left(\frac{\partial S_n}{\partial u} + \frac{\partial S_n}{\partial v}\right) = -\varrho C_{n+1} \\ \sqrt{uv}\left(\frac{\partial C_n}{\partial u} + \frac{\partial C_n}{\partial v}\right) + u\frac{\partial S_n}{\partial u} - v\frac{\partial S_n}{\partial v} = -\varrho S_{n+1} \end{cases}$$

und

Ib.
$$\begin{cases} u\frac{\partial C_n}{\partial u} - v\frac{\partial C_n}{\partial v} + \sqrt{uv}\left(\frac{\partial S_n}{\partial u} + \frac{\partial S_n}{\partial v}\right) = \varrho C_{n-1} \\ -\sqrt{uv}\left(\frac{\partial C_n}{\partial u} + \frac{\partial C_n}{\partial v}\right) + u\frac{\partial S_n}{\partial u} - v\frac{\partial S_n}{\partial v} = \varrho S_{n-1} \end{cases}$$

so dass

II.
$$\begin{cases} 2\left(u\frac{\partial C_n}{\partial u} - v\frac{\partial C_n}{\partial v}\right) = \varrho(C_{n-1} - C_{n+1}) \\ 2\left(u\frac{\partial S_n}{\partial u} - v\frac{\partial S_n}{\partial v}\right) = \varrho(S_{n-1} - S_{n+1}) \end{cases}$$

C. *Transformation der C_n und S_n in parabolische Coordinaten.*

Im Folgenden sei

10) $$J_{n,n}(x) \equiv \frac{J_n(x)}{x^n}$$

Dann ist

Digitized by Google

$$\frac{\partial J_{n,n}(x)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{J_n(x)}{x^n}\right) = \frac{x^n J_n'(x) - n J_n(x) \cdot x^{n-1}}{x^{2n}}$$

$$= -\frac{1}{x^n}\left[n\frac{J_n(x)}{x} - J_n'(x)\right]$$

Nun aber ist

$$\frac{2n J_n(x)}{x} = J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x)$$

$$2J_n'(x) = J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)$$

Hieraus folgt durch Subtraction

$$\frac{2n J_n(x)}{x} - 2J_n'(x) = 2J_{n+1}(x)$$

oder

$$\frac{n J_n(x)}{x} = J_n'(x) = J_{n+1}(x)$$

Daher kommt

$$\frac{\partial J_{n,n}(x)}{\partial x} = -\frac{1}{x^n} J_{n+1}(x)$$

oder

11 a) $$-\frac{1}{x}\frac{\partial J_{n,n}(x)}{\partial x} - \frac{J_{n+1}(x)}{x^{n+1}} = J_{n+1,n+1}(x)$$

Weiter folgt aus

$$\frac{2n J_n(x)}{x} = J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x)$$

$$\frac{2n J_n(x)}{x^n} - \frac{J_{n-1}(x)}{x^{n-1}} = x^2 \frac{J_{n+1}(x)}{x^{n+1}}$$

oder

11 b) $$2n J_{n,n}(x) - J_{n-1,n-1}(x) = x^2 J_{n+1,n+1}(x)$$

Mit Rücksicht auf 10) ergiebt sich

12 a) $$C_0 = J_0(\varrho) = J_{0,0}(\varrho), \quad \varrho = u + v$$

12 b) $$S_0 = 0$$

Ferner ist nach Ia) für $n = 0$

$$-\varrho C_1 = u\frac{\partial C_0}{\partial u} - v\frac{\partial C_0}{\partial v}$$

$$-\varrho S_1 = \sqrt{uv}\left(\frac{\partial C_0}{\partial u} + \frac{\partial C_0}{\partial v}\right)$$

Nun ist

$$\frac{\partial C_0}{\partial u} = \frac{\partial J_{0,0}(\varrho)}{\partial \varrho}\frac{\partial \varrho}{\partial u} = \frac{\partial J_{0,0}(\varrho)}{\partial \varrho}$$

Digitized by Google

$$\frac{\partial C_0}{\partial v} = \frac{\partial J_{0,0}(\varrho)}{\partial \varrho}\,\frac{\partial \varrho}{\partial v} = \frac{\partial J_{0,0}(\varrho)}{\partial \varrho}$$

also

$$C_1 = -\frac{1}{\varrho}\,\frac{\partial J_{0,0}(\varrho)}{\partial \varrho}\,(u-v)$$

$$S_1 = -\frac{1}{\varrho}\,\frac{\partial J_{0,0}(\varrho)}{\partial \varrho}\,2\sqrt{uv}$$

oder nach 11 a)

13 a) $$C_1 = J_{1,1}(\varrho)\,(u-v)$$

13 b) $$S_1 = J_{1,1}(\varrho)\,.\,2\sqrt{uv}$$

Weiter folgt aus II) für $n = 1$

$$\varrho\,(C_0 - C_2) = 2\left(u\,\frac{\partial C_1}{\partial u} - v\,\frac{\partial C_1}{\partial v}\right)$$

$$\varrho\,(S_0 - S_2) = 2\left(u\,\frac{\partial S_1}{\partial u} - v\,\frac{\partial S_1}{\partial v}\right)$$

Nun ist

$$\frac{\partial C_1}{\partial u} = J_{1,1}(\varrho) + (u-v)\,\frac{\partial J_{1,1}(\varrho)}{\partial \varrho}$$

$$\frac{\partial C_1}{\partial v} = -J_{1,1}(\varrho) + (u-v)\,\frac{\partial J_{1,1}(\varrho)}{\partial \varrho}$$

$$\frac{\partial S_1}{\partial u} = \frac{v}{\sqrt{uv}}\,J_{1,1}(\varrho) + 2\sqrt{uv}\,\frac{\partial J_{1,1}(\varrho)}{\partial \varrho}$$

$$\frac{\partial S_1}{\partial v} = \frac{u}{\sqrt{uv}}\,J_{1,1}(\varrho) + 2\sqrt{uv}\,\frac{\partial J_{1,1}(\varrho)}{\partial \varrho}$$

demnach kommt

$$\varrho\,.\,(C_0 - C_2) = 2(u+v)\,J_{1,1}(\varrho) + 2(u-v)^2\,\frac{\partial J_{1,1}(\varrho)}{\partial \varrho}$$

$$\varrho\,.\,(S_0 - S_2) = 4\sqrt{uv}\,(u-v)\,\frac{\partial J_{1,1}(\varrho)}{\partial \varrho}$$

oder

$$C_2 = -(2J_{1,1}(\varrho) - J_{0,0}(\varrho)) - \frac{1}{\varrho}\,\frac{\partial J_{1,1}(\varrho)}{\partial \varrho}\,2(u-v)^2$$

$$S_2 = -\frac{1}{\varrho}\,\frac{\partial J_{1,1}(\varrho)}{\partial \varrho}\,4\sqrt{uv}\,(u-v)$$

oder mit Rücksicht auf 11 a) und 11 b)

$$C_2 = -\varrho^2 J_{2,2}(\varrho) + J_{2,2}(\varrho)\,2(u-v)^2$$

Digitized by Google

$$S_2 = J_{2,2}(\varrho)\, 4\sqrt{uv}\,(u-v)$$

oder

44a) $$C_2 = J_{2,2}(\varrho)\,(u^2 - 6uv + v^2)$$

14b) $$S_2 = J_{2,2}(\varrho)\sqrt{uv}\,(4u - 4v)$$

In ähnlicher Weise ergiebt sich

15a) $$C_3 = J_{3,3}(\varrho)\,(u^3 - 15u^2v + 15uv^2 - v^3)$$

15b) $$S_3 = J_{3,3}(\varrho)\sqrt{uv}\,(6u^2 - 2uv + 6v^2)$$

u. s. w. Ist nun

16) $$\binom{n}{h} = \frac{n(n-1)\,.\,.\,.\,(n-h+1)}{1\,.\,2\,.\,h}$$

so kann man den Ausdrücken 12) bis 15) auch die Gestalt geben:

17a) $$C_0 = J_{0,0}(\varrho)$$

17b) $$S_0 = 0$$

18a) $$C_1 = J_{1,1}(\varrho)\left[\binom{2}{0}u - \binom{2}{2}v\right]$$

18b) $$S_1 = J_{1,1}(\varrho)\sqrt{uv}\,.\,\binom{2}{1}$$

19a) $$C_2 = J_{2,2}(\varrho)\left[\binom{4}{0}u^2 - \binom{4}{2}uv + \binom{4}{4}v^2\right]$$

19b) $$S_2 = J_{2,2}(\varrho)\sqrt{uv}\left[\binom{4}{1}u - \binom{4}{3}v\right]$$

20a) $$C_3 = J_{3,3}(\varrho)\left[\binom{6}{0}u^3 - \binom{6}{2}u^2v + \binom{6}{4}uv^2 - \binom{6}{6}v^3\right]$$

20b) $$S_3 = J_{3,3}(\varrho)\,uv\left[\binom{6}{1}u^2 - \binom{6}{3}uv + \binom{6}{5}v^2\right]$$

u. s. w.

Auf Grund der Relation

$$\frac{2nJ_n(x)}{x} = J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x)$$

lässt sich leicht zeigen, dass

Digitized by Google

21)
$$\begin{cases} J_{1,1}(\varrho) = \dfrac{J_0(\varrho)+J_2(\varrho)}{2} \\ J_{2,2}(\varrho) = \dfrac{J_0(\varrho)+J_2(\varrho)}{2\,.\,4} + \dfrac{J_2(\varrho)+J_4(\varrho)}{4\,.\,6} \\ J_{3,3}(\varrho) = \dfrac{J_0(\varrho)+J_2(\varrho)}{2\,.\,4\,.\,6} + \dfrac{J_2(\varrho)+J_4(\varrho)}{4\,.\,6\,.\,8} + \dfrac{J_4(\varrho)+J_6(\varrho)}{6\,.\,8\,.\,10} \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Nach III a. des vorigen Capitels ist

$$J_0(\sqrt{u^2+v^2+2uv\cos 2w}) = \sum_0^\infty{}_n\, \varepsilon_{2n}(-1)^n J_n(u) J_n(v) \cos 2nv$$

Setzt man hierin $w = 0$, so kommt

$$J_0(u+v) = \sum_0^\infty{}_n\, \varepsilon_{2n}(-1)^n J_n(u) J_n(v)$$

Da aber für parabolische Coordinaten

$$u + v = \varrho$$

so kommt für diese

22a) $$J_0(\varrho) = \sum_0^\infty{}_n\, \varepsilon_{2n}(-1)^n J_n(u) J_n(v)$$

Ferner ist nach V a. des vorigen Capitels

$$C_2 = J_2(\varrho)\cos 2\varphi = \sum_0^\infty \frac{\varepsilon_{2n}}{2}(-1)^{n-1}\left[J_{n+1}(u)J_{n-1}(v) + J_{n-1}(u)J_{n+1}(v)\right]\cos 2nw$$

falls wir uns ϱ und $\cos 2\varphi$ in elliptischen Coordinaten ausgedrückt denken. Nun ist aber nach Cap. I., 7)

$$\varrho = \sqrt{u^2+v^2+2uv\cos 2w}$$

$$\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi = \frac{(u^2+v^2)\cos 2w + 2uv}{\varrho^2}$$

$$= \frac{(u^2+v^2)\cos 2w + 2uv}{u^2+v^2+2uv\cos 2w}$$

Setzt man daher $w = 0$, so folgt

Digitized by Google

$$\varrho = u + v \quad \text{und} \quad \varphi = 0$$

demnach geht obige Gleichung für $w = 0$ über in

$$J_2(u+v) = \sum_0^\infty{}_n \frac{\varepsilon_{2n}}{2} (-1)^{n-1} [J_{n+1}(u) J_{n-1}(v) + J_{n-1}(u) J_{n+1}(v)]$$

so dass für parabolische Coordinaten kommt:

22 b) $$J_2(\varrho) = \sum_0^\infty{}_n \frac{\varepsilon_{2n}}{2} (-1)^{n-1} [J_{n+1}(u) J_{n-1}(v) + J_{n-1}(u) J_{n+1}(v)]$$

In ähnlicher Weise ergiebt sich:

22 c) $$J_4(\varrho) = \sum_0^\infty{}_n \frac{\varepsilon_{2n}}{2} (-1)^{n-2} [J_{n+2}(u) J_{n-2}(v) + J_{n-2}(u) J_{n+2}(v)]$$

u. s. w.

Weiter ist

23 a) $$J_{0,0}(\varrho) = J_0(\varrho) = \sum_0^\infty{}_n \varepsilon_n (-1)^n J_n(u) J_n(v) \quad (\text{da } \varepsilon_{2n} = \varepsilon_n \text{ ist})$$

Aus 22 a) und 22 b) folgt durch Addition:

$$\begin{aligned} J_0(\varrho) + J_2(\varrho) = & \sum_0^\infty{}_n \frac{\varepsilon_{2n}}{2} (-1)_n J_n(u) J_n(v) + \sum_0^\infty{}_n \frac{\varepsilon_{2n}}{2} (-1)^n J_n(u) J_n(v) \\ & - \sum_0^\infty{}_n \frac{\varepsilon_{2n}}{2} (-1)^n [J_{n+1}(u) J_{n-1}(v) + J_{n-1}(u) J_{n+1}(v)] \\ = & \tfrac{1}{2} J_0(u) J_0(v) - \sum_0^\infty{}_n (-1)^n J_{n+1}(u) J_{n+1}(v) \\ & - \sum_1^\infty{}_n \frac{\varepsilon_{2(n-1)}}{2} (-1)^n J_{n-1}(u) J_{n-1}(v) \\ & - \sum_0^\infty{}_n \frac{\varepsilon_{nn}}{2} (-1)^n [J_{n+1}(u) J_{n-1}(v) + J_{n-1}(u) J_{n+1}(v)] \\ = & - \sum_0^\infty{}_n (-1)^n J_{n+1}(u) J_{n+1}(v) - \sum_1^\infty{}_n (-1)^n J_{n-1}(u) J_{n-1}(v) \\ & - \sum_0^\infty{}_n \frac{\varepsilon_{2n}}{2} (-1)^n [J_{n+1}(u) J_{n-1}(v) + J_{n-1}(u) J_{n+1}(v)] \end{aligned}$$

oder, da sich die Glieder für $n = 0$ wegheben:

$$\begin{aligned} J_0(\varrho) + J_2(\varrho) = & - \sum_1^\infty{}_n (-1)^n [J_{n+1}(u) J_{n+1}(v) + J_{n-1}(u) J_{n-1}(v) \\ & + J_{n+1}(u) J_{n-1}(v) + J_{n-1}(u) J_{n+1}(v) \end{aligned}$$

Digitized by Google

$$= -\sum_1^\infty{}_n (-1)^n [J_{n+1}(u) + J_{n-1}(u)] \cdot [J_{n+1}(v) + J_{n-1}(v)]$$

$$= -\sum_1^\infty{}_n (-1)^n 2n \frac{J_n(u)}{u} \cdot 2n \frac{J_n(v)}{v}$$

$$= \sum_0^\infty{}_n (-1)^{n+1} 4n^2 J_{n,1}(u) J_{n,1}(v)$$

Mit Rücksicht auf 21) kommt daher:

23 b) $$J_{1,1}(\varrho) = \sum_0^\infty{}_n (-1)^{n+1} \varepsilon_n \frac{n^2}{1} J_{n,1}(u) J_{n,1}(v)$$

Weiter ist

$$J_2(\varrho) + J_4(\varrho) = -\sum_0^\infty{}_n \frac{\varepsilon_{2n}}{2} (-1)^n [J_{n+1}(u) J_{n-1}(v) + J_{n-1}(u) J_{n+1}(v)]$$

$$+ \sum_0^\infty{}_n \frac{\varepsilon_{2n}}{2} (-1)^n [J_{n+2}(u) J_{n-2}(v) + J_{n-2}(u) J_{n+2}(v)]$$

$$= \tfrac{1}{2} J_1(u) J_1(v) + \sum_0^\infty (-1)^n J_{n+2}(u) J_n(v)$$

$$+ \sum_1^\infty \frac{\varepsilon_{2(n-1)}}{2} (-1)^n J_{n-2}(u) J_n(v)]$$

$$+ \sum_0^\infty{}_n \frac{\varepsilon_{2n}}{2} (-1)^n [J_{n+2}(u) J_{n-2}(v) + J_{n-2}(u) J_{n+2}(v)]$$

$$= \sum_0^\infty{}_n (-1)^n J_{n+2}(u) J_n(v) + \sum_1^\infty (-1)^n J_{n-2}(u) J_n(v)$$

$$+ \sum_0^\infty{}_n \frac{\varepsilon_{2n}}{2} (-1)^n [J_{n+2}(u) J_{n-2}(v) + J_{n-2}(u) J_{n+2}(v)]$$

$$= J_2(u) J_0(v) + J_2(u) J_2(v)$$

$$+ \sum_1^\infty{}_n (-1)^n [J_{n+2}(u) J_n(v) + J_{n-2}(u) J_n(v)$$

$$+ J_{n+2}(u) J_{n-2}(v) + J_{n-2}(u) J_{n+2}(v)]$$

$$= J_2(u) [J_0(v) + J_2(v)]$$

$$+ \sum_1^\infty{}_n (-1)^n [J_{n+2}(u) (J_n(v) + J_{n-2}(v))$$

$$+ J_{n-2}(u) (J_n(v) + J_{n+2}(v))]$$

$$= 2 J_2(u) \frac{J_1(v)}{v}$$

$$+ \sum_1^\infty{}_n (-1)^n \left[J_{n+2}(u) \frac{2(n-1) J_{n-1}(v)}{v} \right.$$

$$\left. + J_{n-2}(u) \frac{2(n+1) J_{n+1}(v)}{v} \right]$$

Digitized by Google

$$= \sum_{2}^{\infty}{}_n (-1)^n \left[J_{n+2}(u)\, 2(n-1) J_{n-1,1}(v) \right.$$

$$\left. + \sum_{0}^{\infty}{}_n (-1)^n J_{n-2}(u)\, 2(n+1) J_{n+1,1}(v) \right.$$

$$J_2(\varrho) + J_4(\varrho) = - \sum_{1}^{\infty}{}_n (-1)^n J_{n+3}(u)\, 2n\, J_{n,1}(v)$$

$$- \sum_{1}^{\infty} (-1)^n J_{n-3}(u)\, 2n\, J_{n,1}(v)$$

$$= - \sum_{0}^{\infty}{}_n (-1)^n \cdot 2n) J_{n+3}(u) + J_{n-3}(u)) J_{n,1}(v)$$

Nun ist

$$2(n+2) \frac{J_{n+2}(x)}{x} = J_{n+1}(x) + J_{n+3}(x)$$

$$2(n-2) \frac{J_{n-2}(x)}{x} = J_{n-3}(x) + J_{n-1}(x)$$

also

$$2(n+2) \frac{J_{n+2}(x)}{x} + 2(n-2) \frac{J_{n-2}(x)}{x} = J_{n+3}(x) + J_{n-3}(x)$$
$$+ J_{n+1}(x) + J_{n-1}(x)$$

oder da

$$2n \frac{J_n(x)}{x} = J_{n+1}(x) + J_{n-1}(x)$$

$$J_{n+3}(x) + J_{n-3}(x) = 2(n+2) J_{n+2,1}(x) + 2(n-2) J_{n-2,1}(x)$$
$$- 2n J_{n,1}(x)$$

Demnach kommt:

$$J_2(\varrho) + J_4(\varrho) = - \sum_{0}^{\infty}{}_n (-1)^n 2n \left[2(n+2) J_{n+2,1}(u) + 2(n-2) J_{n-2,1}(u) \right.$$
$$\left. - 2n J_{n,1}(u) \right] J_{n,2}(v)$$

$$= \sum_{0}^{\infty}{}_n (-1)^n 4n^2 J_{n,1}(u) J_{n,1}(v)$$

$$- \sum_{0}^{\infty} (-1)^n 2n \left[2(n+2) J_{n+2,1}(u) \right.$$
$$\left. + 2(n-2) J_{n-2,1}(u) \right] J_{n,1}(v)$$

Nun ist

$$2(n+1) J_{n+1,1}(x) = J_n(x) + J_{n+2}(x)$$
$$2(n-1) J_{n-1,1}(x) = J_{n-2}(x) + J_n(x)$$

also

$$2(n+1) J_{n+1,2}(x) = J_{n,1}(x) + J_{n+2,1}(x)$$
$$2(n-1) J_{n-1,2}(x) = J_{n\ 2,1}(x) + J_{n,1}(x)$$

oder

Digitized by Google

$$J_{n+2,1}(x) = 2(n+1)\,J_{n+1,2}(x) - J_{n,1})(x)$$
$$J_{n-2,1}(x) = 2(n-1)\,J_{n-1,2}(x) - J_{n,1}(x)$$

Daher ergiebt sich:

$$J_2(\varrho)+J_4(\varrho) = \sum_0^\infty{}_n (-1)^n 4n^2 J_{n,1}(u)\,J_{n,1}(v)$$
$$- \sum_0^\infty (-1)^n 2n\Big[2(n+2)\Big(2(n+1)\,J_{n+1,2}(u) - J_{n,1}(u)\Big)$$
$$+ 2(n-2)\Big(2(n-1)\,J_{n-1,2}(u) - J_{n,1}(u)\Big)\Big]J_{n,1}(v)$$
$$= \sum_0^\infty{}_n (-1)^n 12n^2 J_{n,1}(u)\,J_{n,1}(v)$$
$$- \sum_0^\infty (-1)^n 2n \cdot 2(n+1) \cdot 2(n+2)\,J_{n+1,2}(u)\,J_{n,1}(v)$$
$$- \sum_0^\infty (-1)^n 2n \cdot 2(n-1) \cdot 2(n-2)\,J_{n-1,2}(u)\,J_{n,1}(v)$$
$$= \sum_0^\infty{}_n (-1)^n 12n^2 J_{n,1}(u)\,J_{n,1}(v)$$
$$+ \sum_0^\infty (-1)^n 2(n-1) \cdot 2n \cdot 2(n+1)\,J_{n,2}(u)\,J_{n-1,1}(v)$$
$$+ \sum_0^\infty (-1)^n 2(n+1)\,2n\,2(n-1)\,J_{n,2}(u)\,J_{n+1,1}(v)$$
$$= \sum_0^\infty{}_n (-1)^n 12n^2 J_{n,1}(u)\,J_{n,1}(v)$$
$$+ \sum_0^\infty (-1)^n 2(n+1)\,2n \cdot 2(n-1)\,J_{n,2}(u)\,(J_{n-1,1}(v) + J_{n+1,1}(v))$$
$$= \sum_0^\infty (-1)^n 12n^2 J_{n,1}(u)\,J_{n,1}(v)$$
$$+ \sum_0^\infty{}_n (-1)^n 16n^2(n^2-1)\,J_{n,2}(u)\,J_{n,2}(v)$$

Demnach kommt mit Rücksicht auf 21):

$$J_{2,2}(\varrho) = -\tfrac{1}{2}\sum_0^\infty (-1)^n n^2 J_{n,1}(u)\,J_{n,1}(v) + \tfrac{1}{2}\sum_0^\infty{}_n (-1)^n n^2 J_{n,1}(u)\,J_{n,1}(v)$$
$$+ \tfrac{2}{3}\sum_0^\infty{}_n (-1)^n n^2(n^2-1)\,J_{n,2}(u)\,J_{n,2}(v)$$

oder

23 c) $$J_{2,2}(\varrho) = \sum_0^\infty{}_n (-1)^{n+2}\varepsilon_n \frac{n^2(n^2-1)}{1\cdot 3} J_{n,2}(u)\,J_{n,2}(v)$$

In ähnlicher Weise ergiebt sich:

Digitized by Google

23 d) $$J_{3,3}(\varrho) = \sum_0^\infty {}_n(-1)^{n+3}\varepsilon_n \frac{n^2(n^2-1)(n^2-4)}{1\,.\,3\,.\,5} J_{n,3}(u)J_{n,3}(v)$$

u. s. w.

Aus 17a) und 17b) in Verbindung mit 23a) folgt:

III a. $$C_0 = \sum_0^\infty {}_n\varepsilon_n(-1)^n J_{n,0}(u)J_{n,0}(v)$$

III b. $$S_0 = 0$$

Aus 18a) und 18b) in Verbindung mit 23b) ergiebt sich:

IV a. $$C_1 = \sum_0^\infty {}_n(-1)^{n+1}\varepsilon_n \frac{n^2}{1}\left[\binom{2}{0} J_{n,0}(u)J_{n,1}(v) - \binom{2}{2} J_{n,1}(u)J_{n,0}(v)\right]$$

IV b. $$S_1 = \sum_0^\infty {}_n(-1)^{n+1}\varepsilon_n \frac{n^2}{1}\left[\binom{2}{1} J_{n,1:2}(u)J_{n,1:2}(v)\right]$$

Aus 19c) und 19b) in Verbindung mit 23c) erhält man:

V a. $$C_2 = \sum_0^\infty {}_n(-1)^{n+2}\varepsilon_n \frac{n^2(n^2-1)}{1\,.\,3}\left[\binom{4}{0} J_{n,0}(v)J_{n,2}(v) - \binom{4}{2} J_{n,1}(u)J_{n,1}(v) + \binom{4}{4} J_{n,2}(u)\,J_{n,0}(v)\right]$$

V b. $$S_2 = \sum_0^\infty {}_n(-1)^{n+2}\varepsilon_n \frac{n^2(n^2-1)}{1\,.\,3}\left[\binom{4}{1} J_{n,1:2}(u)J_{n,3:2}(v) - \binom{4}{3} J_{n,3:2}(u)J_{n,1:2}(v)\right]$$

Durch Fortsetzung dieser Betrachtungen kommt allgemein:

VI. $$C_\sigma = \sum_0^\infty {}_n(-1)^{n+\sigma}\varepsilon_n \frac{n^2(n^2-1^2)\,.\,.\,.\,(n^2-(\sigma-1)^2)}{1\,.\,3\,.\,.\,.\,(2\sigma-1)} \times \left[\binom{2\sigma}{0} J_{n,0}(u)J_{n,\sigma}(v) - \binom{2\sigma}{2} J_{n,1}(u)J_{n,\sigma-1}(v) + .\,.\,. \pm J_{n,\sigma}(u)J_{n,0}(v)\right]$$

$$S_\sigma = \sum_0^\infty {}_n(-1)^{n+\sigma}\varepsilon_n \frac{n^2(n^2-1^2)\,.\,.\,.\,(n^2-(\sigma-1)^2)}{1\,.\,3\,.\,.\,.\,(2\sigma-1)} \times \left[\binom{2\sigma}{1} J_{n,1:2}(u)J_{n,\frac{2\sigma-1}{2}}(v) - \binom{2\sigma}{3} J_{n,3:2}(u)J_{n,\frac{2\sigma-3}{2}}(v) + .\,.\,. \pm \binom{2\sigma}{2\sigma-1} J_{n,\frac{2\sigma-1}{2}}(u)J_{n,1:2}(v)\right]$$

Digitized by Google

D. *Resultat.*

Haben die C_σ *und* S_σ *die in* VI. *angegebene Bedeutung und entstehen die* C_σ' *und* S_σ' *aus diesen durch einfache Vertauschung der* u *und* v *mit* u_1 *und* v_1, *so ist für parabolische Coordinaten*

$$J_0(P) = \sum_0^{\infty}{}' \varepsilon_\sigma (C_\sigma C_\sigma' + S_\sigma S_\sigma')$$

und die C_σ *und* S_σ *sind particuläre Lösungen der Differentialgleichung*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial(\sqrt{u})^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial(\sqrt{v})^2} + 4(u+v)f = 0$$

Digitized by Google

VIII.

Ueber die Curven, deren Bogen der Tangente des Leitstrahlwinkels proportional ist, und die damit verwandten Curvenscharen.

Von

August Velde

aus Diez a. d. Lahn.

I.

Die Differentialgleichung

$$(t^2+1)\,.\,dx^2+2xt\,.\,dx\,.\,dt+(x^2-1)\,.\,dt^2=0$$

ist der analytische Ausdruck einer Curvenschar von bemerkenswerten Eigenschaften, die im Folgenden entwickelt werden sollen.

Man kann die obige Gleichung in der Form schreiben:

$$[d(tx)]^2+dx^2-dt^2=0 \qquad (1)$$

Setzt man $t=\frac{y}{x}$, so folgt

$$\sqrt{dx^2+dy^2}=d\frac{y}{x}$$

Bemerkung. Die in eckigen Klammern eingeschlossenen Citate beziehen sich sämtlich auf „Weierstrass, Formeln und Lehrsätze zum Gebrauch der elliptischen Functionen, herausgegeben von A. H. Schwarz. Berlin 1892". Das Citat giebt die Numer des betreffenden Artikels und — eventuell — in runder Klammer die der betreffenden Formel.

Digitized by Google

welche Gleichung besagt, dass das Bogenelement ds einer Curve, deren Coordinaten x, y jener Gleichung genügen, welches zwei benachbarte Strahlen eines durch den Anfangspunkt gelegten Büschels ausschneiden, gleich dem Linienelement ist, das von denselben Strahlen auf einer im Abstand 1 zur y-Achse gezogenen Parallelen ausgeschnitten wird. Diese Eigenschaft bleibt für zwei beliebige Strahlen des Büschels bestehen. Rechnet man den Bogen von demjenigen Punkte an, in welchem die Curve die x-Achse schneidet, so ist der Curvenbogen gleich der Tangente des Winkels, welchen der nach seinem Endpunkt gezogene Leitstrahl mit der Abscissenachse bildet; er ist der Tangente dieses Winkels proportional, wenn man den Massstab des Coordinatensystems ändert.

Setzt man der Reihe nach:

$$x = \xi i, \quad t = t; \quad x = \xi i, \quad t = \frac{\tau}{i}; \quad x = x, \quad t = \frac{\tau}{i}$$

so erhält man noch folgende drei einfache Gleichungen:

$$[d(t\xi)]^2 + d\xi^2 + dt^2 = 0 \tag{2}$$

$$[d(\tau\xi)]^2 - d\xi^2 + d\tau^2 = 0 \tag{3}$$

$$[d(\tau x)]^2 - dx^2 - d\tau^2 = 0 \tag{4}$$

Die Gleichung (2) kann keine reellen Curven geben; (3) stimmt im wesentlichen mit (1) überein; (4) definirt eine Curvenschar von der Eigenschaft, dass das von den Achsen und den Coordinaten eines Curvenpunktes (ξ, τ) begrenzte Rechteck gleich der Fläche ist, welche eine der Einheit gleiche Strecke beschreibt, wenn sie sich längs der Curve und senkrecht zu deren Ebene bewegt; denn man kann (4) auch so schreiben:

$$1 \,.\, \sqrt{d\xi^2 + d\tau^2} = d(\tau \,.\, \xi)$$

Um die Gleichung (1) zu integriren, setze man $\frac{dx}{dt} = z$:

$$(t^2+1) \,.\, z^2 + 2xtz + x^2 - 1 = 0$$

Diese Gleichung kann als die einer Fläche betrachtet werden. Führt man homogene Coordinaten ein, indem man

$$x = \frac{x_1}{x_4}, \quad t = \frac{x_2}{x_4}, \quad z = \frac{x_3}{x_4}$$

substituirt, so ergiebt sich aus beiden Formen:

$$x_3^2 \,.\, (x_3^2 + x_4^2) + 2x_3x_4 \,.\, (x_1x_2) + x_4^2 \,.\, (x_1^2 - x_4) = 0$$

und

Digitized by Google

$$x_2^2 \cdot (x_2^2) + 2x_2 x_4 \cdot (x_1 x_3) + x_4^2 \cdot (x_1^2 + x_3^2 - x^2_4) = 0$$

in welche die Gleichung gebracht werden kann, dass die Geraden

$$x_3 = 0, \quad x_4 = 0 \quad \text{und} \quad x_2 = 0, \quad x_4 = 0$$

Doppelgeraden der Fläche 4. Ordnung sind. Wir können daher die letztere auf eine Doppelebene abbilden (nach Clebsch), indem wir durch den Schnittpunkt der Doppelgeraden

$$x_2 = x_3 = x_4 = 0$$

ein Strahlenbündel legen. Wir setzen also

$$x_3 = s \cdot x_4, \quad x_2 = w \cdot x_4$$

und erhalten durch Auflösung der Gleichung:

$$\frac{x_1}{x_4} = -sw \pm \sqrt{1 - s^2}$$

$$\frac{x_2}{x_4} = w$$

$$\frac{x_3}{x_4} = s$$

Die Fläche ist also auf eine Doppelebene abgebildet; x, t und z sind rationale Functionen von s, w und $\sqrt{1 - s^2}$;

$$x = -sw + \sqrt{1 - s^2}, \quad t = w, \quad \frac{dx}{dt} = s$$

Zwischen s und w besteht die Gleichung:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dw}$$

d. h.

$$s = \frac{-s \cdot dw - w \cdot ds - \frac{ds}{\sqrt{1 - s^2}}}{dw}$$

oder

$$\frac{dw}{ds} + \frac{w}{2s} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - s^2}}$$

Für die Integration dieter linearen nicht homogenen Gleichung 1. Ordnung ist es wesentlich, dass unter der Wurzel die Grösse w gar nicht vorkommt.

Durch Integration kommt:

Digitized by Google

$$w = -\tfrac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{s}}\int \frac{s\,.\,ds}{\sqrt{s}\,.\,(1-s^2)} = \frac{1}{i\,.\,\sqrt{s}}\int \frac{s\,.\,ds}{\sqrt{S}}$$

indem

$$S = 4s^3 - 4s$$

also

$$t = \frac{1}{i\,.\,\sqrt{s}}\int \frac{s\,.\,ds}{\sqrt{S}}; \quad x = i\sqrt{s}\int \frac{s\,.\,ds}{\sqrt{S}} \pm i\frac{\sqrt{S}}{2\sqrt{s}}$$

$$\frac{dx}{dt} = s$$

Schreibt man in den ursprünglichen Gleichungen

$$t = w, \quad x = -sw + \sqrt{1-s^2}, \quad \frac{dx}{dt} = s$$

$-s$, $-w$ an Stelle von s, w, so bleibt x ungeändert, während t und $\frac{dx}{dt}$ das Zeichen wechseln. In den Integralgleichungen hat also $\sqrt{s}$ nicht notwendig überall die gleiche Bedeutung. Versteht man daher unter ε, ε_1, ε_2 die positive oder negative Einheit, so können wir schreiben:

$$t = \frac{\varepsilon}{i\sqrt{s}}\int \frac{s\,.\,ds}{\sqrt{S}}; \quad x = \varepsilon_1 i\sqrt{s}\int \frac{s\,.\,ds}{\sqrt{S}} + \varepsilon_2 i\frac{\sqrt{S}}{2\sqrt{s}}$$

mit der Bestimmung: $\sqrt{s}$ und $\sqrt{S}$ sollen jetzt eindeutige Grössen sein. Zwischen den ε kann eine Beziehung bestehen. Setzt man zur Abkürzung

$$\int \frac{s\,.\,ds}{\sqrt{S}} = J$$

so folgt durch Differentiation:

$$\frac{dt}{ds} = \frac{\varepsilon}{i}\left(\frac{\sqrt{s}}{\sqrt{S}} - \frac{J}{2s\sqrt{s}}\right); \quad \frac{dx}{\partial s} = \varepsilon_1 is\left(\frac{\sqrt{s}}{\sqrt{S}}\left(1+2\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right) + \frac{J}{2s\sqrt{s}}\right)$$

Die Bedingung $\frac{dx}{dt} = s$ erfordert zunächst

$$\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = -1$$

also

$$t = \frac{\varepsilon}{i\sqrt{s}}\,.\,J; \quad x = \varepsilon_1\,.\,i\left(\sqrt{s}\,.\,J - \tfrac{1}{2}\frac{\sqrt{S}}{\sqrt{s}}\right)$$

Dann ist

$$\frac{dx}{\partial t} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}\,.\,s$$

Digitized by Google

und die Differentialgleichung wird durch diese Ausdrücke identisch erfüllt, ohne dass zwischen ε und ε_1 noch eine Beziehung notwendig wäre.

Das Integral J ist unendlich vieldeutig. Man kann aber x und t auch durch eindeutige Functionen darstellen. Denn J ist ein elliptisches Integral II. Gattung in der Weierstrass'schen Normalform. Setzt man also

$$s = pu, \quad \sqrt{S} = -p'(u)$$

so ist [56 . (2) (3) (4)]:

$$\int_{(s,\sqrt{S})}^{\infty} \frac{ds}{\sqrt{S}} = u$$

$$\int^{(s,\sqrt{S})} \frac{s \cdot ds}{\sqrt{S}} = \frac{\varrho' u}{\sigma u} \quad \text{(Constantenbestimmung nach Art. 56.)}$$

Also unser Integral

$$J = \frac{\sigma' u}{\sigma u} + C$$

und

$$t = \frac{\varepsilon}{i\sqrt{pu}}\left(\frac{\sigma'}{\sigma}u + C\right)$$

$$x = \varepsilon_1 \cdot i\sqrt{pu}\left(\frac{\sigma'}{\sigma}u + C + \tfrac{1}{2}\frac{p'u}{pu}\right)$$

$$y = t \cdot x = \varepsilon_2\left(\frac{\sigma'}{\sigma}u + C\right)\left(\frac{\sigma'}{\sigma}u + C + \tfrac{1}{2}\frac{p'u}{pu}\right)$$

$$\varepsilon,\ \varepsilon_1,\ \varepsilon_2 = \pm 1; \quad \varepsilon_2 = \varepsilon \cdot \varepsilon_1$$

Zunächst sind also die Quadrate der Variabeln als eindeutige Functionen eines Parameters dargestellt.

II.

Die Gleichung

$$S = 4s^3 - g_2 s - g_3 = 4 \cdot (s - e_1)(s - e_2)(s - e_3)$$

oder

$$(p'u)^2 = 4p^3u - g_2 pu - g_3 = 4 \cdot (pu - e_1)(pu - e_2)(pu - e_3)$$

wird in unserm Falle:

Digitized by Google

$$(p'u)^2 = 4p^3u - 4pu = 4 \cdot (pu-1) \cdot pu \cdot (pu+1)$$

d. h.

$$g_2 = 4 \quad g_3 = 0$$

$$e_1 = 1 \quad e_2 = 0 \quad e_3 = -1$$

Setzt man

$$k^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3} = \frac{1}{2}, \quad k'^2 = \frac{e_1 - e_2}{e_1 - e_3} = 1 - k^2 = \frac{1}{2}$$

so sind die halben primitiven Perioden der Function

$$\omega_1 = \frac{K}{\sqrt{e_1 - e_3}}, \qquad \omega_3 = \frac{K' \cdot i}{\sqrt{e_1 - e_3}}$$

wo

$$K = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)\,(1-k^2t^2)}}, \quad K' \text{ analog} \qquad [27]$$

Für unser pu ist

$$K = K' \quad \text{reell}$$

$$\omega_1 = \frac{\omega_3}{i} = \frac{K}{\sqrt{2}}$$

Das Periodenparallelogramm ist also ein Quadrat, dessen Seiten der reellen resp. imaginären Achse der Zahlenebene parallel sind.

Man hat [45 . (8)]:

$$\sqrt{\frac{2\omega}{\pi}}\,\sqrt[4]{e_1 - e_2} = 1 - 2h + 2h^4 - \ldots$$

$$h = e^{\pi i \frac{\omega_3}{\omega_1}} = e^{-\pi} = 0{,}0432139$$

Dies giebt

$$2\omega_1 = 2{,}62205 = \frac{\omega_3}{i}$$

Wegen

$$p\omega_\lambda = e_\lambda, \quad p'\omega_\lambda = 0$$

folgt für $\lambda = 2$

$$p\omega_2 = 0, \quad p'\omega_2 = 0$$

Somit ist

$$u = \omega_2 = \omega_1 + \omega_3$$

eine doppelt zählende Nullstelle, und daher sind sämtliche Nullstellen von pu enthalten in

$$u = (2\mu+1)\,\omega_1 + (2\nu+1)\,\omega_3$$

Die Infinita dagegen in

Digitized by Google

$$u = 2\mu\omega_1 + 2\nu\omega_3$$
$$\mu, \nu = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$$

Für jedes dieser u ist pu von der zweiten Ordnung 0 resp. ∞. Beschreibt man daher um den Punkt ω_2 mit dem Radius $r = |\omega_2|$ einen Kreis, so ist pu innerhalb desselben endlich und stetig und daher als Potenzreihe von $u - \omega_2$ darstellbar. Die Coefficienten der Reihe lassen sich aus der Differentialgleichung

$$\left(\frac{ds}{du}\right)^2 = 4s^3 - 4s$$

berechnen, indem man $s = 0$ setzt.

Durch Inductionsschluss von n auf $n+2$ beweist man nun, dass

$$\frac{d^{2n}s}{du^{2n}} = g_{n+1}(s)$$

eine ganze Function des $(n+1)$ten Grades in s ist. Hieraus folgt

$$\frac{d^{3n+1}s}{du^{2n+1}} = g_{n+1}'(s) \cdot \frac{ds}{du}$$

somit verschwinden für $s = 0$ sämtliche Ableitungen ungerader Ordnung. Ferner ergiebt sich gleichfalls durch Inductionsschluss, dass

$$\frac{d^{4r-2}s}{du^{4r-2}} \psi_r(s^2)$$

eine ganze Function $r$ten Grades von s^2 ist. Es folgt alsdann

$$\frac{d^{4r}s}{du^{4r}} = s \cdot \Psi_r(s^2)$$

wo Ψ_r wieder eine ganze Function $r$ten Grades; somit verschwinden also auch sämtliche Ableitungen, deren Ordnungszahl $\equiv 0 \pmod 4$ ist, für $s = 0$.

In der Entwicklung von pu als $\mathfrak{P}(u - \omega_2)$:

$$pu = \Sigma a_r (u - \omega_2)^r$$

wo $a_r = \frac{1}{r!}\left(\frac{d^r s}{du^r}\right)_{s=3}$ ist, bleiben also nur diejenigen Glieder übrig, deren $r \equiv 2 \pmod 4$ ist, so dass wir schreiben können:

$$pu = \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon_r \cdot (u - \omega_2)^{4r+2}$$

Digitized by Google

Eine bequeme Recursionsformel zur Berechnung der ε_ν erhält man vermittelst der Gleichung

$$p^4 u = 6p^2 u - 2$$

Denn eingesetzt ergiebt sich

$$\sum_0^\infty (4\nu+2)(4\nu+1)\varepsilon_\nu (u-\omega_2)^{4\nu} = -2 + 6 \cdot (u-\omega_2)^4 \cdot \sum_{\lambda,\mu=0}^{\infty} \varepsilon_\lambda \varepsilon_\mu (u-\omega_2)^{4(\lambda+\mu)}$$

Setzt man

$$(u-\omega_2)^4 = z$$

schreibt links $\nu+1$ statt ν und beachtet, dass

$$\varepsilon_0 = -1$$

so kommt:

$$\sum_0^\infty (4\nu+6)(4\nu+5)\varepsilon_{\nu+1} z^\nu = 6 \sum_0^\infty \varepsilon_\lambda \varepsilon_\mu z^{\lambda+\mu}$$

also

$$\varepsilon_{n+1} = \frac{6}{(4\nu+6)(4\nu+5)} \cdot \sum_{\lambda=0}^{\nu} \varepsilon_\lambda \varepsilon_{\nu-\lambda}$$

Man findet:

$$\varepsilon_0 = -1 \qquad \varepsilon_1 = \frac{1}{5}$$

$$\varepsilon_3 = -\frac{2}{75} \qquad \varepsilon_3 = \frac{3}{975}$$

$$\varepsilon_4 = -\frac{82}{248625}$$

etc.

Zur Abkürzung werde

$$u - \omega_2 = u'$$

gesetzt. Aus

$$pu = \sum_0^\infty \varepsilon_\nu u'^{4\nu+2}$$

folgt durch Integration

$$\frac{\sigma'}{\sigma} u = \eta_2 - \int_{\omega_2}^{u} pu\, du$$

$$= \eta_2 - \Sigma \frac{\varepsilon_\nu}{4\nu+3} u'^{4\nu+3}$$

Setzt man

$$u' = -\omega_1 \quad \text{resp.} \quad = -\omega_3 = -\omega_1$$

so kommt:

Digitized by Google

$$u = \omega_2 - \omega_1 = \omega_3 \quad \text{resp.} \quad u = \omega_2 - \omega_3 = \omega_1$$

also

$$\frac{\sigma'}{\sigma}\omega_3 = \eta_3 = \eta_2 + \omega_1{}^3 \sum_0^\infty \frac{\varepsilon_\nu \omega_1{}^{4\nu}}{4\nu+3}$$

und

$$\frac{\sigma'}{\sigma}\omega_1 = \eta_1 = \eta_2 - i\omega_1{}^3 \sum_0^\infty \frac{\varepsilon_\nu \omega_1{}^{4\nu}}{4\nu+3}$$

Es ergiebt sich demnach:

$$i\eta_3 + \eta_1 = i\eta_2 + \eta_2$$

also, wegen $\eta_2 = \eta_1 + \eta_3$:

$$i \cdot \eta_1 + \eta_3 = 0$$

Ausserdem ist

$$i \cdot \eta_1 - \eta_3 = \frac{\pi i}{2\omega_1} \qquad \left(\text{wegen } \eta_1 \omega_3 - \eta_3 \omega_1 = \frac{\pi i}{2}\right)$$

somit

$$\eta_1 = \frac{\pi}{4\omega_1}, \quad \eta_3 = \frac{\pi}{4\omega_3}$$

Die Zahlenwerte der Perioden unserer Function sind also:

$$2\omega_1 = 2{,}62205 \qquad 2\omega_3 = 2{,}62205\,i$$
$$2\eta_1 = 1{,}19817 \qquad 2\eta_3 = -1{,}19817\,i$$

In der Nähe des Punktes $u = 0$ gilt die Entwicklung [9. (6) (7) (8)]:

$$pu = \frac{1}{u^2} \sum_{\lambda=0}^\infty c_{2\lambda} u^{4\lambda} = \frac{1}{u^2} \sum_0^\infty e_\lambda u^{4\lambda}$$

$$e_\lambda = \frac{3}{(4\lambda+1)(2\lambda-3)} \cdot \sum_{\nu=1}^{\lambda-2} e_\nu e_{\lambda-\nu} \qquad \left(\lambda \geqq 2\right)$$

$$e_0 = 1, \quad e_1 = \frac{1}{5}$$

Man findet

$$e_2 = \frac{1}{75}, \quad e_3 = \frac{2}{4875}$$

etc.

Um die Verteilung der Functionswerte im Periodenquadrat zu erkennen, beachte man, dass

$$p\omega_1 = e_1 = 1 \qquad p\omega_2 = e_2 = 0 \qquad p\omega_3 = e_3 = -1$$

$$pu = \frac{1}{u^2} \Sigma e_\nu u^{4\nu}, \quad \text{wo die } e_\nu \text{ reell}$$

Digitized by Google

$$p'u = -\frac{2}{u^3} + \ldots$$

$$= \infty \text{ für } u = 0, \quad = 0 \text{ für } u = \omega_1, \omega_2, \omega_3$$

Demnach ist $p'u$ für $u = 0 \ldots \omega_1$ beständig negativ, somit pu für $u = 0 \ldots \omega_1$ beständig abnehmend, und zwar

$$\text{von } \infty \text{ bis } +1$$

Wegen $pu = p(-u)$ wiederholen sich diese Werte auf der Strecke $0 \ldots -\omega_1$ in derselben Folge.

Die obigen Reihenentwicklungen zeigen ferner, dass

$$pu = -p\frac{u}{i}$$

ist, dass also pu auf dem Wege $0 \ldots \omega_3$ und $0 \ldots -\omega_3$ die Werte $-\infty \ldots -1$ in beständig algebraisch wachsender Folge annimmt. Endlich ist [19. (5)]:

$$p(u \pm \omega_2) = -\frac{\varepsilon}{pu}$$

sonach durchläuft pu auf den Seiten des um $u = 0$ als Mittelpunkt beschriebenen Periodenquadrats, welche der reellen Achse parallel sind, die Werte $-1 \ldots 0$ von der Mitte nach den Ecken hin, auf den der imaginären Achse parallelen Seiten entsprechend die Werte $+1 \ldots 0$.

Da pu im Periodenquadrat jeden Wert 2 Mal annimmt, so sind hiermit alle reellen Werte der Function gefunden, die somit auf den Seiten und Mittellinien des Periodenquadrats liegen.

Nun ist für $m = \sqrt{i} = e^{\frac{\pi i}{4}}$ [9. (5)]:

$$pu = p(u \mid \omega, \omega i) = p(u;\ g_2, 0) = \frac{1}{i}\, p\left(\frac{u}{\sqrt{i}} \,\middle|\, \frac{\omega}{\sqrt{i}}, \omega\sqrt{i}\right)$$

$$= \frac{1}{i}\, p\left(\frac{u}{\sqrt{i}};\ -g_2, 0\right)$$

$$= \frac{1}{i} \cdot \mathfrak{p}(w \mid \Omega, \Omega i) = \frac{1}{i}\, \mathfrak{p}w$$

wo

$$w = u \cdot e^{-\frac{\pi i}{4}}, \quad \Omega = \omega \cdot e^{-\frac{\pi i}{4}}$$

Digitized by Google

sein soll. Die Variable w geht durch Drehung ihrer Ebene um $+45^0$ in u über. Aus der Entwicklung für pu ergiebt sich die für $\mathfrak{p}w$:

$$\mathfrak{p}w = i \cdot pu = \frac{1}{w^2} \cdot \Sigma e_\nu \cdot (-1)^\nu \cdot w^{4\nu}$$
$$= -(w-\Omega_2) \cdot \Sigma \varepsilon_\nu \cdot (-1)^\nu \cdot (w-\Omega_2)^{4\nu}$$

$\mathfrak{p}w$ genügt der Differentialgleichung:

$$\frac{d^2s}{dw^2} = 4s^3 + 4s$$
$$= 4(s-i) \cdot s \cdot (s+i)$$

$$\mathfrak{p}\Omega_1 = i; \quad \mathfrak{p}\Omega_2 = 0; \quad \mathfrak{p}\Omega_3 = -i$$

Da $\mathfrak{p}w$ für reelle und imaginäre w reell ist und zwar, wie man leicht erkennt, für solche w jeden reellen Wert zwei Mal annimmt, so folgt, dass pu auf den Diagonalen des Periodenquadrats — und nur auf diesen — imaginär ist.

Wegen [19. (5)] hat man:

$$p(u \pm \omega_1) - 1 = \frac{2}{pu-1}; \quad \mathfrak{p}(w \pm \Omega_1) - i = -\frac{2}{\mathfrak{p}w-i}$$

$$p(u \pm \omega_2) = -\frac{1}{pu}; \quad \mathfrak{p}(w \pm \Omega_2) = \frac{1}{\mathfrak{p}w}$$

$$p(u \pm \omega_3) + 1 = \frac{2}{pu+1}; \quad \mathfrak{p}(w \pm \Omega_3) + i = -\frac{2}{\mathfrak{p}w+i}$$

Mit Hilfe dieser Gleichungen findet man auf Grund der schon bekannten Zahlenwerte diejenigen für $\frac{1}{4}$ Periode, s. Fig. 1. 2.

III.

Nach diesem Excurs wollen wir die Integralgleichungen unserer Differentialgleichung:

$$t = \frac{\varepsilon}{i\sqrt{pu}} \cdot \left(\frac{\sigma'}{\sigma} u + C\right)$$

Digitized by Google

$$x = \varepsilon_1 \cdot i\sqrt{pu} \cdot \left(\frac{\sigma'}{\sigma} u + C + \tfrac{1}{2}\frac{p'u}{pu}\right)$$

näher betrachten.

Vermehrt man u um eine Periode $2\tilde{\omega}$, so bleiben pu und $p'u$ ungeändert, $\frac{\sigma'}{\sigma} u$ geht in $\frac{\sigma'}{\sigma} u + 2\tilde{\eta}$ über. Das so erhaltene Wertepaar t_1, x_1 geht aber auch aus t, x hervor, wenn man C in $C+2\tilde{\eta}$ verwandelt. Wir können jede einzelne Curve der durch die Differentialgleichung definirten Schar als eine eindeutige Function des willkürlichen Parameters C betrachten, indem zu jedem Werte von C eine bestimmte Curve gehört. Umgekehrt entspricht nicht jeder Curve ein einziger Wert von C, sondern unendlich viele; ist C_1 einer derselben, so ist allgemein

$$C = C_1 + 2\tilde{\eta} = C_1 + 2\mu\eta + 2\nu\eta'$$
(μ, ν ganze Zahlen).

Die Curvenschar ist also gewissermassen eine eindeutige doppelperiodische Function ihres Parameters C.

Soll C eindeutig durch die Curve bestimmt sein, so muss man entweder C auf das Periodenquadrat $(2\eta_1, 2\eta_3)$ oder u auf das Periodenquadrat $(2\omega_1, 2\omega_3)$ beschränken. Wir wollen das letztere tun. Wie man später sehen wird, kommt dies darauf hinaus, die einzelnen im Unendlichen zusammenhängenden Aeste einer Curve als Individuen für sich zu betrachten.

Zunächst soll eine wichtige Beziehung der Integrale zu einander hergeleitet werden. Die Differentialgleichung lautete in der ersten Form (I., Gl. 1):

$$d(tx)^2 + dx^2 - dt^2 = 0$$

und in der dritten, wo

$$x = \xi i, \quad t = \frac{\tau}{i}$$

gesetzt war:

$$d(\tau\xi)^2 - d\xi^2 + d\tau^2 = 0$$

Nun geht aber die letztere Gleichung aus der ersten auch hervor, wenn man statt t, x schreibt: ξ, τ. Das heisst: Wenn

$$t = \frac{1}{i} \cdot \varphi(u), \quad x = i \cdot \psi(u)$$

der Differentialgleichung genügen, so auch

Digitized by Google

$$t = \xi = \frac{x}{i} = \psi(u) \quad \text{und} \quad x = \tau = t \,.\, i = \varphi(u)$$

Daraus folgt, dass es eine Substitution $\lambda(u)$ geben muss, welche $\frac{1}{i}\,\varphi u$ in ψu und $i\psi u$ in φu überführt. Wir setzen also

$$\frac{1}{i}\,\varphi(\lambda u) = \psi u; \quad i \,.\, \psi(\lambda u) = \varphi u$$

Schreibt man in der letzten Gleichung λu statt u und setzt zur Abkürzung

$$\lambda(\lambda u) = \lambda_2 u$$

so kommt:

$$i\psi(\lambda_2 u) = \varphi(\lambda u) = i\,\psi(u)$$

$$\psi(\lambda_2 u) = \psi u$$

Ebenso ergiebt sich:

$$\varphi(\lambda_2 u) = \varphi u$$

Somit ist $\lambda_2 u - u$ eine Periode, d. h.:

$$\lambda_2 u = u + 2\tilde{\omega}$$

also

$$\lambda u = u + \tilde{\omega}$$

Demnach verwandelt sich

$$t \text{ in } \frac{x}{i}, \quad x \text{ in } t \,.\, i$$

wenn statt u gesetzt wird $u + \tilde{\omega}$, wo

$$\tilde{\omega} = p\omega + q\omega'$$

p und q sind jetzt zu bestimmen. Dies geschieht vermittels der Gleichung

$$\frac{dx}{dt} = pu$$

Es ist

$$x = \varphi u = i\psi(u + \bar{\omega}); \quad t = \psi u = \frac{1}{i} \,.\, \varphi(u + \bar{\omega})$$

$$\frac{dx}{dt} = pu = \frac{\varphi' u}{\psi' u} = -\frac{\psi'(u + \bar{\omega})}{\varphi'(u + \bar{\omega})}$$

also ist $\bar{\omega}$ so zu bestimmen, dass

$$pu = -\frac{1}{p(u + \bar{\omega})}$$

wird. Das ist aber nach [19. (5)] der Fall, wenn

Digitized by Google

$$p \equiv 1, \quad q \equiv 1 \pmod 2$$

also

$$\tilde{\omega} = 2\mu\omega_1 + 2\nu\omega_3 \pm \omega_2$$

In der Tat leistet diese Substitution das Gewünschte, wenn noch die Unbestimmtheit der Constanten C berücksichtigt wird; denn es ist [11. (4) (5)]:

$$\frac{\sigma'}{\sigma}(u \pm \omega_2) = \frac{\sigma'}{\sigma} u \pm \eta_2 + \tfrac{1}{2}\frac{p'u}{pu}$$

$$p(u \pm \omega_2) = -\frac{1}{pu}$$

$$p'(u \pm \omega_2) = \frac{p'u}{p^2u}$$

$$\tfrac{1}{2}\frac{p'(u \pm \omega_2)}{p(u \pm \omega_2)} = -\tfrac{1}{2}\frac{p'u}{pu}$$

Setzt man demnach z. B. $u = u' + \omega_2$, $C = C' + \eta_2$, so wird

$$t = \frac{\varepsilon}{i\sqrt{pu}}\left(\frac{\sigma'}{\sigma} u + C\right) = \varepsilon \frac{1}{i}\varphi(u, C)$$

übergeführt in

$$\varepsilon\sqrt{pu'}\left(\frac{\sigma'}{\sigma} u' + C' + \tfrac{1}{2}\frac{pu'}{pu}\right) = \varepsilon \cdot \psi(u', C')$$

während

$$x = \varepsilon_1 i \sqrt{pu}\left(\frac{\sigma'}{\sigma} u + C + \tfrac{1}{2}\frac{pu}{p'u}\right) = \varepsilon_1 \cdot i\psi(u, C)$$

in

$$\frac{\varepsilon_1}{\sqrt{pu'}} \cdot \left(\frac{\sigma'}{\sigma} u' + C'\right) = \varepsilon_1 \cdot \varphi(u', C')$$

übergeht.

Um weitere Schlüsse zu ziehen, benutzen wir die Form der Reihenentwicklungen von t und x.

Es war

$$pu = u'^2 \sum_0^\infty \varepsilon_\nu u'^{4\nu} \ldots \quad (u' = u - \omega_2 \ldots \varepsilon_0 = -1)$$

also

$$\sqrt{pu} = u' \cdot i(1 - \sum_1^\infty \varepsilon_\nu u'^{4\nu})^{1/2}$$

$$= i \cdot u' \cdot \sum_0^\infty \alpha_\nu v^{4\nu} \ldots \qquad (\alpha_0 = 1)$$

Digitized by Google

$$\frac{1}{\sqrt{pu}} = \frac{1}{i \cdot u'} \Sigma \beta_\nu u^{4\nu} \ldots \qquad (\beta_0 = 1)$$

$$p'u = u' \Sigma \gamma_\nu u^{4\nu} \ldots \qquad (\gamma_0 = -2)$$

$$\frac{1}{2} \frac{p'u}{pu} = \frac{1}{u'} \cdot \sum_0^\infty \delta_\nu u^{4\nu} \ldots \qquad (\delta_0 = 1)$$

$$\frac{\sigma'}{\sigma} u = \eta_2 - u'^3 \sum_0^\infty \frac{\varepsilon_\nu}{4\nu+3} u^{4\nu} = \eta_2 + u'^3 \Sigma \zeta_\nu u^{4\nu} \qquad (\zeta_0 = \tfrac{1}{3})$$

Somit wird

$$t = -\varepsilon \cdot \left\{ \frac{C'}{u'} \mathfrak{P}(u'^4) + u'^2 \mathfrak{P}_1(u'^4) \right\}$$

wo

$$C' = C + \eta_2$$

und die $\mathfrak{P}$ Potenzreihen ihres Argumentes u'^4 sind. Ebenso ist

$$x = -\varepsilon_1 \cdot \{C_1 \cdot u \cdot \mathfrak{P}_2(u'^4) + \mathfrak{P}_3(u'^4)\}$$

Beachtet man, dass t in $\frac{x}{i}$, ix in $t \cdot i$ übergeht, wenn man gleichzeitig u' durch

$$u' + \omega_2 = u$$

und C' durch

$$C' - \eta_2 = C$$

ersetzt, so hat man:

$$t = -\varepsilon \left\{ \frac{C'}{u'} \mathfrak{P}(u'^4) + u'^2 \mathfrak{P}_1(u'^4) \right\}$$

$$= -\frac{\varepsilon_1}{i} \left\{ Cu \mathfrak{P}_2(u^4) + \mathfrak{P}_3(u^4) \right\}$$

$$x = -\varepsilon_1 \left\{ C'u' \mathfrak{P}_2(u'^4) + \mathfrak{P}_3(u'^4) \right\}$$

$$= -\varepsilon i \left\{ \frac{C}{u} \mathfrak{P}(u^4) + u^2 \cdot \mathfrak{P}_1(u^4) \right\}$$

Da die ε, ε_1 unabhängig die Werte ± 1 haben, so hat man, wenn t, x ein zusammengehöriges Wertepaar, stets noch die folgenden drei andern:

$$-t, x; \quad t, -x: \quad -t, -x$$

Aus den vorstehenden Entwicklungen folgt nun, dass auch nach Unterdrückung der zweideutigen ε neben irgend einem Wertepaar t, x jedesmal auch noch diese drei andern auftreten. Denn ersetzt man

Digitized by Google

$$u,\ C$$

durch

$$ui,\ \frac{C}{i}$$

so verwandeln sich

$$t,\ x$$

in

$$t,\ -x$$

Ebenso geht durch die Substitution $\begin{pmatrix} u', & C' \\ u'i, & \frac{C'}{i} \end{pmatrix}$, welche wegen

$$u = u' + \omega_2, \quad C = C' - \eta_2$$

mit dieser:

$$\begin{pmatrix} u & C \\ u'i + \omega_2, & \frac{C'}{i} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u & C \\ ui + 2\omega_1, & \frac{C}{i} - 2\eta_1 \end{pmatrix}$$

äquivalent ist, $t,\ x$ in

$$-t,\ x$$

über. Endlich zieht die Verbindung beider Substitutionen:

$$\begin{pmatrix} u, & C \\ ui, & C/i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u, & C \\ ui + 2\omega_1, & C/i - 2\eta_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u & C \\ -u + 2\omega_3 & -C - 2\eta_3 \end{pmatrix}$$

die folgende:

$$\begin{pmatrix} t, & x \\ t, & -x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t, & x \\ -t, & x \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} t, & x \\ -t, & -x \end{pmatrix}$$

nach sich.

Demnach können die doppelten Vorzeichen vor den Integralen unserer Differentialgleichung weggelassen werden; dieselben sind somit als vollkommen eindeutige Functionen eines Parameters dargestellt.

Besonders interessiren uns nun die reellen Werte der Variabeln $t,\ x,\ \tau,\ \xi$, d. h. also die reellen und imaginären Werte von t und x.

Damit $t,\ x$ reell oder imaginär seien, muss

$$\frac{dx}{dt} = pu$$

reell oder imaginär sein, u also den Mittellinien, Seiten oder Diagonalen des Periodenquadrats angehören.

Es entsprechen:

Digitized by Google

die Mittellinien: reellen und imaginären u

„ Seiten „ „ „ $u - \omega_2 = u'$

„ Diagonalen „ „ „ $u\sqrt{i} = w$

und $u' \cdot \sqrt{i} = w'$

t und x können also nur für reelle und imaginäre u, u', w, w' reell oder imaginär sein. Ob sie dies auch wirklich sind, ergiebt sich aus obigen Reihenentwicklungen nebst den noch hinzukommenden, welche durch die Substitutionen

$$u = w\sqrt{i}, \quad C = \frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{i}}$$

$$u' = w' \cdot \sqrt{i}, \quad C' = \frac{\mathfrak{C}'}{\sqrt{i}}$$

daraus hervorgehen, also:

$$\left.\begin{aligned} t &= \frac{1}{i}\left\{Cu\,\mathfrak{P}_2(u^4) + \mathfrak{P}_3(u^4)\right\} \\ x &= i\left\{\frac{C}{u}\,\mathfrak{P}(u^4) + u^2\mathfrak{P}_1(u^4)\right\} \end{aligned}\right\} \quad (\alpha)$$

$$\left.\begin{aligned} t &= \frac{C'}{u'}\,\mathfrak{P}(u'^4) + u'^2\mathfrak{P}_1(u'^4) \\ x &= C'u'\mathfrak{P}_2(u'^4) + \mathfrak{P}_3(u'^4) \end{aligned}\right\} \quad (\beta)$$

$$\left.\begin{aligned} t &= \frac{1}{i}\left\{\mathfrak{C}w\,\mathfrak{P}_2(-w^4) + \mathfrak{P}_3(-w^4)\right\} \\ x &= \frac{\mathfrak{C}}{w}\mathfrak{P}(-w^4) - \mathfrak{P}_1(-w^4) \end{aligned}\right\} \quad (\gamma)$$

$$\left.\begin{aligned} t &= \frac{1}{i}\left\{\frac{\mathfrak{C}'}{w'}\,\mathfrak{P}(-w^4) - w'^2\mathfrak{P}_1(-w^4)\right\} \\ x &= \mathfrak{C}'w'\mathfrak{P}_2(-w^4) + \mathfrak{P}_3(-w^4) \end{aligned}\right\} \quad (\delta)$$

Die Coefficienten der Potenzreihen $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{P}_3$ sind reell. Wir erhalten daher folgendes Resultat:

Gleichzeitig reelle oder Gleichzeitig imaginäre	reell	imaginär
u, C	τ, ξ	t, x
u', C'	t, x	τ, ξ
w, $\mathfrak{C}$	τ, x	t, ξ
w', $\mathfrak{C}'$	τ, x	t, ξ

Digitized by Google

Hiermit sind sämtliche Werte der Hilfsvariabeln u und des Parameters C gefunden, welche reelle oder rein imaginäre Integralwerte liefern.

Zugleich zeigen die Entwicklungen (α) bis (δ), welche Darstellung zu wählen ist, um die reellen Grössen auch unter äusserlich reeller Form zu erhalten.

Für τ, x erweist sich zu diesem Zweck die Einführung der Function pu als nützlich.

Um die eindeutige Darstellung der Integrale noch deutlicher hervortreten zu lassen, führen wir die σ-Functionen ein. Nach [18. (2) (3)] ist:

$$pu - e_2 = \left(\frac{\sigma_2}{\sigma} u\right)^2$$

also, da $e_2 = 0$,

$$\sqrt{pu} = \frac{\sigma_2}{\sigma} u$$

$$p'u = -2\,\frac{\sigma_1 u\, \sigma_2 u\, \sigma_3 u}{\sigma^3 u}$$

$$\frac{1}{2}\,\frac{p'u}{pu} = -\,\frac{\sigma_1 u\, \sigma_3 u}{\sigma_2 u\, \sigma u}$$

Demnach wird

$$t = \frac{1}{i}\,\frac{\sigma}{\sigma_2}\, u\left(C + \frac{\sigma'}{\sigma}\, u\right)$$

$$x = i\,.\,\frac{\sigma_2}{\sigma}\, u\left(C + \frac{\varrho'}{\sigma}\, u - \frac{\sigma_1}{\sigma_2}\frac{\sigma_3}{\sigma}\, u\right)$$

Wegen [11. (4)] kann man schreiben:

$$x = i\,\frac{\sigma_2}{\sigma}\, u\left(C - \eta_2 + \frac{\sigma'}{\sigma}\,(u + \omega_2)\right)$$

und wegen [19. (4)]:

$$x = i\,\frac{\sigma_2}{\sigma}\, u\left(C + \frac{\sigma_2'}{\sigma_2}\, u\right)$$

Somit:

$$\left.\begin{aligned} x &= i\,\frac{\sigma_2}{\sigma}\, u\left(C + \frac{\sigma_2'}{\sigma_2}\, u\right) \\ t &= \frac{1}{i}\,\frac{\sigma}{\sigma_2}\, u\left(C + \frac{\sigma'}{\sigma}\, u\right) \end{aligned}\right\} \qquad (a)$$

Setzt man

Digitized by Google

$$u = u' + \omega_2, \quad C = C' - \eta_2$$

so ergeben die Formeln [19]:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{\sigma}{\sigma_2} u' \left(C' + \frac{\sigma'}{\sigma} u' \right) \\ t &= \frac{\sigma_2}{\sigma} u' \left(C' + \frac{\sigma_2'}{\sigma_2} u' \right) \end{aligned}\right\} \qquad (b)$$

Nimmt man

$$u = w \sqrt{i}$$

so ist

$$pu = \frac{1}{i} \mathfrak{p} w$$

Werden die dem $\mathfrak{p}w$ entsprechenden vier Sigmafunctionen mit ς_λ bezeichnet, so ist

$$\sqrt{pu} = \frac{1}{\sqrt{i}} \sqrt{\mathfrak{p} w} = \frac{1}{\sqrt{i}} \frac{\varsigma^2 w}{\varsigma w}$$

Ferner

$$p'u = \frac{1}{i} \mathfrak{p}' w \cdot \frac{dw}{du} = \frac{1}{i} \cdot \frac{1}{\sqrt{i}} \mathfrak{p}' w$$

$$\frac{1}{2} \frac{p'u}{pu} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{i}} \frac{\mathfrak{p}' w}{\mathfrak{p} w} = -\frac{1}{\sqrt{i}} \frac{\varsigma_1 w \varsigma_3 w}{\varsigma_2 w \varsigma w}$$

Endlich nach [5. (5)]:

$$\sigma(u \mid \omega, \omega') = \sigma(w\sqrt{i} \mid \omega, \omega') = \sqrt{i}\, \sigma\left(w \mid \frac{w}{\sqrt{i}}, \frac{\omega'}{\sqrt{i}} \right)$$

$$= \sqrt{i}\, \varsigma(w \mid \Omega, \Omega')$$

$$\sigma' u = \sqrt{i}\, \varsigma' w \cdot \frac{dw}{du}$$

$$\frac{\sigma' u}{\sigma u} = \frac{1}{\sqrt{i}} \frac{\varsigma' w}{\varsigma w}$$

Daher:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{\varsigma_2}{\varsigma} w \left(\mathfrak{C} + \frac{\varsigma_2'}{\varsigma_2} w \right) \\ t \cdot i &= \frac{\varsigma}{\varsigma_2} w \left(\mathfrak{C} + \frac{\varsigma'}{\varsigma} w \right) \end{aligned}\right\} \qquad (c)$$

wieder mit Anwendung von [11. (4)] und [19. (4)]. Wie früher, ist

$$\mathfrak{C} = \frac{C}{\sqrt{i}}$$

Substituirt man

Digitized by Google

$$w = w' + \Omega_2, \quad \mathfrak{C} = \mathfrak{C}' - H_2$$

wo die H der Function $\mathfrak{p}$ den η der Function p entsprechen, so kommt:

$$\left.\begin{aligned} x &= -\frac{\varsigma}{\varsigma_2} w' \left(\mathfrak{C}' + \frac{\varsigma'}{\varsigma} w' \right) \\ ti &= -\frac{\varsigma_2}{\varsigma} w' \left(\mathfrak{C}' + \frac{\varsigma_2'}{\varsigma_2} w' \right) \end{aligned}\right\} \qquad \text{(d)}$$

In diesen Gleichungen (a) bis (d) tritt die durch die symmetrische Form der Differentialgleichung geforderte Symmetrie der Integrale unmittelbar hervor.

Auf die gleiche Weise wie früher (II., pag. 207 und 208) findet man:

$$H_1 = \frac{\pi}{4\Omega_1} = \eta_1 \sqrt{i}, \quad H_3 = \frac{\pi}{4a_3} = \eta_3 \sqrt{i}$$

$$H_2 = H_1 + H_3 = \eta_2 \sqrt{i} = \eta \sqrt{2}$$

Zur Berechnung ist die Darstellung durch Thetafunctionen am geeignetsten. Setzt man gemäss [45 (10) (12) und (15) (17)]:

$$v = \frac{u}{2\omega}, \quad \tau = \frac{\omega\tau}{\omega_1} = i, \quad h = e_3 \pi i = e^{-\pi}$$

$$G = (e_1 - e_2)^2 \,.\, (e_1 - e_3)^2 \,.\, (e_2 - e_3) = 4$$

so wird

$$\sqrt{\frac{2\omega}{\pi}} \sqrt[8]{G}\, \sigma u = e^{2\eta\omega v^2}\, \vartheta_1(v \mid \tau) = e^{\frac{\pi}{2} v^2} \,.\, \vartheta_1(v \mid \tau)$$

$$\sqrt{\frac{2\omega}{\pi}} \sqrt[8]{e_1 - e_3}\, \sigma_2 u = e^{2\eta\omega v^2}\, \vartheta_3(v \mid \tau) = e^{\frac{\pi}{2} \vartheta_4^2} \,.\, \vartheta_3(v \mid \tau)$$

woraus folgt:

$$\frac{\sigma'}{\sigma} u = 2\eta v + \frac{1}{2\omega} \frac{\vartheta_1'}{\vartheta_1} (v \mid \tau)$$

$$\frac{\sigma_2'}{\sigma_2} u = 2\eta v + \frac{1}{2\omega} \frac{\vartheta_3'}{\vartheta_3} (v \mid \tau)$$

$$\frac{\sigma}{\sigma_2} u = \frac{\vartheta_1}{\vartheta_3} (v \mid \tau)$$

Dabei ist

Digitized by Google

$$\vartheta_1(v \mid \tau) = 2k^{\frac{1}{4}} \sin v\pi - 2k^{\frac{9}{4}} \sin 3v\pi + 2k^{\frac{25}{4}} \sin 5v\pi - \ldots$$

$$\vartheta_3(v \mid \tau) = 1 + 2k \cos 2v\pi + 2k^4 \cos 4v\pi + 2k^9 \cos 6v\pi + \ldots$$

$$\vartheta_1'(v \mid \tau) = \pi \cdot \{2k^{\frac{1}{4}} \cos v\pi - 6k^{\frac{9}{4}} \cos 3v\pi + \ldots\}$$

$$\vartheta_3'(v \mid \tau) = -\pi \cdot \{4k \sin 2v\pi + 8k^4 \sin 4v\pi + \ldots\}$$

Somit gehen die Gleichungen (b), indem man u statt u' geschrieben denkt, über in

$$\left.\begin{aligned} x &= 2\eta \cdot \frac{\vartheta_1}{\vartheta_3} v \cdot \left(c + v + \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\vartheta_1'}{\vartheta_1} v\right) \\ t &= 2\eta \cdot \frac{\vartheta_3}{\vartheta_1} v \cdot \left(c + v + \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\vartheta_3'}{\vartheta_3} v\right) \end{aligned}\right\} \qquad (b')$$

$$c = \frac{C}{2\eta}$$

Analog lassen sich die Gleichungen (d) transformiren. Setzt man entsprechend [46 (1) (2) (10) (11) (14) (15)]:

$$\Omega_2 = \Omega_3 + \Omega_1 = \frac{\omega_2}{\sqrt{i}} = \omega\sqrt{2} = 1{,}85403$$

$$\Omega_2' = \Omega_3 - \Omega_1 = \Omega_2 \cdot i = 1{,}85403\, i$$

$$\tau' = \frac{\Omega_2'}{\Omega_2} = i, \quad \tau_2 = \frac{\tau'}{2} = \frac{i}{2}, \quad h_2 = e^{\tau_2 \pi i} = e^{-\frac{1}{2}\pi}$$

$$\varepsilon_1 = i, \quad \varepsilon_2 = 0, \quad \varepsilon_3 = -i$$

$$G = (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 (\varepsilon_1 - \varepsilon_3)^2 (\varepsilon_2 - \varepsilon_2)^2 = -4$$

$$H_2 = \eta_2 \sqrt{i} = 0{,}84723; \qquad H_2 \Omega_2 = \frac{\pi}{2}$$

so wird

$$\sqrt{\frac{2\Omega_2}{\pi}}\sqrt[8]{-G} \cdot \varsigma u = e^{2H_2\Omega_2 v_2^2} e^{-\frac{1}{8}\pi i} \cdot \vartheta_1(v_2 \mid \tfrac{1}{2} + \tau_2)$$

$$= e^{\pi v_2^2} e^{-\frac{1}{8}\pi i} \cdot \vartheta_2 v_2$$

$$\sqrt{\frac{2\Omega_2}{\pi}}\sqrt[4]{i \cdot (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)} \cdot \varsigma_2 u = e^{2H_2\Omega_2 v_2^2} e^{-\frac{1}{8}\pi i} \cdot \vartheta_2(v_2 \mid \tfrac{1}{2} + \tau_2)$$

$$= e^{\pi v_2^2} e^{-\frac{1}{8}\tau i} \cdot \vartheta_2 v_2$$

Digitized by Google

Also

$$\frac{\varsigma'}{\varsigma} u = 2H_2 v_2 + \frac{H_2}{\pi} \frac{\vartheta_1'}{\vartheta_1} v_2$$

$$\frac{\varsigma_2'}{\varsigma_2} u = 2H_2 v_2 + \frac{H_2}{\pi} \frac{\vartheta_2'}{\vartheta_2} v_2$$

$$\frac{\varsigma}{\varsigma_2} u = \frac{\vartheta_1}{\vartheta_2} v_2$$

$$e^{-\frac{1}{8}\pi i} \vartheta_1(v_2 \mid \tfrac{1}{2}+\tau_2) = 2h_2^{\frac{1}{4}} \sin v_2\pi + 2h_2^{\frac{9}{4}} \sin 3v_2\pi - 2h_2^{\frac{25}{4}} \sin 5v_2\pi - \ldots$$

$$e^{-\frac{1}{8}\pi i} \vartheta_2(v_2 \mid \tfrac{1}{2}+\tau_2) = 2h_2^{\frac{1}{4}} \cos v_2\pi - 2h_2^{\frac{9}{4}} \cos 3v_2\pi + 2h_2^{\frac{25}{4}} \cos 5v_2\pi + \ldots$$

$$e^{-\frac{1}{8}\pi i} \vartheta_1'(v_2 \mid \tfrac{1}{2}+\tau_2) = \pi \cdot \{2h_2^{\frac{1}{4}} \cos v_2\pi + 6h_2^{\frac{9}{4}} \cos 3v_2\pi - \ldots\}$$

$$e^{-\frac{1}{8}\pi i} \vartheta_2'(v_2 \mid \tfrac{1}{2}+\tau_2) = -\pi \cdot \{2h_2^{\frac{1}{4}} \sin v_2\pi - 6h_2^{\frac{9}{4}} \sin 3v_2\pi - \ldots\}$$

Somit gehen die Gleichungen (d), wenn darin w' wieder durch u ersetzt wird, über in

$$\left.\begin{aligned} x &= 2H_2 \frac{\vartheta_1}{\vartheta_2} v_2 \left(c + v_2 + \tfrac{1}{2} \cdot \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\vartheta_1'}{\vartheta_1} v_2\right) \\ ti &= 2H_2 \frac{\vartheta_2}{\vartheta_1} v_2 \left(c + v_2 + \tfrac{1}{2} \cdot \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\vartheta_2'}{\vartheta_2} v_2\right) \end{aligned}\right\} \qquad (d')$$

Dabei ist

$$c = \frac{\mathfrak{C}}{2H_2}$$

Auf Grund der vorstehenden Formeln sind die folgenden beiden Tabellen berechnet.

Digitized by Google

$\frac{u}{\omega}$	$\frac{\sigma}{\sigma_2} u$	$\frac{\sigma'}{\sigma} u$	$\frac{\sigma_2}{\sigma} u$	$\frac{\sigma_2'}{\sigma_2} u$
0	0	∞	∞	0
0,1	0,13110	7,6276	7,6276	0,001054
0,2	0,26209	3,8127	3,8155	0,006362
0,3	0,39237	2,5385	2,5486	0,020369
0,4	0,52046	1,8973	1,9214	0,047555
0,5	0,64360	1,5067	1,5538	0,092055
0,6	0,75743	1,2385	1,3203	0,15685
0,7	0,85624	1,0328	1,1679	0,24298
0,8	0,93351	0,87382	1,07122	0,34879
0,9	0,9822,7	0,73170	1,01733	0,46979
1	1	0,59908	1	0,59908

$\frac{u}{\Omega_2}$	$\frac{\varsigma}{\varsigma_2} u$	$\frac{\varsigma'}{\varsigma} u$	$\frac{\varsigma_2}{\varsigma} u$	$\frac{\varsigma_2'}{\varsigma_2} u$
0	0	∞	∞	0
0.1	0,18547	5,3938	5,3915	—0,00238
0 2	0,37160	2,6996	2,6910	—0,01741
0,3	0,56169	1,8087	1,7803	—0,05814
0,4	0,76472	1,3747	1,3077	—0,13963
0,5	1	1,1305	1	—0,2833
0,6	1,3077	0,98686	0,76472	—0,5275
0,7	1,7803	0,90537	0,56169	—0,9615
0,8	2,6910	0,86465	0,37160	—1,8524
0,9	5,3915	0,84961	0,18547	—4,5466
1	∞	0,84723	0	$-\infty$

Mit Hilfe der Formeln [18 (2) (3)], [19 (4) (5)] und [9 (1)] lassen sich die Gleichungen (b) und (d) leicht differentiiren. Ersetzt man die gestrichenen Buchstaben wieder durch ungestrichene, so kommt:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{du} &= -\frac{\sigma_2}{\sigma} u + \left(C + \frac{\sigma'}{\sigma} u\right) \cdot \frac{\sigma_1}{\sigma_2^2} \frac{\sigma_3}{u} u \\ \frac{dt}{du} &= \frac{\sigma}{\sigma_2} u - \left(C + \frac{\sigma_2'}{\sigma_2} u\right) \cdot \frac{\sigma_1 \sigma_3}{\sigma^2} u \end{aligned}\right\} \quad (e)$$

Digitized by Google

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2x}{du^2} = -2x \cdot \frac{1}{pu}; \quad \frac{d^2t}{du^2} = 2t \cdot pu \\ &\frac{dt}{dx} = -pu, \quad \frac{d^2t}{dx^2} = -p'u : \frac{dx}{du} \end{aligned}\right\} \tag{e}$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dx}{dw} = -\frac{\varsigma_2}{\varsigma} w + \left(\mathfrak{C} + \frac{\varsigma'}{\varsigma} w\right) \cdot \frac{\varsigma_1\varsigma_3}{\varsigma_2^2} w \\ &\frac{dti}{dw} = -\frac{\varsigma}{\varsigma_2} w - \left(\mathfrak{C} + \frac{\varsigma_2'}{\varsigma_2} w\right) \cdot \frac{\varsigma_1\varsigma_3}{\varsigma^2} u \\ &\frac{d^2x}{dw^2} = 2x \frac{1}{\mathfrak{p}w}; \quad \frac{d^2ti}{dw^2} = 2ti \cdot \mathfrak{p}w \\ &\frac{dti}{dx} = -\mathfrak{p}w; \quad \frac{d^2ti}{\partial x^2} = -\mathfrak{p}'w \cdot \frac{dx}{dw} \end{aligned}\right\} \tag{f}$$

Die Gleichungen (f) können auch aus (e) vermittels der Formeln hergeleitet werden, welche den Zusammenhang der Functionen pu und $\mathfrak{p}w$, $\sigma_2 w$ und $\varsigma_2 w$ etc. darstellen.

IV.

Unter einem Individuum der Curvenschar x, t hatten wir die Gesamtheit der Punkte verstanden, welche erhalten wird, wenn man u auf das Periodenquadrat beschränkt. Wir haben also, insofern nur reelle Werte in Betracht kommen, in den Gleichungen (b) (Abschn. III.) die Variable die Reihe $0 \ldots 2\omega$ durchlaufen zu lassen. Nun ist [18 (16)]:

$$\frac{\sigma}{\sigma_2}(2\omega - u) = \frac{\sigma}{\sigma_2} u; \quad \frac{\sigma'}{\sigma}(2\omega - u) = 2\eta - \frac{\sigma'}{\sigma} u$$

$$\frac{\sigma_2'}{\sigma_2}(2\omega - u) = 2\eta - \frac{\sigma_2'}{\sigma_2} u$$

Ersetzt man daher u durch $2\omega - u$, was wir, x als Functionszeichen benutzend, durch $x(2\omega - u)$ andeuten wollen, so kommt:

$$x(2\omega - u) = \frac{\sigma}{\sigma_2} u \left(C + 2\eta - \frac{\sigma'}{\sigma} u\right) = -\frac{\sigma}{\sigma_2} u \left(-C - 2\eta + \frac{\sigma'}{\sigma} u\right)$$

Setzt man noch

$$C = C_0 - \eta$$

so kommt:

$$x(2\omega - u;\ C_0) = -\frac{\sigma}{\sigma_2} u \left(-C_0 - \eta + \frac{\sigma'}{\sigma} u\right)$$

Digitized by Google

Dagegen ist

$$x(u;\ C_1) = \frac{\sigma}{\sigma_2} u \cdot \left(C_0 - \eta + \frac{\sigma'}{\sigma} u\right)$$

Demnach wird

Ebenso
$$\left.\begin{aligned} x(2\omega - u;\ C_0) &= -x(u;\ -C_0) \\ t(2\omega - u;\ C_0) &= -t(u;\ -C_0) \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Wir erhalten ein Individuum der Schar, wenn wir u nur von 0 bis ω gehen lassen, dafür aber gleichzeitig die Formeln für $x(u;\ C_0)$ und für $x(2\omega - u;\ C_0)$ benutzen neben den entsprechenden für t. Die vorstehenden Gleichungen zeigen nun, dass man dieselbe Curve erhält, wenn man in den Formeln für $x(u;\ \pm C_0)$, $t(u;\ \pm C_0)$ dem u die Werte $u \ldots \omega$ erteilt und für den Fall des unteren Vorzeichens die Zeichen von x und t zugleich umkehrt. Dies erleichtert die Berechnung.

Für $u = 0$ ist $x(0) = 0 \cdot (C_0 - \eta) + 1 = 1$ $\quad t(0) = \frac{1}{0}(C_0 - \eta) + 0 = \infty$ oder unbestimmt (für $C_0 = \eta$)

$u = \omega$ $\quad x(\omega) = C_0$ $\quad t(\omega) = C_0$

$u = 2\omega$ $\quad x(2\omega) = -1$ $\quad t(2\omega) = \infty$ oder unbestimmt.

Ferner ist für $u = 0$, $u = 2\omega$

$$\frac{dt}{dx} = = -pu = \infty$$

Demnach besitzen sämtliche Curven die Geraden

$$x = \pm 1$$

zu Asymptoten, woraus das früher Gesagte folgt, dass nämlich die bei Beschränkung von u auf das Periodenquadrat definirten Gebilde als in's Unendliche laufende Zweige der Totalgebilde zu betrachten sind, welche bei unbeschränkter Veränderlichkeit von u durch unsere Gleichungen dargestellt werden.

Die Curve $C_0 = 0$ geht, wie man sieht bei $u = \omega$ durch den Coordinatenanfang. Sie ist offenbar eine Grenzcurve der Schar. Ausserdem ist sie die einzige, welche den Ursprung als Curvenpunkt besitzt. Denn derjenige Wert von u, welcher den ersten Factor von x, $\frac{\sigma}{\sigma_2} u$, zu null macht, d. i. $u = 0$ oder $= 2\omega$ macht den zweiten

Digitized by Google

$= \infty$ und das Product $= \pm 1$. Der erste Factor von t wird für kein reelles u null. Daher muss gleichzeitig

$$C + \frac{\sigma'}{\sigma} u = 0 \quad \text{und} \quad C + \frac{\sigma_2'}{\sigma_2} u = C + \frac{\sigma'}{\sigma} u - \frac{\sigma_1 \sigma_3}{\sigma_2 \sigma} u = 0$$

sein, d. h.

$$\frac{\sigma_1 \sigma_3}{\sigma_2 \sigma} u = 0$$

also (u reell): $u = \omega$

Für diesen Wert ist aber

$$x = C + \eta = C_0, \quad t = C + \eta = C_0$$

womit die Behauptung erwiesen ist.

Alle Curvenpunkte, wofür u constant ist, haben dieselbe Richtung $\left(\text{wegen } \frac{dt}{dx} = -pu\right)$ und liegen auf einer Geraden L, deren Gleichung durch Elimination von C aus den Gleichungen (b)

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{\sigma}{\sigma_2} u \left(C + \frac{\sigma'}{\sigma} u\right) \\ t &= \frac{\sigma_2}{\sigma} u \left(C + \frac{\sigma_2'}{\sigma_2} u\right) \end{aligned}\right\} \qquad (b)$$

gewonnen wird:

$$x \cdot \frac{\sigma_2}{\sigma} - t \cdot \frac{\sigma}{\sigma_2} = \frac{\sigma_1 \sigma_3}{\sigma_2 \sigma}$$

oder

$$x \cdot pu - t = \sqrt{p^2 u - 1} \qquad (2)$$

Diese Geraden L umhüllen die Curve:

$$x^2 - t^2 = 1 \qquad (3)$$

also eine gleichseitige Hyperbel.

Für die Verbindungsgerade L der Punkte gleicher Neigung ist gemäss der Gleichung (2):

$$\frac{dt}{dx} = pu$$

Für diese Punkte selbst als Curvenpunkte ist

$$\frac{dt}{dx} = -pu$$

d. h.: der Neigungswinkel der Geraden L gegen die x-Achse ist halb so gross wie der Winkel, unter dem sie die Curven schneidet.

Für $u = \omega$ ist $pu = 1$, die Gerade L_ω ist Asymptote der Hyperbel und hat die Gleichung

$$x - t = 0 \qquad (2')$$

Digitized by Google

Sie schneidet sämtliche Curven senkrecht; die Schnittpunkte sind Inflexionspunkte, denn die zweite Ableitung

$$\frac{d^2t}{dx^2} = -p'u \cdot \frac{du}{dx}$$

wird $= 0$ und wechselt das Zeichen, indem

$$\frac{d^3t}{dx^3} = -\left[2x \cdot \frac{p'u}{pu} + (6p^2u - 2) \cdot \frac{dx}{du}\right] \cdot \left(\frac{du}{dx}\right)^3$$

für $u = \omega$ den negativen Wert

$$-4 \cdot \left(\frac{du}{dx}\right)^3$$

annimmt. Daraus folgt, dass die Curven (b) vor *) dem Wendepunkt ihre Convexität nach unten (der negativen t-Achse zu), hinter demselben nach oben kehren.

Es kann auch

$$\frac{d^2t}{dx^2} = \infty$$

werden, und zwar ist dies der Fall für

$$u = 0 \quad \text{und} \quad \frac{dx}{du} = 0$$

Der erste Fall ist bereits früher besprochen. Die Gleichung

$$\frac{dx}{du} = 0$$

erfordert, dass

$$C + \frac{\sigma'}{\sigma} = \frac{\sigma_2}{\sigma} \cdot \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1\sigma_3}$$

sei (s. III. (e)), woraus folgt, dass in diesem Falle

$$x^2 = \frac{p^2u}{p^2u - 1}$$

$$t^2 = \frac{1}{p^2u - 1}$$

sei. Der geometrische Ort der Punkte, für welche

$$\frac{dx}{du} = 0$$

ist also wieder die Hyperbel

$$x^2 - t^2 = 1$$

Wir behaupten, dass diese Punkte Rückkehrpunkte unserer Curvenschar sind.

---

*) d. h. für $u < \omega$, also vom Wendepunkte aus in Richtung der positiven x-Achse.

Digitized by Google

Wir wollen den Wert von u, welcher für ein bestimmtes C die Ableitung

$$\frac{dx}{du} = 0$$

macht, u_0 nennen und x und t nach Potenzen von $u-u_0$ entwickeln:

$$x = x_0 + (u-u_0) \cdot \left(\frac{dx}{du}\right)_0 + \frac{(u-u_0)^2}{2} \cdot \left(\frac{d^2x}{du^2}\right)_0 + \ldots$$

$$t = t_0 + (u-u_0) \cdot \left(\frac{dt}{du}\right)_0 + \frac{(u-u_0)^3}{2} \cdot \left(\frac{d^2t}{du^2}\right)_0 + \ldots$$

Nun ist gemäss Voraussetzung

$$\left(\frac{dx}{du}\right)_0 = 0; \quad \text{also auch} \quad \left(\frac{dt}{du}\right)_0 = pu_0 \cdot \left(\frac{dx}{du}\right)_0 = 0$$

Da u_0 mit C sich ändert, so ist im allgemeinen pu_0 und $p'u_0$ weder 0 noch ∞. Die Gleichung $pu_0 = 0$ besitzt überhaupt keine reelle Wurzel; den Fall $u_0 = 0$, wofür pu_0 und $p'u_0$ unendlich werden, betrachten wir gesondert.

Es ist weiter

$$\left(\frac{d^2x}{du^2}\right)_0 = -\left(2x \cdot \frac{1}{pu}\right)_0 = -\frac{2x_0}{pu_0}$$

weder 0 noch ∞; denn x_0 kann wegen $x^2 - t^2 = 1$ bei reellem t nicht verschwinden. Demnach gilt die Entwicklung:

$$x = x_0 + \alpha \cdot (u-u_0)^2 + \beta \cdot (u-u_0)^3 + \ldots$$

$$\alpha = -\frac{x_0}{pu_0} \gtrless 0$$

Ebenso $$t = t_0 + \alpha'(u-u_0)^2 + \beta'(u-u_0)^3 + \ldots$$

$$\alpha' = t_0 \cdot pu_0 \gtrless 0$$

da auch t_0 (ausser für $u_0 = 0$) nicht verschwindet.

Es folgt

$$\left(\frac{x-x_0}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}} = z = (u-u_0)\left[1 + \frac{\beta}{\alpha}(u-u_0) + \ldots\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= (u-u_0)[1 + (u-u_0) \cdot \mathfrak{P}(u-u_0)]$$

Für kleine z giebt es daher eine Entwicklung von $u-u_0$:

$$u - u_0 = z + \delta z^2 + \ldots$$

Eingesetzt wird

$$t = t_0 + \alpha'[z^2 + 2\delta z^3 + \ldots] + \beta'[z^3 + \ldots] + \ldots$$

d. h.

$$t - t_0 = a \cdot (x-x_0) + b \cdot (x-x_0)^{\frac{3}{2}} + c(x-x_0)^2 + \ldots$$

Wäre jetzt $b = 0$, so könnte nicht, wie vorausgesetzt war,

Digitized by Google

$$\left(\frac{d^2 t}{dx^2}\right)_0 = \infty$$

sein, sondern hätte den endlichen Wert $2c$. Daher ist $b \gtrless 0$ und demnach besitzt die Curve im Punkte u_0 tatsächlich einen Rückkehrpunkt, eine sogen. Spitze erster Art. Sie besitzt in dessen Nähe den Charakter der Curve

$$\frac{t}{t_0} - 1 = p^2 u_0 \left(1 - \frac{x}{x_0}\right) + \frac{2}{3} p^{\frac{3}{2}} u_0 p' u_0 \left(1 - \frac{x}{x_0}\right)^{\frac{3}{2}} \tag{4}$$

wie die Ausrechnung zeigt.

Für $t = 0$ wird die Entwicklung illusorisch. Das ist der oben ausgeschlossene Fall $u_0 = 0$. Denn zu $t_0 = 0$ gehört wegen der Hyperbelgleichung $x_0 = 1$. Dies Wertepaar erhält man aber, wenn $u = 0$, $C = 0$ gesetzt wird. Der Punkt gehört also der Curve

$$x = \frac{\sigma}{\sigma_2} u \cdot \frac{\sigma'}{\sigma} u, \quad t = \frac{\sigma_2}{\sigma} u \cdot \frac{\sigma_2'}{\sigma_2} u$$

an. Man leitet daraus mit Hilfe der σ-Reihen die Enkwicklung her:

$$t = \sqrt{\frac{2}{3}} (1-x)^{\frac{1}{2}} + (1-x) \cdot \mathfrak{P}(1-x)^{\frac{1}{2}}$$

Demnach besitzt die Curve $C = 0$ im Punkte $u = 0$ den Charakter einer Parabel

$$t^2 = \tfrac{2}{3}(1-x) \tag{5}$$

Die Richtung der Tangente im Rückkehrpunkt bestimmt sich aus der Differentialgleichung, welche aufgelöst lautet:

$$\frac{dt}{dx} = -\frac{1}{x^2 - 1} (x \cdot t \pm \sqrt{t^2 - x^2 + 1})$$

und der Gleichung

$$x^2 - t^2 - 1 = 0$$

welcher der Rückkehrpunkt genügt, also

$$\frac{dt}{dx} = -\frac{x}{t}$$

Demnach steht der vom Ursprung nach dem Rückkehrpunkt gezogene Radiusvector senkrecht auf der Tangente in demselben.

Ein Rückkehrpunkt existirt nur dann, wenn

$$| C_0 | > \eta$$

Denn die Gleichung

$$\frac{dx}{du} = 0$$

verlangt, dass

$$C + \frac{\sigma'}{\sigma} = \frac{\sigma_2^4}{\sigma_4} \cdot \frac{\sigma^3}{\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3}$$

also

Digitized by Google

$$C_0 = \eta - \frac{\sigma'}{\sigma} - \frac{p^2 u}{2p'u}$$

sei. Differentiirt man diese Gleichung nach u, so kommt

$$\frac{dC_0}{du} = \frac{3p^3u - pu}{p^2u - 1}$$

Da pu für $u = 0 \ldots \omega$ beständig $\geqq 1$ ist, so ist $\frac{dC_0}{du}$ positiv, C_0 wächst also beständig, wenn u von 0 bis ω geht, und zwar von η bis ∞. Demnach ist die Bedingung

$$\frac{dx}{du} = 0$$

nur dann durch ein reelles u zu erfüllen, wenn $| C_0 | > \eta$ ist. Da für $| C_0 | < \eta$ $\frac{dx}{du}$ nicht 0 wird, also sein Zeichen auch nicht wechseln kann, so nimmt für solche C_0 x beständig ab oder zu, wenn u von 0 bis ω geht. Es ist für

$$u = 0 \qquad x = 1$$
$$u = \omega \qquad x = C_0$$

Da $\eta < 1$, so nimmt also x von 1 bis C_0 ab. Geht u von ω bis 2ω, so nimmt x von C_0 bis -1 ab, wie sich aus der Darstellung im Beginn dieses Abschnitts ergiebt. Demnach liegen die Curven $| C_0 | < \eta$ zwischen den Geraden $x = \pm 1$, während die andern darüber hinausgehen und im Rückkehrpunkt ihre grösste Entfernung von der t-Achse aufweisen.

V.

Die Curven x, τ — wo $\tau = t \cdot i$ —, welche durch die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{\varsigma}{\varsigma_2} w \left(\mathfrak{C} + \frac{\varsigma'}{\varsigma} w \right) \\ \tau &= \frac{\varsigma_2}{\varsigma} w \left(\mathfrak{C} + \frac{\varsigma_2'}{\varsigma_2} w \right) \end{aligned}\right\} \qquad \text{(d)}$$

dargestellt werden, besitzen die pag. 201 angegebene Eigenschaft. Ihr Verhalten kann aus dem der Curven x, t hergeleitet werden, indem man die Gleichungen

$$x = x; \quad \tau = ti; \quad w = \frac{u}{\sqrt{i}}; \quad pw = i \cdot pu$$

$$\varsigma w = \frac{1}{\sqrt{i}} \sigma u; \quad \varsigma_2 w = \sigma_2 u$$

beachtet.

Benutzt man wieder x und τ als Functionszeichen und setzt

Digitized by Google

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{C}_0 - \tfrac{1}{2}H_2$$

so ist

$$x(w;\ \mathfrak{C}_0) = \frac{\varsigma}{\varsigma_2}w \cdot \left(\mathfrak{C}_0 - \tfrac{1}{2}H_2 + \frac{\varsigma'}{\varsigma}w\right)$$

$$\tau(w;\ \mathfrak{C}_0) = \frac{\varsigma_2}{\varsigma}w \cdot \left(\mathfrak{C}_0 - \tfrac{1}{2}H_2 + \frac{\varsigma_2'}{\varsigma_2}w\right)$$

Andererseits:

$$x(\Omega_2 - w;\ \mathfrak{C}_0) = -\frac{\varsigma_2}{\varsigma}w \cdot \left(-\mathfrak{C}_0 - \tfrac{1}{2}H_2 + \frac{\varsigma_2'}{\varsigma_2}w\right)$$

$$\tau(\Omega_2 - w;\ \mathfrak{C}_0) = -\frac{\varsigma}{\varsigma_2}w \cdot \left(-\mathfrak{C}_0 - \tfrac{1}{2}H_2 + \frac{\varsigma'}{\varsigma}w\right)$$

Demnach hat man:

$$\left.\begin{aligned} x(\Omega_2 - w;\ \mathfrak{C}_0) &= -\tau(w;\ -\mathfrak{C}_0) \\ \tau(\Omega_2 - w;\ \mathfrak{C}_0) &= -x(w;\ -\mathfrak{C}_0) \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Die Gesamtheit der Werte von w, nämlich

$$w = 0 \ldots \Omega_2$$

ist für beide Seiten der Gleichungen (1) dieselbe.

Daher gehen die Curven $\mathfrak{C}_0$ und $-\mathfrak{C}_0$ durch Drehung der Ebene um eine den Achsenwinkel (zwischen $+x$ und $-\tau$) halbirende Gerade in einander über. Die Curve $\mathfrak{C}_0 = 0$ geht in sich selbst über, sie bildet eine ausgezeichnete Curve der Schar.

Die Geraden $x = 1$, $\tau = -1$ sind Asymptoten für jede Curve Denn es ist

$$\frac{d\tau}{dx} = -\mathfrak{p}w = \infty \text{ für } w = 0;\ = 0 \text{ für } w = \Omega_2$$
$$x = 1 \quad ,, \quad ,, \quad ;\ = \infty \quad ,, \quad ,,$$
$$\tau = \infty \quad ,, \quad ,, \quad ;\ = -1 \quad ,,$$

Für $\mathfrak{C}_0 = \pm\frac{1}{2}H_2$ und $w = 0$ resp. $= \Omega_2$ wird $x = 1$ und τ unbestimmt. Die Geraden $x = 1$, $\tau = -1$ können also als Curven der Schar (b) angesehen werden und besitzen auch in der Tat die pag. 201 angegebene Eigenschaft. Aehnliches gilt von der Geraden $x = \pm 1$ für den vorigen Abschnitt.

Alle Punkte, in denen die Tangente dieselbe Richtung hat, für welche also

$$\frac{d\tau}{dx} = -\mathfrak{p}w$$

constant ist, liegen wieder auf einer Geraden L, deren Gleichung lautet:

$$x \cdot \mathfrak{p}w - \tau = \sqrt{\mathfrak{p}^2 w + 1} \qquad (2)$$

Alle Geraden L umhüllen den Kreis

$$x^2 + \tau^2 = 1 \qquad (3)$$

Digitized by Google

der Winkel, unter dem die Curven von einer Geraden L geschnitten werden, ist wieder doppelt so gross, als der Neigungswinkel von L gegen die x-Achse.

Keine der Curven geht durch den Nullpunkt. Denn $x = 0$ erfordert, dass

$$\mathfrak{C} + \frac{\varsigma'}{\varsigma} w = 0$$

sei, da der Verschwindungswert $w = 0$ des ersten Factors $\frac{\varsigma}{\varsigma_2} w$ den zweiten $= \infty$ und das Product $= 1$ macht. Soll auch noch $\tau = 0$ sein, so muss, da die Nullstelle des ersten Factors von $\tau(w - \Omega_2)$ das Product $= -1$ macht, auch noch

$$\mathfrak{C} + \frac{\varsigma_2'}{\varsigma_2} w = \mathfrak{C} + \frac{\varsigma'}{\varsigma} w - \frac{\varsigma_1 \varsigma_3}{\varsigma_2 \varsigma} w = 0$$

sein, also

$$\frac{\varsigma_1 \varsigma_3}{\varsigma_2 \varsigma} w = 0$$

was für kein reelles w möglich.

Inflexionspunkte besitzen die Curven (d) im Endlichen nicht. Dieselben liegen, entsprechend den Wendepunkten der Curven (b), auf den Asymptoten des Kreises (3), sind also unendlich fern und imaginär.

Dagegen besitzt die Schar Rückkehrpunkte, welche zusammen wieder den Kreis (3) constituiren. Die Richtung der Tangente im Rückkehrpunkt bestimmt sich aus der für diesen geltenden Gleichung

$$\frac{d\tau}{dx} = \frac{x}{\tau}$$

verbindet man also den Rückkehrpunkt mit dem Punkt der x-Achse, dessen Abscisse doppelt so gross als die des Rückkehrpunktes ist, so steht diese Linie auf der Tangente normal. Die Entwicklung von τ nach x in der Nähe des Rückkehrpunktes ergiebt sich aus Gl. (4) des vorigen Abschnitts:

$$\frac{\tau}{\tau_0} - 1 = +\mathfrak{p}^2 w_0 \cdot \left(-1 + \frac{x}{x_0}\right) - \frac{2}{3} \mathfrak{p}^{\frac{3}{2}} w_0 \mathfrak{p}' w_0 \left(-1 + \frac{x}{x_0}\right)^{\frac{3}{2}} + \ldots$$

Für den Punkt $x_0 = -\tau_0 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ der ausgezeichneten Curve $\mathfrak{C}_0 = 0$ lautet die Reihe:

$$\tau = -x - \frac{4}{3}\left(-1 + x \cdot \sqrt{2}\right)^{\frac{3}{2}} + \ldots$$

Auf ganz analoge Weise wie vorher beweist man, dass nur diejenigen Curven eine Spitze besitzen, für welche

$$|\mathfrak{C}_0| < H_2 \quad \text{ist.}$$

Bildet man den Ausdruck für den Krümmungsradius ϱ eines Punktes (b) resp. (d) und setzt

$$\frac{d\varrho}{du} = 0 \quad \text{resp.} \quad \frac{d\varrho}{dw} = 0$$

so liefert diese Bedingung die Punkte stärkster Krümmung. Die Bedingungsgleichung gestattet den die Integrationsconstante C resp. $\mathfrak{C}$ enthaltenden Factor als Function von pu resp. $\mathfrak{p}w$ darzustellen; setzt man den gewonnenen Ausdruck in die Integrationsgleichungen (b) resp. (d) ein, so erhält man die Coordinaten der Punkte stärkster Krümmung dargestellt als rationale Functionen von pu und $\sqrt{p^2u-1}$ resp. von $\mathfrak{p}w$ und $\sqrt{\mathfrak{p}^2w+1}$. Substituirt man also

$$pu = \frac{\lambda^2+1}{\lambda^2-1} \quad \text{resp.} \quad \mathfrak{p}w = \frac{\mu^2-1}{2\mu}$$

so werden die Variabeln als rationale Functionen von λ resp. μ dargestellt. Man hat daher das Resultat: die Punkte stärkster Krümmung liegen auf je einer Curve vom Geschlecht 0. Dieselbe ist für die Schar (b) von der 12., für die (d) von der 8. Ordnung.

Der entsprechende Fall wird für die noch zu discutirenden Curven im folgenden Abschnitt näher ausgeführt werden, hier genüge das Gesagte.

VI.

Die Curven, deren Bogen der Tangente des Leitstrahlwinkels proportional ist, sind dargestellt durch die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{\sigma}{\sigma_2} u \cdot \left(C + \frac{\sigma'}{\sigma} u\right) \\ y = t \cdot x &= \left(C + \frac{\sigma'}{\sigma} u\right) \cdot \left(C + \frac{\sigma'_2}{\sigma_2} u\right) \end{aligned}\right\} \quad (g)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= -\frac{\sigma_1 \sigma_3}{\sigma^2} u = -\sqrt{p^2u-1} \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= 2\frac{\sigma_2^3}{\sigma^3} u : \frac{dx}{du} \\ \frac{dx}{du} &= -\frac{\sigma_2}{\sigma} u + \left(C + \frac{\sigma'}{\sigma} u\right) \cdot \frac{\sigma_1 \sigma_3}{\sigma_2^2} u \end{aligned}\right\} \quad (b)$$

Wir erhalten eine Curve der Schar, wenn u die Werte $0 \ldots 2\omega$ durchläuft, oder auch, entsprechend IV. (1), wenn wir u von 0 bis ω gehen lassen und gleichzeitig der Constanten C_0 ausser ihrem Wert C_0 auch den entgegengesetzten $-C_0$ geben, für den letzteren Fall aber das Zeichen von x umkehren; dabei ist

$$C_0 = C + \eta$$

Digitized by Google

Jede Curve geht durch den Coordinatenanfang, denn der gemeinsame Factor

$$C + \frac{\sigma'}{\sigma} u = C_0 - \eta + \frac{\sigma'}{\sigma} u$$

verschwindet einmal für ein beliebiges C_0, resp. für dessen entgegengesetzten Wert $-C_0$, da für

$$u = 0 \ . \ . \ . \ \omega$$

$$\frac{\sigma'}{\sigma} u = \infty \ . \ . \ . \ \eta$$

$$-\eta + \frac{\sigma'}{\sigma} u = \infty \ . \ . \ . \ 0$$

und zwar beständig abnehmend, da

$$\frac{d}{du} \frac{\sigma'}{\sigma} u = -pu$$

beständig < 0 ist. Daher verschwindet $C + \frac{\sigma'}{\sigma} u$ nur für ein u, und hieraus folgt, dass jede Curve auch nur einmal durch den Coordinatenanfang geht.

Da $\frac{dy}{dx}$ von C nicht abhängt, so hat wieder die Tangente in allen Punkten, welche demselben u entsprechen, dieselbe Richtung. Der geometrische Ort dieser Punkte ergiebt sich durch Elimination von C aus den Gleichungen (g):

$$\left.\begin{aligned} y &= x^2 \cdot \frac{\sigma_2^2}{\sigma^2} - x \cdot \frac{\sigma_1 \sigma_3}{\sigma^2} \\ &= x^2 \cdot pu - x \cdot \sqrt{p^2 u - 1} \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

ist also eine Parabel. Man kann diesem Resultat folgende Fassung geben: Bewegt sich eine Gerade parallel zu sich selbst, so ist sie in jeder Lage Tangente an eine Curve der Schar; sämtliche Berührungspunkte liegen auf einer Parabel. Die Achsen derselben sind den Coordinatenachsen parallel. Setzt man

$$\frac{1}{pu} = \mu = \cos\alpha$$

so ist α der Winkel, den die bewegliche Gerade mit der x-Achse bildet. Mit dieser Bezeichnung lautet die Gleichung (1):

$$x^2 - x \sin\alpha - y \cos\alpha = 0 \qquad (1')$$

Der Scheitel hat die Coordinaten $\frac{1}{2}\sin\alpha$, $-\frac{1}{4}\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}$, der Brennpunkt $\frac{1}{2}\sin\alpha$, $-\frac{\cos 2\alpha}{4\cos\alpha}$. Sämtliche Parabeln gehen durch den Coordi-

Digitized by Google

natenanfang und schneiden die x-Achse zum zweiten Mal in der Entfernung $\sin\alpha$.

Die Curve der Parabelscheitel sowie die der Brennpunkte ist vom Geschlecht 0; beide Curven liegen zwischen den Geraden $x = \pm\frac{1}{2}$, die sie als Asymptoten besitzen.

Setzt man $\operatorname{tg}\alpha = 0$, also $pu = 1$ $(u = \omega)$, so erhält man die Curve der höchsten Punkte der Schar

$$x^2 = y \qquad (1'')$$

Sie entspricht der einen Hyperbelasymptote der Curven (x, t), $x - t = 0$ (pag. 225). Die Inflexionspunkte der letzteren Schar verwandeln sich also in Culminationspunkte jener. Der Culminationspunkt besitzt die Coordinaten

$$x = C_0, \quad y = C_0^2$$

Bezeichnet φ den Winkel eines Leitstrahls gegen die Abscissenachse, so ist also für das Curvenmaximum

$$\operatorname{tg}\varphi = C_0$$

Ebenso wie die Curven (x, t), bleiben auch die (x, y) zwischen den Geraden $x = \pm 1$, wenn $|C_0| < \eta$, und gehen darüber hinaus, um sich ihnen von ihrem Rückkehrpunkt ab wieder asymptotisch zu nähern, wenn $|C_0| > \eta$. Dies geht direct aus den Betrachtungen des Abschnitts IV. hervor. Da bei den Curven $|C_0| < \eta$ die 2te Ableitung $\frac{d^2y}{dx^2}$ stets dasselbe Zeichen bewahrt, sind dieselben beständig nach derselben Seite hin convex.

Für den Rückkehrpunkt ist

$$x = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1\sigma_3} = \frac{pu}{\sqrt{p^2u - 1}}$$

$$y = \frac{\sigma_2^2}{\sigma^2}\cdot\frac{\sigma_2^4}{\sigma_1^2\sigma_3^2} - \frac{\sigma_2^2}{\sigma^2} = \frac{pu}{p^2u - 1}$$

Hieraus folgt zunächst

$$\frac{y}{x} = \sqrt{p^2u - 1} = -\operatorname{tg}\alpha$$

d h.: der Leitstrahl des Rückkehrpunktes steht auf der zugehörigen Tangente senkrecht, wie auch aus der geometrischen Eigenschaft der Curven erhellt, wenn man sich dieselben jener Eigenschaft entsprechend aus unendlich kleinen Bogen construirt denkt. Setzt man

$$pu = \frac{\lambda^2 + 1}{\lambda^2 - 1}$$

so ergiebt sich die Gleichung der Rückkehrpunktcurve in der Form:

$$x = \frac{\lambda^2 + 1}{2\lambda}; \qquad y = \frac{\lambda^4 - 1}{4\lambda^2} \qquad (2)$$

Digitized by Google

Sie ist von der 4. Ordnung und vom Geschlecht 0. Durch Elimination folgt:

$$y^2 = x^4 - x^2 \tag{2'}$$

Die Entwicklung von y nach gebrochenen Potenzen von x ergiebt sich aus der entsprechenden von t; für die Grenzcurve $C_0 = \eta$ speciell erhält man in der Nähe ihres Berührungspunktes mit (2) die Reihe:

$$y = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot (1-x)^{\frac{1}{2}} - (1-x)^2 \cdot \mathfrak{P}(1-x)^{\frac{1}{2}}$$

Sie schmiegt sich also in diesem Punkte ebenfalls an die Parabel $y^2 = \frac{2}{3} \cdot (1-x)$ an. (Vergl. IV. (5)).

Die Gleichung für den Krümmungsradius ϱ lautet in unserm Fall

$$\varrho = \frac{ds}{d\alpha} = \frac{dt}{d\alpha}, \quad \alpha = \operatorname{arc\,tg} \frac{dy}{dx}$$

folglich

$$\varrho = -\tfrac{1}{2} \frac{\sigma_2^3}{\sigma^3} \cdot \frac{dx}{du} \tag{3}$$

Die Gleichung der Evolute ist hiernach

$$\left.\begin{aligned} \xi &= x - \varrho \cdot \frac{dy}{ds}; & \eta &= y + \varrho \frac{dx}{ds} \\ &= x + \tfrac{1}{2} \frac{\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3}{\sigma^3} \cdot \frac{dx}{du}; & &= y + \tfrac{1}{2} \frac{\sigma_2}{\sigma} \cdot \frac{dx}{du} \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Die Curve der zu den Culminationspunkten gehörigen Krümmungsmittelpunkte wird erhalten, wenn man $\operatorname{tg}\alpha = 0$, d. h. $u = 0$ setzt, also:

$$\xi = C_0, \quad \eta = C_0^2 - \tfrac{1}{2}$$
$$\xi^2 = \eta + \tfrac{1}{2} \tag{5}$$

Der Krümmungsradius des höchsten Punktes jeder Curve hat also den constanten Wert $\varrho = \frac{1}{2}$.

Für den Coordinatenanfang ist

$$C + \frac{\sigma'}{\sigma} u = 0$$

Ist $u = u_0$ der diese Gleichung befriedigende reelle Wert von u, so ist also

$$\frac{dx}{du} = -\frac{\sigma_2}{\sigma} u_0$$

$$\xi = -\tfrac{1}{2} \frac{\sigma_2^2}{\sigma^2} \cdot \frac{\sigma_1 \sigma_3}{\sigma^2} = -\tfrac{1}{2} p u \sqrt{p^2 u - 1}$$

$$\eta = -\tfrac{1}{2} \frac{\sigma_2^2}{\sigma^2} = -\tfrac{1}{2} p u$$

$$\xi^2 = 4\eta^4 - \eta^2 \tag{6}$$

Digitized by Google

Diese Gleichung geht aus (2′) hervor, indem man $x = 2\eta$, $y = 2\xi$ setzt. Man erhält also die Curve der Krümmungsmittelpunkte im Coordinatenanfang, wenn man die Curve der Rückkehrpunkte im Massstab 2 : 1 verkleinert und um 90° um den Ursprung dreht.

Die Bedingung für ein Krümmungsmaximum lautet

$$\frac{d\varrho}{du} = 0$$

d. h.

$$\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\sigma_2}{\sigma}\right)^3 \cdot \left[3\frac{\sigma_1\sigma_3}{\sigma^2} \cdot \frac{dx}{du} - \frac{\sigma_2}{\sigma} \cdot \frac{d^2x}{du^2}\right] = 0$$

Da $\frac{\sigma_2}{\sigma}$ für kein reelles u verschwindet, muss die Klammer $= 0$ werden; alsdann folgt durch Ausrechnung:

$$C + \frac{\sigma'}{\sigma} u = 3\frac{\sigma_1\sigma_2\sigma_3}{\sigma^3} u \cdot \frac{pu}{3p^2u - 1}$$

$$C = -\frac{3}{2}p'u \cdot \frac{pu}{3p^2u - 1} - \frac{\sigma'}{\sigma} u \qquad (7)$$

Es fragt sich, ob diese Bedingung für ein beliebiges C erfüllbar ist. Differentiirt man, so kommt

$$\frac{dC}{du} = \frac{-4pu}{3p^2u - 1}$$

Dieser Ausdruck ist beständig negativ, die rechte Seite von (7) nimmt also beständig ab für $u = 0 \ldots \omega$. Für $u = 0$ ist die rechte Seite von (7) $= 0$, für $u = \omega$ ist sie $= -\eta$. Die Bedingung (7) ist also nur erfüllbar, wenn $|C_0| = |C - \eta| \leqq \eta$ ist; d. h. nur die Curven, für welche $|C_0| \leqq \eta$, besitzen ein Krümmungsmaximum. Als geometrischen Ort der Punkte stärkster Krümmung erhält man, in dem man (7) mit den Formeln (g) combinirt:

$$x = 3\frac{\sigma_1\sigma_3}{\sigma^2} \cdot \frac{p}{3p^2 - 1} = 3\sqrt{p^2u - 1} \cdot \frac{pu}{3p^2u - 1}$$

$$y = \frac{3pu(p^2u - 1)}{(3p^2u - 1)^2}$$

Hieraus folgt $\frac{x^2}{3y} = pu$; setzt man dies in den Ausdruck y ein, so wird

$$x^6 - x^6 - 6x^4y^2 - 9x^2y^2 + 9y^4 = 0 \qquad (8)$$

Die Curve ist vom Geschlecht 0, denn setzt man

$$pu = \frac{\lambda^2 + 1}{\lambda^2 - 1}$$

so kommt

Digitized by Google

$$x = \frac{3\lambda \,.\, (\lambda^2+1)}{\lambda^4+4\lambda^2+1}; \quad y = \frac{3\lambda^2 \,.\, (\lambda^4-1)}{(\lambda^4+4\lambda^2+1)^2} \tag{8'}$$

Für $\lambda = \infty, 0$ wird $x = 0$, $y = 0$, $x^2 = \pm 3y$; für $\lambda = \pm 1$ wird $x = \pm 1$, $y = 0$, und indem man $\pm\lambda = 1 \pm \mu$ setzt, findet man, dass in der Nähe dieser Punkte die Annäherung gilt: $y^2 = \frac{8}{3}(1 \mp x)$. Die Curve der zugehörigen Krümmungsmittelpunkte ergiebt sich aus (4) und (7):

$$\xi = 2\,\frac{\lambda \,.\, (\lambda^2+1)}{\lambda^4+4\lambda^2+1)}; \quad \eta = -\,\tfrac{1}{4}\,\frac{(\lambda^2+1)(\lambda^2-1)^3}{(\lambda^4+4\lambda^2+1)^2} \tag{9}$$

Für $\lambda = \begin{cases} 0 \\ \infty \end{cases}$ ist $\xi = 0$, $\eta = \pm\frac{1}{2}$, $\xi^2 = \frac{1}{3}(\frac{1}{2} \mp \eta)$;

für $\lambda = \pm 1$ ist $\xi = \pm\frac{8}{3}$, $\eta = 0$, $\eta^2 = 36 \,.\, (\frac{8}{3} \mp \xi)^3$.

Die Curve (9) ist zugleich der geometrische Ort der Rückkehrpunkte unserer Evolutenschar. Dies ergiebt sich in gleicher Weise, wie früher, indem man ξ, η (Gl. (4)) nach Potenzen von $u - u_0$ entwickelt, wo u_0 der Gleichung $\frac{d\varrho}{du} = 0$ genügt, und hierauf η durch ξ ausdrückt. Genügen ξ_0, η_0 den Gleichungen (9), so ergiebt sich eine Entwicklung

$$\eta - \eta_0 = \xi - \xi_0 + a \,.\, (\xi - \xi_0)^{\frac{3}{2}} + \ldots, \text{ wo } a \gtrless 0$$

Die Gleichung der Evolvente ergiebt sich aus

$$X = x - s \,.\, \frac{dx}{ds}; \quad Y = y - s \,.\, \frac{dy}{ds}$$

Hierin bedeutet s die Bogenlänge der ursprünglichen Curve (x, y), gezählt von einem beliebigen Punkte ab, nämlich demjenigen, bei welchem die Abwickelung eines Fadens zu beginnen hat, dessen Endpunkt die betreffende Evolvente beschreibt. Man hat daher

$$s = t + \gamma$$

wo γ eine willkürliche Constante; somit

$$\left.\begin{aligned} X &= x - (t+\gamma) \,.\, \frac{dx}{dt} = 2\left(C + \frac{\sigma'}{\sigma}\right) \,.\, \frac{\sigma}{\sigma_2} - \frac{\sigma_1\sigma_3}{\sigma_2^2} + \gamma \,.\, \frac{\sigma^2}{\sigma_2^2} \\ Y &= y - (t+\gamma) \,.\, \frac{dy}{dt} = \left(C + \frac{\sigma_2'}{\sigma_2}\right)^2 - \gamma \,.\, \frac{\sigma_1\sigma_3}{\sigma_2^2} \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Es ist

$$\frac{dY}{dX} = -\frac{dx}{dy} = \frac{\sigma^2}{\sigma_1\sigma_3} = \sqrt{\frac{1}{p^2u - 1}}$$

und daher das Bogenelement der Evolvente:

$$dS = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1\sigma_3} \,.\, dX$$

Nun ist

Digitized by Google

$$\frac{dX}{du} = 2 \cdot (t+\gamma) \cdot \frac{\sigma_1 \sigma \sigma_3}{\sigma_2^3}$$

also

$$dS = 2(t+\gamma) \cdot \frac{\sigma}{\sigma_2} \cdot du$$

$$= 2 \cdot \left(C + \frac{\sigma_2'}{\sigma_2} u + \gamma \cdot \frac{\sigma}{\sigma_2} u \right) \cdot du$$

$$S = S_0 + 2Cu + 2 \log \sigma_2 u + 2\gamma \cdot \int \frac{\sigma}{\sigma_2} du$$

Für das Integral findet man:

$$\int \frac{\sigma}{\sigma_2} u \, du = \int \left(\frac{\sigma \sigma_2}{\sigma_3^2} u : \frac{\sigma_2^2}{\sigma_3^2} u \right) du = \int - \frac{\frac{\sigma \sigma_2}{\sigma_1^2} u}{\frac{1}{2} \cdot \frac{\sigma_1^2 u + \sigma_3^2 u}{\sigma_3^2 u}} du$$

also

$$\int \frac{\sigma}{\sigma_2} u \, du = \int \frac{-\frac{1}{2} \cdot d\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_3} u\right)}{\frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{\sigma_1^2}{\sigma_3^2} u\right)} = - \operatorname{arc\,tg} \frac{\sigma_1}{\sigma_3} u$$

$$S = S_0 + 2Cu + 2 \log \sigma_2 u - 2\gamma \cdot \operatorname{arc\,tg} \frac{\sigma_1}{\sigma_3} u \qquad (11)$$

γ ist bestimmt durch den Anfangspunkt der Abwicklung, S_0 durch den Punkt, von dem aus der Evolventenbogen gemessen wird.

Ersetzen wir in Gleichung (11) die Grössen S_0, C und γ durch S_0', C' und γ', während u beibehalten wird, so folgt durch Subtraction:

$$S - S' = S_0 - S_0' + 2 \cdot (C - C') \cdot u - 2(\gamma - \gamma') \cdot \operatorname{arc\,tg} \frac{\sigma_1}{\sigma_3} u$$

Wählt man jetzt $S_0 = S_0'$, $\gamma = \gamma'$, so wird

$$S - S' = 2 \cdot (C - C') \cdot u, \quad \text{also}$$

$$u = \frac{1}{2} \cdot \frac{S - S'}{C - C'} \qquad (12)$$

Der Parameter u, mit dessen Hilfe wir die Curven dargestellt haben, hat also geometrisch die Bedeutung einer der Differenz zweier Evolventenbogen proportionalen Grösse. Um eine möglichst einfache Darstellung von u zu erhalten, wollen wir folgendermassen specialisiren:

$$\gamma = 0; \quad S_0 = 0; \quad C = 0; \quad C' = -\eta$$

d. h.

$$C_0 = \eta; \quad C_0' = 0$$

Die Abscissenachse wird von jeder Curve (x, y) in einem festen und einem beweglichen Schnittpunkt getroffen. Jener ist der Coordi-

Digitized by Google

natenanfang, für diesen ist stets $\frac{y}{x} = 0$, d. h. $\iota = 0$ oder $\varepsilon = \gamma$. Indem wir also $\gamma = 0$ wählen, bestimmen wir, dass die Abwickelung bei dem beweglichen Schnitt zu beginnen hat. Nun ist in Folge unserer Festsetzung

$$S = 2\log\sigma_2 u; \quad S' = -2\eta u + 2\log\sigma_2 u$$

somit für

$$u = 0: \quad S = 0, \quad S' = 0$$
$$u = \omega: \quad S = 2\log\sigma_2\omega, \quad S' = -2\eta\omega + 2\log\sigma_2\omega$$
$$u = 2\omega: \quad S = 4\eta\omega, \quad S' = 0$$

indem man die Gleichungen

$$\sigma_2 0 = 1, \quad \sigma_2(u + 2\omega) = e^{2\eta(u+\omega)}\sigma_2 u \qquad [18.\ (6)]$$

beachtet. Hieraus folgt aber, dass die Bogen S und S' von demjenigen Punkt an zu zählen sind, in welchem sie die Gerade $x = 1$ senkrecht treffen, da für $u = 0$

$$X = 1, \quad \frac{dY}{dX} = 0 \text{ ist} \qquad (\text{Gl. } (10))$$

ferner, dass der aus zwei symmetrischen Zweigen bestehende Bogen S' in seiner rechten Hälfte als negativ, in der linken als positiv zu betrachten ist. In der Tat entsteht ja auch die rechte Hälfte nicht durch Abwickelung, sondern durch Aufwickelung, d. h. negative Abwickelung des erzeugenden Fadens.

Hiernach wird der zu einem beliebigen Punkt einer beliebigen Curve (x, y) oder (x, ι) gehörige Parameterwert u folgendermassen ermittelt. Man bestimme vermittelst der Parabel resp. Geraden, welche durch diesen Punkt geht, und welche alle Punkte gleicher Neigung verbindet, die Punkte der Curven $C_0 = \eta$, $C_0 = 0$ der Schar (g), welche jenem Punkt entsprechen, also dasselbe u besitzen, ziehe die Tangenten in diesen letzteren Punkten und rechne die Bogen S, S' bis zu ihrem Schnittpunkt mit der an $C_0 = \eta$ resp. $C_0 = 0$ gelegten Tangente; die unter Beachtung des Zeichens gebildete Differenz $S - S'$ ist dann das 2η-fache des gesuchten Parameters u.

Digitized by Google

Inhalt.

pag.

I. Die Differentialgleichungen der drei Curvenscharen und ihre Integration durch elliptische Functionen . . . . . 200—204

II. Betrachtungen der in den Integralgleichungen auftretenden speciellen elliptischen Functionen . . . . . 204—210

III. Die analytischen Eigenschaften der Integralausdrücke . . . . 210—213

1) Transformation der Ausdrücke in einander pag. 210—213. 2) Entwickelung in Potenzreihen; Eindeutigkeit, reelle Werte pag. 213—217. 3) Einführung der σ_λ-Functionen pag. 217—220. 4) Einführung der Thetafunctionen; Tabelle zur Berechnung pag. 220—222. 5) Differentialausdrücke der Integrale pag. 222—223.

IV. Die Curven (x, t) . . . . . 223—229

1) Eine Transformationsgleichung pag. 223—224. 2) Verlauf der Curven; Punkte gleicher Neigung, Rückkehrpunkte pag. 224—229.

V. Die Curven (x, τ) . . . . . 229—232

1) Transformationsgleichung pag. 229—230. 2) Verlauf der Curven; Punkte gleicher Neigung, Rückkehrpunkte pag. 230—231. 3) Punkte stärkster Krümmung pag. 231—232.

VI. Die Curven (x, y) . . . . . 222—239

1) Analytische Darstellung pag. 232. 2) Verlauf der Curven; die Parabeln der Punkte gleicher Neigung, höchste Punkte, Rückkehrpunkte pag. 232—235. 3) Die Evolutenschar und ihre ausgezeichneten Curven; Punkte stärkster Krümmung pag. 235—237. 4) Die Evolventen; die Evolventenbogen; geometr. Bedeutung der Hilfsvariabeln u pag. 237—239.

Digitized by Google

IX

Zur Theorie der Spiralflächen.

Von

Dr. **Ebner**, Schulamtscandidat
in Rostock.

Einleitung.

Die vorliegende Arbeit soll einen Beitrag zu der Discussion gewisser Flächen enthalten, welche bisher wenig im Zusammenhang untersucht worden sind. In die Betrachtung eingeführt sind diese Flächen zuerst von Herrn Sophus Lie, der sich seit 1871 mit gewissen Curven auf ihnen beschäftigte und ihnen gelegentlich 1878 den Namen „Spiralflächen" erteilte [1]); Herr Lie fand auch den Zusammenhang dieser Flächen mit einer gewissen conformen und linearen Transformation des Raumes [2]). Von einem anderen Gesichtspunkte aus wurde 1878 Herr M. Lévy auf diese Flächen geführt, als er versuchte, das bekannte Theorem von Bour für die Schraubenflächen weiter zu verallgemeinern [3]); er gab zugleich eine kinematische Erzeugung der Spiralflächen und bestimmte die Form ihres Linienelements. Seine Ergebnisse wurden dann von Herrn

1) Vgl. Lie und Klein, Mathem. Ann. Bd. IV, p. 50 ff.; Lie, Math. Ann. Bd. V, p. 204; Bd. XX, p. 357 ff.

2) Vgl. Lie, Vorlesungen über Differentialgleichungen etc., bearb. und hersg. von Scheffers, p. 260,

3) Vgl. Lévy, Sur le développement des surfaces, dont l'élement linéaire est exprimable par une fonction homogène, Compt. rend. 1878, p. 789 ff. der Note vom 18. November.

Digitized by Google

Darboux auf eine elegantere Form gebracht [1]). Auf mehr mechanischem Wege kam in neuerer Zeit Herr Staude auf die Spiralflächen, indem er sich die Aufgabe stellte, gewisse Betrachtungen Lie's über geodätische Linien zu verallgemeinern und zu untersuchen, wann die Bahncurven eines bewegten Punktes auf einer Fläche eine infinitesimale Transformation gestatten [2]).

Die vorliegende Arbeit selbst ist in drei Abschnitte geteilt. Der erste giebt die Einführung der Spiralflächen als die invarianten Flächen der conformen projectiven infinitesimalen Transformation des Raumes (§ 1—7). Der zweite Abschnitt entwickelt alsdann allgemeine Eigenschaften der Spiralflächen, speciell die Form ihres Linienelements (§ 8—11). Der dritte Abschnitt deckt schliesslich die Beziehung dieser Flächen zu dem Problem der Bewegung eines Punktes auf Oberflächen unter Einfluss einer Kräftefunction auf (§ 12 — Ende).

---

1) Vgl. Darboux, Leçons sur la théorie générale des surfaces, Bd. I, p. 197 ff,

2) Vgl. Staude, Berichte der math.-phys. Klasse der Kgl. Sächs. Ges. d. Wissenschaften zu Leipzig, 1893, p. 429 ff. vom 18. Octbr.

Digitized by Google

Erster Abschnitt.

Einführung der Spiralflächen durch die conforme projective infinitesimale Transformation des Raumes.

§ 1

Die projective Transformation des Raumes.

Die allgemeine projective Transformation des Raumes wird bekanntlich dargestellt durch die Gleichungen [1]):

$$1) \qquad x_1 = \frac{a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}}{a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44}}$$

$$y_1 = \frac{a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24}}{a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44}}$$

$$z_1 = \frac{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{14}}{a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44}}$$

unter a_{ik} $(i, k = 1, 2, . 4)$ gegebene Constanten, unter (xyz) die Cartesischen Coordinaten eines Raumpunktes, unter $(x_1y_1z_1)$ diejenigen eines Bildpunktes verstanden.

Die Gleichungen 1) repräsentiren eine ganze Schar von Transformationen, wenn man unter den a_{ik} irgend welche willkürliche Grössen versteht; diese Transformationsschar ist 15-gliederig, da unter den 16 Grössen a_{ik} nur 15 wesentlich sind [1]).

Die Schar 1) stellt zugleich eine Gruppe von Transformationen dar, d. h. zwei auf einander folgende Transformationen der Schar sind mit einer einzigen Transformation aequivalent, welche bereits in der Schar enthalten ist [2]).

Denn bezeichnet kurz Ta_{ik} diejenige Transformation, die den Punkt (xyz) in $(x_1y_1z_1)$, Ta_{ik}' diejenige Transformation, welche weiter $(x_1y_1z_1)$ in $(x_2y_2z_2)$ überführt, so kann man beide Transformationen, nach einander angewandt, ersetzen durch die eine Transformation Ta_{ik}''; welche direct (xyz) in $(x_2y_2z_2)$ überführt, und für welche $a_i{}^{k\prime}$ als Function von a_{ik} und a_{ik}' gegeben ist durch die Gleichung:

$$2) \qquad a_{ik}'' = \sum_1^4{}_h a_{ih}' \,.\, a_{hk}, \quad (i, k = 1, \ldots 4)$$

---

1) Vgl. Lie, Theorie der Transformationsgruppen, I. Absch. p. 554.

2) Vgl. Lie, l. c. I, p. 3.

Digitized by Google

diese Transformation Ta_{ik}'' ist aber bereits in der Schar 1) enthalten.

In der Schar 1) ist auch die sogen. identische Transformation enthalten, welche den Punkt (xyz) in sich selbst überführt [1]). Für diese wird:

$$3) \qquad a_{ii} = 1, \quad a_{ik} = 0 \quad (i\,k = 1, \ldots 4)$$

Setzt man demnach

$$4) \qquad a_{ii} = 1 + \delta a_{ii}, \quad a_{ik} = \delta a_{ik}$$

so erhält man aus 1) die sogen. infinitesimale Transformation des Raumes, welche (xyz) in den ihm unendlich benachbarten Punkt $(x_1 y_1 z_1)$ überführt, unter δa_{ii}, δa_{ik} dabei unendlich kleine Grössen 1. Ordnung verstanden.

Bis auf unendlich kleine Grössen 2ter und höherer Ordnung ist also [2]):

$$5) \qquad \frac{1}{\delta a_{41} x + \delta a_{42} y + \delta a_{43} z + (1 + \delta a_{44})} = 1 - \delta a_{41} x - \delta a_{42} y - \delta a_{43} z - \delta a_{44}$$

Gemäss 4) und 5) werden damit die Gleichungen 2) unter Vernachlässigung unendlich kleiner Grössen 2ter und höherer Ordnung:

$$6) \qquad \begin{aligned} x_1 &= x + (\delta a_{11} - \delta a_{44}) x + \delta a_{12} y + \delta a_{13} z \\ &\quad - \delta a_{41} x^2 - \delta a_{42} xy - \delta a_{43} xz + \delta a_{14} \\ y_1 &= y + \delta a_{22} x + (\delta a_{22} - \delta a_{44}) y + \delta a_{23} z \\ &\quad - \delta a_{42} y^2 - \delta a_{43} yz - \delta a_{41} yx + \delta a_{24} \\ z_1 &= z + \delta a_{31} x + \delta a_{32} y + (\delta a_{33} - \delta a_{44}) z \\ &\quad - \delta a_{43} z^2 - \delta a_{41} zx - \delta a_{42} xy + \delta a_{34} \end{aligned}$$

Die bisher noch willkürlichen Grössen a_{ik} seien nun als reelle Functionen eines Parameters t vorausgesetzt, dessen Wert t_0 der identischen Transformation entsprechen möge, dann kann man setzen:

$$7) \qquad \delta a_{11} - \delta a_{44} = \left[\frac{d(a_{11} - a_{44})}{dt}\right]_{t=t_0} \cdot \delta t = \text{const.}\, \delta t = a_1 \delta t$$
$$\delta a_{12} = a_2 \delta t, \quad \delta a_{13} = a_3 \delta t, \quad \delta a_{14} = a\, dt$$

---

1) Vgl. Lie, l, c. I, p. 554, § 134.

2) Vgl. Lie, Vorlesungen über Differentialgleichungen etc., bearb. und hersg. von Scheffers p. 76, wo zu dem Obigen analoge Betrachtungen für die Ebene angestellt sind.

Digitized by Google

$$\delta a_{21} = b_1\,\delta t, \quad \delta a_{22} - \delta a_{44} = b_2\,\delta t. \quad \delta a_{23} = b_3\,\delta t, \quad \delta a_{24} = \delta b t$$
$$\delta a_{31} = c_1\,\delta t, \quad \delta a_{32} = c_2\,\delta t, \quad \delta a_{33} - \delta a_{44} = c_3\,\delta t, \quad \delta a_{34} = c\delta t$$
$$-\delta a_{41} = a_{11}\,\delta t, \quad -\delta a_{42} = a_{22}\,\delta t, \quad -\delta a_{43} = a_{33}\,\delta t$$

wo die neuen Grössen a, b, c, a_1, . . . a_{11}, a_{22}, a_{33} nunmehr bestimmte Constanten bezeichnen.

Setzt man noch zur Abkürzung:

8)
$$\xi = a + a_1 x + a_2 y + a_3 z + a_{11} x^2 + a_{22} xy + a_{33} xz$$
$$\eta = b + b_1 x + b_2 y + b_3 z + a_{11} xy + a_{22} y^2 + a_{33} yz$$
$$\zeta = c + c_1 x + c_2 y + c_3 z + a_{11} xz + a_{22} zy + a_{33} z^2$$

so erhält man aus 6) und 7) als Gleichungen der projectiven infinitesimalen Transformation des Raumes:

9)
$$x_1 - x = \delta x = \xi\,\delta t$$
$$y_1 - y = \delta y = \eta\,\delta t$$
$$z_1 - z = \delta z = \zeta\,\delta t$$

die wir kurz durch das Symbol repräsentiren [1]):

10)
$$Tf = \xi(xyz)\frac{\partial f}{\partial x} + \eta(xyz)\frac{\partial f}{\partial y} + \zeta(xyz)\frac{\partial f}{\partial z}$$

Interpretirt man δt als das Zeitelement dt, so kann man die infinitesimale Transformation 10) als die Definition einer stationären Bewegung einer incompressibeln Flüssigkeit auffassen, vermöge welcher das zur Zeit $t = t$ an der Stelle (xyz) des Raumes befindliche Teilchen eine Geschwindigkeit besitzt, deren Componenten die Werte $\xi\eta\zeta$ in 8) sind.

§ 2.

Die conforme projective infinitesimale Transformation des Raumes.

Es sollen nunmehr die Bedingungen für die Conformität der projectiven infinitesimalen Transformation Tf des § 1. aufgestellt werden.

Sind in einem Raum von drei Dimensionen u, v, w die Coordinaten eines Punktes, so wird das Quadrat des Linienelements in diesen Coordinaten:

---

1) Vgl. Lie, l. c. I, p. 54.

1) $$ds^2 = E du^2 + F dv^2 + G dw^2 + 2L dv dw + 2M dw du + 2N du dv$$

wo die E, F, G, L, M, N Functionen der drei Variabelen u, v, w sind. Soll dieser Raum nun eine Transformation in sich selbst von der Form:

2) $$u_1 = \varphi(uvw), \quad v_1 = \psi(uvw), \quad w_1 = \chi(uvw)$$

gestatten, so lauten die Bedingungen für die Conformität dieser Transformation [1]):

3) $$E(\varphi\psi\chi) \cdot \varphi_1^2 + F(\varphi\psi\chi) \cdot \psi_1^2 + G(\varphi\psi\chi) \times x_1^2 + 2L(\varphi\psi\chi)\psi_1\chi_1 + 2M(\varphi\psi\chi) \cdot \chi_1\varphi_1 + 2N(\varphi\psi\chi) \cdot \varphi_1\psi_1 = m^2 E(uvw)$$

$$E\varphi_2^2 + F\psi_2^2 + G\chi_2^2 + 2L\psi_2\chi_2 + 2M\chi_2\varphi_2 + 2N\varphi_2\psi_2 = m^2 \cdot F$$

$$E\varphi_3^2 + F\psi_3^2 + H\chi_3^2 + 2L\psi_3\chi_3 + 2M\chi_3\varphi_3 + 2N\varphi_3\psi_3 = m^2 \cdot G$$

und:

3′) $$E\varphi_2\varphi_3 + F\psi_2\psi_3 + G\chi_2\chi_3 + L(\psi_2\chi_3 + \psi_3\chi_2) + M(\chi_3\varphi_2 + \chi_3\varphi_2) + N(\varphi_2\psi_3 + \varphi_3\psi_2) = m^2 L$$

$$E\varphi_3\varphi_1 + F\psi_3\psi_1 + G\chi_3\chi_1 + L(\psi_3\chi_1 + \psi_1\chi_3) + M(\chi_3\varphi_1 + \chi_1\varphi_3) + N(\varphi_3\psi_1 + \varphi_1\psi_3) = m^2 M$$

$$E\varphi_1\varphi_2 + F\psi_1\psi_2 + G\chi_1\chi_2 + L(\psi_1\chi_2 + \psi_2\chi_1) + M(\chi_1\varphi_2 + \chi_2\varphi_1) + N(\varphi_1\psi_2 + \varphi_2\psi_1) = m^2 N$$

Hierin sind die E, F, G, M, N der linken Seiten Functionen der Functionen $\varphi\psi\chi$, diejenigen der rechten Seiten Functionen von u, v, w; die unteren Indices 1, 2, 3 bedeuten die partielle Differentiation nach u, v, w; m^2 bezeichnet einen Proportionalitätsfactor, der eine Function von u, v, w ist und für die identische Transformation des Linienelements 1) gleich 1 wird.

Wählt man im Besonderen die Functionen φ, ψ, χ in 2) nun so, dass:

4) $$u_1 = u + \xi(uvw)\delta t$$
$$v^1 = v + \eta(uvw)\delta t$$
$$w_1 = w + \zeta(uvw)\delta t$$

---

1) Vgl. Knoblauch. [Einleitung in die allgemeine Theorie der krummen Flächen, Leipzig 1888, § 27.

Digitized by Google

und berücksichtigt man dann die für jede eindeutige und stetige Function f bis auf Glieder 1ter Ordnung giltige Entwicklung:

5) $$f(u_1 v_1 w_1) = f(uvw) + (f_1\xi + f_2\eta + f_3\zeta)\,\delta t$$

wo die unteren Indices die partielle Differentiation nach u, v, w bedeuten, so erhält man, da:

6) $$m^2(uvw) = 1 + \mu(uvw)\,\delta t$$

gesetzt werden kann, aus 3) und 3′) als Bedingungen für die Conformität der infinitesimalen Transformation 4):

7) $$\begin{aligned}(E_1\xi + E_2\eta + E_3\zeta) + 2E\xi_1 + 2M\zeta_1 + 2N\eta_1 &= \mu E\\ (F_1\xi + F_2\eta + F_3\zeta) + 2F\eta_2 + 2N\xi_2 + 2L\zeta_2 &= \mu F\\ (G_1\xi + G_2\eta + G_3\zeta) + 2G\zeta_3 + 2L\eta_3 + 2M\xi_3 &= \mu G\end{aligned}$$

und:

7′) $$\begin{aligned}L_1\xi + L_2\eta + L_3\zeta + L(\eta_2 + \eta_3) + F\eta_3 + G\zeta_1 + M\xi_2 + N\xi_3 &= \mu L\\ M_1\xi + M_2\eta + M_3\zeta + M(\zeta_3 + \zeta_1) + G\zeta_1 + E\zeta_3 + N\eta_3 + L\eta_1 &= \mu M\\ N_1\xi + N_2\eta + N_3\zeta + N(\xi_1 + \xi_2) + E\xi_2 + F\eta_1 + L\zeta_1 + M\zeta_2 &= \mu N\end{aligned}$$

Für unseren Fall des gewöhnlichen Raumes ist nun:

8) $$\begin{gathered}u = x,\quad v = y,\quad w = z\\ E = F = G = 1,\quad L = M = N = 0\end{gathered}$$

so dass die Gleichungen 7) und 7′) werden:

9) $$\begin{gathered}2\xi_1 = \mu,\quad 2\eta_2 = \mu,\quad 2\zeta_3 = \mu\\ \eta_1 + \zeta_2 = 0,\quad \zeta_1 + \xi_3 = 0,\quad \xi_2 + \eta_1 = 0\end{gathered}$$

oder μ eliminirt:

10) $$\begin{gathered}\xi_1 - \eta_2 = 0;\quad \eta_2 - \zeta_3 = 0,\quad \zeta_3 - \xi_1 = 0\\ \eta_3 + \xi_2 = ,0\quad \zeta_1 + \xi_3 = 0,\quad \xi_2 + \eta_1 = 0\end{gathered}$$

Bildet man diese Gleichungen nun für die Werte 8) in § 1. von $\xi\eta\zeta$, so erhält man für die Constanten daselbst die Bedingungen:

11) $$\begin{gathered}a_1 = b_2\quad a_2 = -b_1,\quad a_{11} = 0\\ b_2 = c_3,\quad b_3 = -c_2,,\quad a_{22} = 0\\ c_3 = a_1,\quad c_1 = -a_3,\quad a_{33} = 0\end{gathered}$$

Setzt man noch für das Folgende:

12) $$a_1 = k,\quad a_2 = -u,\quad a_3 = m.\quad b_3 = -l$$

so wird das Symbol der conformen projectiven infinitesimalen Transformation des Raumes:

Digitized by Google

13) $$Tf = \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y} + \zeta \frac{\partial f}{\partial z}$$

wo $\xi\eta\zeta$ die Werte haben:

13′
$$\begin{aligned} \xi &= a + kx - ny + mz \\ \eta &= b + nx + ky - lz \\ \zeta &= c - mx + ly + kz \end{aligned}$$

Setzt man von den 7 Constanten a, b, c, k, l, m, n successive die eine gleich 1, die übrigen gleich 0, so erhält man aus 13′) die infinitesimale Transformation der Translation nach der x-, y-, z-Axe, der Aehnlichkeit in Bezug auf den Ursprung und der Rotation um die x-, y- und z-Axe [1]).

Die allgemeine conforme projective infinitesimale Transformation des Raumes ist also linear mit Constanten aus diesen 7 besonderen infinitesimalen Transformationen zusammengesetzt.

§ 3.

Die invarianten Punkte der conformen projectiven infinitesimalen Transformation des Raumes.

Um zu untersuchen, ob irgend welche Raumpunkte bei Anwendung unserer Transformation in sich übergehen, für die Transformation also einzeln invariant bleiben, hat man das Gleichungssystem zu bilden [2]):

1) $$\xi = 0, \quad \eta = 0, \quad \zeta = 0$$

wo ξ, η, ζ die Werte 13′) des § 2 haben. Unter der Voraussetzung, dass die Determinante des Systems 1):

2) $$\begin{vmatrix} k & -n & m \\ n & k & -l \\ -m & l & k \end{vmatrix} = k(k^2 + l^2 + m^2 + n^2)$$

nicht verschwindet, was erfordert, dass $k \gtrless 0$ ist, wird dem System 1) allein genügt durch den Punkt:

---

1) Vgl. Lie-Scheffers, l. c. Beispiele zu Cap. XI und XII, sowie p. 81, Z. 2 v. u.

2) Vgl. Lie-Scheffers, l. l. p. 241, § 3.

Digitized by Google

3) $$x = x_0 = \frac{-a(k^2+l^2)+k(cm-bn)-l(cn+bm)}{k(k^2+l^2+m^2+n^2)}$$

$$y = y_0 = \frac{-b(k^2+m^2)+k(an-cl)-m(al+cn)}{k(k^2+l^2+m^2+n^2)}$$

$$z = z_0 = \frac{-c(k^2+n^2)+k(bl-am)-n(bm+al)}{k(k^2+l^2+m^2+n^2)}$$

Unter der Voraussetzung $k = 0$ kann man folglich den einzigen invarianten Punkt 3) zum Anfangspunkt 0 eines neuen Coordinatensystems $(0'x'y'z')$ wählen, dessen Axen denen des ursprünglichen Systems $(0xyz)$ parallel sind Das Symbol der infinitesimalen Transformation sei in den neuen Coordinaten x', y', z':

4) $$Tf = \xi' \frac{\partial f}{\partial x'} + \eta' \frac{\partial f}{\partial y'} + \zeta' \frac{\partial f}{\partial z'}$$

Dann ist [1]):

5) $$\begin{aligned} \xi' &= Tx' = a+k(x_0+x')-n(y_0+y')+m(z_0+z') \\ \eta' &= Ty' = b+n(x_0+x')+k(y_0+y')-l(z_0+z') \\ \zeta' &= Tz' = c-m(x_0+x')+l(y_0+y')+k(z_0+z') \end{aligned}$$

oder da $(x_0y_0z_0$ so gewählt ist, dass er den Gleichungen 1) genügt, so wird in 6) unter nachträglicher Weglassung der Accente

6) $$\begin{aligned} \xi &= kx-ny+mz \\ \eta &= nx+ky-lz \\ \zeta &= -mx+ly+kz \end{aligned}$$

Ist dagegen $k = 0$, so erfordert das Zugleichbestehen der Gleichungen 1) für die Constanten die Bedingung:

7) $$al+bm+cn = 0$$

in diesem Falle sind alle Punkte der Geraden:

8) $$x+\frac{b}{n} : y-\frac{a}{n} : z = l : m : n$$

einzeln invariant, und die Transformation Tf in § 2., 13) hat die Form:

9) $$\begin{aligned} \xi &= a-ny+mz \\ \eta &= b-lz+nx \\ \zeta &= c-mx+ly \end{aligned}$$

---

1) Vgl. Lie, l. c. I, p. 56, § 14.

Digitized by Google

Interpretirt man $\xi\eta\zeta$ wieder als Geschwindigkeitscomponenten eines Raumpunktes (xyz) zur Zeit t, so involviren die Gleichungen 6) eine Bewegung des Raumes, bei welcher bezüglich $\xi\eta\zeta$ Resultanten von zwei verschiedenen Geschwindigkeiten sind: einer mit den Componenten:

$$10) \qquad kx, \quad ky, \quad kz$$

welche in die Richtung des Radiusvector fällt und vermöge welcher der Raum in Bezug auf den Ursprung in dem constanten Verhältniss k dilatirt wird, und einer zweiten mit den Componenten:

$$11) \qquad -ny+mz, \quad -lz+nx, \quad -mx+ly$$

welche senkrecht auf der Richtung:

$$x : y : z = l : m : n$$

steht und vermöge welcher der Raum um diese Richtung mit der constanten Winkelgeschwindigkeit

$$\omega = \sqrt{l^2+m^2+n^2}$$

rotirt; die Geschwindigkeit 6) ist also componirt aus einer Dilatationsgeschwindigkeit in Bezug auf einen festen Punkt und aus einer Rotationsgeschwindigkeit um eine feste Axe [1]).

Analog besagen die Gleichungen 9), dass $\xi\eta\zeta$ bezüglich die Resultanten einer Translationsgeschwindigkeit des Raumes mit den Componenten a, b, c und einer Rotationsgeschwindigkeit mit den Componenten 11) sind; sie involviren also eine sog. Euclidische Bewegung des Raumes [2]).

Im Folgenden bezeichnen wir die infinitesimale Transformation 6) kurz mit T_1, die infinitesimale Transformation 9) mit T_2

§ 4.

Die Normalformen der conformen projectiven infinitesimalen Transformation des Raumes,

Die Transformationen T_1 und T_2 des § 3. können noch weiter vereinfacht werden, indem man die Richtungen der Coordinatenaxen in bestimmter Weise wählt.

---

1) Vgl. Darboux, l. l. I, p. 107, Nr. 89, wo durch eine derartige kinematische Betrachtung die Spiralflächen eingeführt werden.

2) Vgl. Lie-Scheffers, l. c. p. 15, § 4.

Digitized by Google

Bezeichnet zu diesem Zwecke wieder $(0x'y's)$ ein Coordinatensystem, dessen Ursprung der invariante Punkt 0 der Transformation, dessen Axen aber mit den alten die Richtungscosini $(\alpha_i \beta_i \gamma_i) - i = 1, 2, 3$ — bilden, so gelten bekanntlich die Transformationsformeln:

1)
$$\begin{aligned} x' &= \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z \\ y' &= \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z \\ z' &= \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z \end{aligned}$$

In den neuen Coordinaten x', y', z' sei das Symbol der infinitesimalen Transformation:

2)
$$Tf = \xi' \frac{\partial f}{\partial x'} + \eta' \frac{\partial f}{\partial y'} + \zeta' \frac{\partial f}{\partial z'}$$

Dann ist [1]):

3)
$$\begin{aligned} \xi' &= Tx' = \xi\alpha' + \eta\beta' + \gamma_1\zeta \\ \eta' &= Ty' = \xi\alpha_2 + \eta\beta_2 + \zeta\gamma_2 \\ \zeta' &= Tz' = \xi\alpha_3 + \eta\beta_3 + \zeta\gamma_3 \end{aligned}$$

worin noch für $\xi\eta\zeta$ die Werte 6) bzhw. 9) des § 3. — aber ausgedruckt in $x'y'z'$ — zu setzen sind. Führt man zunächst die Substitution der Werte 6) des § 3. für $\xi\eta\zeta$ aus und ordnet nach x, y, z, so erhält man für 6):

4)
$$\begin{aligned} \xi' &= k(\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z) + (n\beta_1 - m\gamma_1)x + (-n\alpha_1 + l\gamma_1)y + (m\alpha_1 - l\beta_1)z \\ \eta' &= k(\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z) + (n\beta_2 - m\gamma_2)x + (-n\alpha_2 + l\gamma_2)y + (m\alpha_2 - l\beta_2)z \\ \zeta' &= k(\alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z) + (n\beta_3 - m\gamma_3)x + (-n\alpha_3 + l\gamma_3)y + (m\alpha_3 - l\beta_3)z \end{aligned}$$

Nunmehr wähle man die Richtung $(\alpha_3\beta_3\gamma_3)$ der neuen z'-Axe so, dass die Proportion gilt:

5)
$$\alpha_3 : \beta_3 : \gamma_3 = l : m : n$$

Setzt man dann zur Abkürzung:

6)
$$r = \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}$$

und beachtet, dass in der Determinante der 9 Richtungscosini die Subdeterminante jedes Elements gleich dem Element selbst ist, so folgt aus 4) und 5):

7)
$$\begin{aligned} \xi' &= k(\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z) - r(\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z) \\ \eta' &= k(\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z) + r(\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z) \\ \zeta' &= k(\alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z) \end{aligned}$$

oder aus 1) die neuen Coordinaten x', y', z' eingeführt:

---

1) Vgl. Lie, Theorie der Transformationsgruppen, I, p. 56, § 4.

Digitized by Google

8)
$$\begin{aligned}\xi' &= kx' - ry'\\ \eta' &= ky' + rx'\\ \zeta' &= kz'\end{aligned}$$

Analog erhält man aus 3) für die Werte 9) des § 3.:

8')
$$\begin{aligned}\xi' &= a' - ry'\\ \eta' &= b' + rx'\\ \zeta' &= c'\end{aligned}$$

unter a', b', c' neue Constanten (die Transformirten von a, b, c auf das neue System, so dass z. B. $c' = (al + bm + cn)\frac{1}{k}$) verstanden. Verschiebt man noch für 8') das Coordinatensystem $(0x'y'z')$ parallel mit sich selbst nach dem Punkt $\left(-\frac{b'}{r}, \frac{a'}{r}, 0\right)$ als neuen Ursprung, so erhält man schliesslich aus 8) und 8') unter nachträglicher Weglassung der Accente die beiden Normalformen der conformen projectiven infinitesimalen Transformation des Raumes [1]):

9)
$$\left.\begin{aligned}\xi &= kx - ry\\ \eta &= ky + rx\\ \zeta &= kz\end{aligned}\right\} \quad \text{bzhw.} \quad \begin{aligned}\xi &= -ry\\ \eta &= rx\\ \zeta &= c\end{aligned}$$

die für das Folgende kurz mit T_1' und T_2' bezeichnet werden.

Für $r = 0$ erhält man aus T_1' die infinitesimale Aehnlichkeitstransformation in Bezug auf den Ursprung, für $k = 0$ die infinitesimale Drehungstransformation um die z-Axe; aus diesen beiden Transformationen ist T_1' linear zusammengesetzt und heisst deshalb die erweiterte Aehnlichkeitstransformation oder Spiraltransformation [2]).

Für $r = 0$ erhält man aus T_2' die infinitesimale Verschiebungstransformation längs der z-Axe, für $c = 0$ die infinitesimale Drehungstransformation um dieselbe Axe; aus diesen beiden Transformationen ist also T_2' linear componirt und heisst deshalb die infinitesimale Schraubentransformation des Raumes [3]).

---

1) Vgl. Staude. Leipz. Ber. 1893 vom 31. Juli, p. 522, (19) und (19').

2) Vgl. Lie-Scheffers, l. c. pag. 243, 4. Beisp.

3) Vgl. Lie-Scheffers, l. c. p. 214, § 1, Beisp.

Digitized by Google

§ 5.

Die endliche Gruppe der conformen projectiven infinitesimalen Transformation des Raumes.

Um zu einer vorgelegten infinitesimalen Transformation Tf die dazu gehörige Gruppe zu finden, hat man das simultane System gewöhnlicher Differentialgleichungen [1]):

$$1) \qquad \frac{dx}{\xi(xyz)} = \frac{dy}{\eta(xyz)} = \frac{dz}{\zeta(xyz)} = dt$$

zu integriren, unter t den Parameter der Gruppe verstanden, mit den Anfangsbedingungen:

$$1') \qquad |x|_{t=0} = x_0, \quad |y|_{t=0} = y_0, \quad |z|_{t=0} = z_0$$

Für die Transformation T_1' wird 1) nach § 4, 9):

$$2) \qquad \frac{dx}{kx - ry} = \frac{dy}{ky + r} = \frac{dz}{kz} = dt$$

Die erste dieser Gleichungen giebt das Integral:

$$3) \qquad \Omega_1 = k \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x} - r \log \sqrt{x^2 + z^2} = \text{const.}$$

die zweite nach Combination mit der ersten:

$$4) \qquad \Omega_2 = \log \sqrt{x^2 + y^2} - \log z = \text{const.}$$

Die dritte Gleichung 1) endlich ergiebt das Integral [2]):

$$5) \qquad W \equiv \frac{\log z}{k} - t + \text{const.}$$

Bestimmt man die Constanten aus den Bedingungen 1')' so werden die 3 Integrale von 2):

$$6) \quad k \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x} - r \log \sqrt{x^2+y^2} = k \operatorname{arc\,tg} \frac{y_0}{x_0} - r \log \sqrt{x_0^2+y_0^2}$$

$$\log \sqrt{x^2+y^2} - \log z = \log \sqrt{x^2+y^2} - \log z_0$$

$$\frac{\log z}{k} - t = \frac{\log z_0}{k}$$

---

1) Vgl. Lie-Scheffers, l. c. p. 215, § 2: Lie, l. c. 1, p. 56 ff., § 16.

2) Vgl. Lie-Scheffers, l. c, p. 217.

Digitized by Google

Um diese 3 Gleichungen nach x, y, z aufzulösen, führe man Polarkoordinaten ein durch die Gleichungen:

7) $$x = \varrho\cos\varphi, \quad y = \varrho\sin\varphi, \quad z = z$$

Die Gleichungen 6) werden dann:

8) $$\begin{aligned} \varphi &= \varphi_0 + rt \\ \varrho &= \varrho_0 e^{kt} \\ z &= z_0 e^{kt} \end{aligned}$$

so dass die Gleichungen der endlichen Gruppe von T_1' nach 7) werden [1]):

8′) $$\begin{aligned} x &= \varrho_0 e^{kt}\cos(\varphi_0 + rt) = e^{kt}(x_0\cos rt - y_0\sin rt) \\ y &= \varrho_0 e^{kt}\sin(\varphi_0 + rt) = e^{kt}(y_0\cos rt + x_0\sin rt) \\ z &= z_0 e^{kt} \end{aligned}$$

Diese Gleichungen repräsentiren, wie speciell aus 8) ersichtlich, eine Transformation des Raumes, bei welcher jeder Raumpunkt um die z-Axe um den Winkel rt gedreht wird und gleichzeitig an einer ähnlichen Dilatation des Raumes in Bezug auf den Ursprung in dem constanten Verhältnisse e^{kt} teilnimmt; eine solche Transformation des Raumes soll kurz eine Spiralung, die Gruppe 8′) also die Gruppe der Spiralung heissen.

Bildet man das System gewöhnlicher Differentialgleichungen 1) für die Transformation T_2', so erhält man in analoger Weise die Gleichungen der Gruppe der Schraubung des Raumes [2])

Um die Gleichungen 8′) der Gruppe zu vereinfachen, führen wir statt der Cartesischen Coordinaten neue Coordinaten ein; als solche wählen wir die kanonischen Coordinaten der Gruppe [3]):

9) $$u \equiv \Omega_1 = k\,\mathrm{arctg}\frac{y}{x} - r\log\sqrt{x^2+y^2} = k\varphi - r\log\varrho$$

$$v \equiv \Omega_2 = \log\sqrt{x^2+y^2} - \log z = \log\varrho - \log z$$

$$w \equiv W = \frac{1}{k}\log z$$

---

1) Vgl. Darboux. l. c. I, p. 105, Formel (39),

2) Vgl. Lie-Scheffers, l. c. p. 219, Beispiel zu Satz 2.

3) Vgl. Lie-Scheffers, l. c. p. 228.

Digitized by Google

Die neuen Coordinatenflächen $u = \text{const.}$ sind dann Cylinderflächen mit der logarithmischen Spirale:

$$\varrho = e^{\frac{k}{r} \cdot \varphi} = \text{const.}$$

als Leitcurve und der z-Axe als Axe, die Flächen $v = \text{const.}$ Kreiskegel um die z-Axe mit dem Ursprung als Spitze, die Flächen $w = \text{const.}$ die Ebenen $z = \text{const.}$ Dabei bestehen zwischen Cartesischen und kanonischen Coordinaten die Relationen aus 9):

10)
$$x = e^{v+kw} \cos\left(\frac{u+rv}{k} + rw\right)$$
$$y = e^{v+kw} \sin\left(\frac{u+rv}{k} + rw\right)$$
$$z = e^{kw}$$

so dass das Linienelement des Raumes in den neuen Coordinaten wird [1]):

11)
$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = e^{2kw}\left\{\frac{e^{2v}}{k^2}\left[(k^2+r^2)(dv+kdw)^2 + 2r(dv+kdw)du + du^2\right] + k^2\,dw^2\right\}$$

Die einfachere Gleichung der Gruppe 8′) in u, v, w ist dann unmittelbar in 6) gegeben.

Für die Gruppe der Schraubung werden die kanonischen Coordinaten:

12)
$$u = \log\sqrt{x^2+y^2} = \log\varrho, \quad v = \varphi - \frac{r}{c}z, \quad w = \frac{z}{c}$$

und das Linienelement des Raumes in denselben [1]):

13)
$$ds^2 = e^{2u}\{du^2 + (dv + r\,dw)^2\} + c^2\,dw^2$$

Für die Specialfälle $k = 0$ bzhw. $c = 0$ und $r = 0$ fallen die kanonischen Coordinaten von T_1' bzhw. T_2' mit den gewöhnlichen Polarcoordinaten ϱ, φ, z des Raumes zusammen.

---

1) Vgl. Staude. Leipz. Ber. 1893 p. 422, wo $u = v$, $v = u$, $m = k$, $n = -r$ zu setzen ist.

Digitized by Google

§ 6.

Die invarianten Curven der conformen projectiven infinitesimalen Transformation des Raumes.

Die invarianten Curven einer infinitesimalen Transformation bestehen entweder aus lauter einzeln invarianten Punkten der Transformation oder aus den Bahncurven der durch die Transformation erzeugten endlichen Gruppe.

Für die Spiraltransformation T_1' existiren invariante Curven der ersten Art nach § 3. nicht; die Bahncurven, d. i. der Ort der ∞^1 Punkte, in welche irgend ein Raumpunkt $(x_0 y_0 z_0)$ bei allen Transformationen der eingliedrigen Gruppe der Spiralung übergeht, ergeben sich aus § 5., 8') durch Elimination von t in der Form:

1) $$u \equiv k \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x} - r \log \sqrt{x^2 + y^2} = \text{const.}$$

$$v \equiv \log \sqrt{x^2 + y^2} - \log z = \text{const.}$$

oder:

1') $$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 &= e^{\frac{2}{r}\left(k \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{x} - \text{const.}\right)} \\ x^2 + y^2 &= z^2 \,.\, \text{const.} \end{aligned}\right\}$$

wo die Constanten durch den Punkt $(x_0 y_0 z_0)$ gemäss § 5., 6) gegeben sind; erstere Gleichung stellt einen Cylinder um die z-Axe mit einer logarithmischen Spirale um 0 als Pol zur Leitcurve, letztere Gleichung einen geraden Kreiskegel um die z-Axe mit dem Ursprung 0 als Spitze dar. Die Bahncurven der Gruppe der Spiralung sind also die Schnittcurven von ∞^1 Spiralcylindern mit ∞^1 Kreiskegeln, die logarithmische Spiralen um 0 als Pol als Projectionen auf die xy-Ebene besitzen. Diese ∞^2 Bahncurven sollen doppelt gekrümmte Spirallinien heissen. In den Specialfällen $k = 0$ bzhw. $r = 0$ entarten sie zu Kreisen um die z-Axe bzhw. zu Geraden durch den Ursprung.

Für die Schraubentransformation existiren invariante Curven der ersten Art nur in dem Specialfalle $c = 0$; es sind alle Punkte der z-Axe als Axe der Rotation für die zugehörige Gruppe der Rotationen einzeln invariant. Die Bahncurven von T_2' sind ∞ Schraubenlinien am die z-Axe von der Steighöhe $\frac{c}{r}$, die in den Specialfällen $c = 0$ bzhw. $r = 0$ zu Kreisen um die z-Axe bzhw. zu Geraden parallel der z-Axe entarten.

Digitized by Google

§ 7.

Die invarianten Flächen der conformen projectiven infinitesimalen Transformation des Raumes.

Die invarianten Flächen einer infinitesimalen Transformation Tf des Raumes bestehen entweder aus lauter einzeln invarianten Punkten, oder sie werden erzeugt von ∞^1 der ∞^2 Bahncurven der endlichen Gruppe; die allgemeine invariante Fläche der letzten Art hat dabei die Gleichung (1):

$$1) \qquad \Omega(u, v) = \text{const.}$$

unter u und v die kanonischen Coordinaten, d. i. nach § 5. 1) zwei unabhängige Lösungen der linearen partiellen Differentialgleichung $Tf = 0$, unter Ω eine beliebige Function verstanden.

Die Gleichung 1) wird für die infinitesimale Spiraltransformation T_1' nach § 5, 9):

$$2) \qquad \Omega\left(k \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x} - r \log \sqrt{x^2 + y^2},\quad \log \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{z}}\right) = \text{const.}$$

oder da auch jede Function von u und v, z. B. $u + rv$ eine kanonische Coordinate der Gruppe ist:

$$2') \qquad \Omega\left(k \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x} - r \log z,\quad \log \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}\right) = \text{const.}$$

Führt man die Polarcoordinaten $\varrho\varphi z$ des Raumes ein, so ergiebt die Auflösung von 2) bzhw. 2') nach $k \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x} = k\varphi$:

$$3) \qquad k\varphi = r \log \varrho + \psi\left(\frac{\varrho}{z}\right)$$

bzhw.

$$3') \qquad k\varphi = r \log z + \psi\left(\frac{\varrho}{z}\right)$$

unter ψ eine beliebige Function des Arguments $\frac{\varrho}{z}$ verstanden.

Da die Bahncurven der Gruppe der Spiralung nach § 6. Spirallinien um die z-Axe mit dem Ursprung als Pol sind, besteht die

(1) Vgl. Lie-Scheffers, l. c. p. 245 ff,

Digitized by Google

Fläche von den Gleichungen 2) bis 3) aus je ∞^1 dieser ∞^2 Spirallinien; sie soll deshalb eine allgemeine Spiralfläche — nach Analogie der Schraubenfläche, mit der sie die Eigenschaft gemein hat, eine Verschiebung in sich zu gestatten — genannt werden [1]). Man erhält diese Fläche, wenn man auf eine beliebige ebene Curve fortwährend eine infinitesimale Spiraltransformation ausgeführt denkt, d. h. nach § 5.: indem man die Ebene der Curve um die z-Axe dreht und die Curve sich gleichzeitig in Bezug auf den Ursprung so deformiren lässt, dass die Coordinaten ϱ und z jedes Curvenpunktes in geometrischer Progression mit dem Quotienten e^k wachsen, während der Drehungswinkel der Curvenebene in arithmetischer Progression mit der Differenz r zunimmt [2]). Dabei beschreibt jeder Curvenpunkt eine Spiralebene, so dass die Fläche in der Tat aus ∞^1 Spirallinien besteht (nämlich aus denjenigen Bahncurven der Gruppe. welche die gegebene Curve treffen).

Setzt man demnach in den Gleichungen 8') des § 5., welche die Bahncurve eines beliebigen Raumpunktes $(\varphi_0 \varrho_0 z_0)$ darstellen, wenn man t von $-\infty$ bis $+\infty$ variiren lässt,

4) $$\varphi_0 = \varphi_0(u), \quad \varrho_0 = \varrho_0(u), \quad z_0 = z_0(u)$$

wo $\varphi_0(u)$, $\varrho(u)$, $z_0(u)$ beliebige reelle Functionen einer Variabeln u sind, so erhält man die Bahncurven aller Punkte der beliebigen Curve [3]), d. h. die Gleichungen

5) $$\begin{aligned} x &= \varrho_0(u)\, e^{kv} \cos(\varphi_0(u) + rv) \\ y &= \varrho_0(u)\, e^{kv} \sin(\varphi_0(u) + rv) \\ z &= z_0(u)\, e^{kv} \end{aligned}$$

repräsentiren — mit $t = v$ — die Parameterdarstellung der allgemeinen Spiralfläche, wie sie zuerst von Herrn Darboux gegeben ist [3]). Die Coordinatencurven $u = \text{const.}$ sind dabei die ∞^1 Spirallinien, die Curven $v = \text{const.}$ die successiven Lagen der sich infolge T_1' deformirenden Curve.

Eine andere sehr nützliche Form der Gleichungen 5) ergiebt sich, wenn man setzt:

---

1) Der Name „Spiralfläche“ wurde zuerst von Herrn Lie 1878 im Norweg. Archiv eingeführt, vgl. Lie-Scheffers, l. l. p. 260, Anmerkg.

2) Vgl. M. Lévy, Compt. rend. 1878, t. 2 p. 789, wo die Flächen 3) „pseudo-neulures logarithmiques“ genannt werden.

3) Vgl.. Darboux, l. b. p. 110, wo die Flächen 5) „surfaces spirales“ heisen.

Digitized by Google

6) $$\varrho_0(u) = e^{p(u)}, \quad \varphi_0(u) = \frac{q(u) + r(p(u)}{k}$$

$$x_0(u) = e^{p(u)} \cdot f(u)$$

Dieselben werden dann:

7) $$x = e^{p(u)+kv} \cos \frac{q(u) + r(kv + p(u))}{k}$$

$$y = e^{p(u)+kv} \sin \frac{q(u) + r(kv + p(u))}{k}$$

$$z = e^{p(u)+kv} \cdot f(u)$$

welche Gleichungen sich auch direct aus 2) ableiten lassen, indem man diese Gleichung auf die Form gebracht denkt:

8) $$\log \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} = \log \frac{1}{f(k\varphi - r \log \varrho)}$$

dann x, y, z durch φ und ϱ gemäss den Gleichungen

$$x = \varrho \cos \varphi, \quad y = \varrho \sin \varphi, \quad z = \varrho f(k\varphi - r \log \varrho)$$

ausdrückt und hierin die neuen Variabelen u und $w = v$ des § 5., 9) einführt.

Eine dritte Parameterdarstellung der allgemeinen Spiralfläche, die zuerst von Herrn M. Lévy gegeben ist [1]), ergiebt sich aus 3′) in der Form:

9) $$\begin{aligned} x &= \varrho \cos \varphi \\ y &= \varrho \sin \varphi \\ z &= k \end{aligned} \qquad \varphi = \frac{1}{k}\left\{ r \log z + \psi\left(\frac{\varrho}{z}\right)\right\}$$

Ist speciell die Constante $k = 0$, so erhält man aus 2) als allgemeine Invariantenfläche der Gruppe der Rotationen um die z-Axe

10) $$\Omega(\sqrt{x^2 + y^2}, z) = \text{const.}$$

d. i. die allgemeine Rotationsfläche um die z-Axe.

Ist speciell die Constante $r = 0$, so erhält man als allgemeine Invariantenfläche der Gruppe der Aehnlichkeit in Bezug auf den Ursprung:

---

1) Vgl. M. Lévy, l. c. p. 789 ff.

Digitized by Google

11) $$\Omega\left(k \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}, \quad \log \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}\right) = \text{const.}$$

d. i. — da nach 14) das Verhältniss

$$\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z} = \varrho$$

nur eine Function von

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x} = \varphi$$

ist, mithin für $\varphi = \text{const.}$ ebenfalls einen constanten Wert hat — eine Fläche, die aus lauter Geraden durch den Ursprung besteht, also eine allgemeine Kegelfläche mit dem Ursprung als Spitze.

Invariante Flächen der ersten Art existiren nach § 3. für T_1^* nicht.

Analog erhält man für die infinitesimale Schraubentransformation T_2' aus § 5., 13) die allgemeine Invariantenfläche:

12) $$\Omega\left(\sqrt{x^2+y^2}, \quad c \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x} - rz\right) = \text{const.}$$

d. i. eine aus ∞^1 der ∞^2 Schraubenlinien der Gruppe der Schraubung bestehende Fläche oder eine allgemeine Schraubenfläche mit der aus § 5. resultirenden Parameterdarstellung

12') $$\begin{aligned} x &= \varrho_0(u)\cos(\varphi_0(u)+rv) \\ y &= \varrho_0(u)\sin(\varphi_0(u)+rv) \\ z &= z_0(u)+cv \end{aligned}$$

mit den Specialfällen der allgemeinen Rotationsfläche um die z Axe ($c = 0$) und der allgemeinen Cylinderfläche um dieselbe Axe ($x = 0$). Invarianten der ersten Art existiren für T_2' ebenfalls nicht.

Das Resultat der vorangehenden Entwickelungen lautet sonach in der Zusammenfassung:

I) „Die allgemeinsten invarianten Flächen der conformen „projectiven infinitesimalen Transformation des Raumes „sind die allgemeinen Spiralflächen und die allgemeinen „Schraubenflächen mit den Specialfällen bezüglich der Kegel„flächen und der Cylinderflächen und dem gemeinsamen „Specialfalle der Rotationsflächen".

Digitized by Google

Zweiter Abschnitt.

Allgemeine Eigenschaften der Spiralflächen.

§ 8.

Das Linienelement der Spiralflächen.

Das Linienelement der allgemeinen Spiralfläche hat eine charakteristische Form, die zunächst abgeleitet werden soll. Den Ausgangspunkt unserer Betrachtungen bildet die Parameterdarstellung des § 7., 5) der allgemeinen Spiralfläche:

1)
$$\begin{aligned} x &= \varrho_0(u)\, e^{kv} \cos(\varphi_0(u) + rv) \\ y &= \varphi_0(u)\, e^{kv} \sin(\varphi_0(u) + rv) \\ z &= z_0(u)\, e^{kv} \end{aligned}$$

Daraus folgt für das Quadrat des Linienelements der Fläche:

2)
$$ds^2 = e^{2kv}(E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2)$$

wo gesetzt ist

2′)
$$\begin{aligned} E &= \varrho_0'^2(u) + \varrho_0^2(u)\,\varphi_0'^2(u) + z_0'^2(u) \\ F &= k\varrho_0(u)\,\varrho_0'(u) + r\varrho_0^2(u)\,\varphi_0'(u) + kz(u)\,z_0'(u) \\ G &= k^2\varrho_0^2(u) + r^2\varrho_0^2(u) + k^2 z_0^2(u) \end{aligned}$$

unter $\varrho_0'(u)$, $\varphi_0'(u)$, $z_0'(u)$ die Differentialquotienten von $\varrho_0(u)$, $\varphi_0(u)$, $z_0(u)$ verstanden; die Gauss'schen Fundamentalgrössen 1. Ordnung sind also allein Function von u. Zwecks Transformation von 2) bringen wir das Quadrat des Linienelements auf die Form:

3)
$$ds^2 = G(u)\, e^{2kv} \left\{ \left(dv + \frac{F(u)}{G(u)}\,du\right)^2 + \frac{E(u)\,G(u) - F(u)^2}{G^2(u)}\,du^2 \right\}$$

und setzen dann:

4)
$$dv + \frac{F(u)}{G(u)}\,du = dw$$

unter w eine neue Variabele verstanden; die Integration von 4) ergiebt:

4′)
$$v = w - \int \frac{F(u)}{G(u)}\,du$$

Führt man diese neue Variabele w in 3) ein, so folgt:

5)
$$ds^2 = e^{2kw}(H\,du^2 + \mathrm{H}\,dw^2)$$

wo gesetzt ist:

Digitized by Google

5′) $$H = \frac{E(u)\,G(u) - F_2^2(u)}{C(u)\,.\,e^{-2k\int \frac{F(u)}{G(u)}du}} = H(u)$$

$$\mathrm{H} = G(u)\,.\,e^{-2k\int \frac{F(u)}{G(u)}du} = \mathrm{H}(u)$$

Da H und H also blosse Functionen von u sind, kann man statt u eine neue Variabele μ einführen durch die Gleichung:

6) $$H(u)\,du^2 = d\mu^2$$

aus welcher umgekehrt durch eine blosse Quadratur u als eine Function $m^2(\mu)$ von μ folgt. Man erhält aus 5):

7) $$ds^2 = e^{2k\omega}(d\mu^2 + M^2 d\omega^2)$$

wo M die Function $\mathrm{H}(m^2(\eta))$ darstellt [1]). Führt man schliesslich statt μ die neue Variabele ν ein durch die Relation:

8) $$\frac{d\mu^2}{M^2(\mu)} = d\nu, \quad \text{i. e.} \quad \nu = \int \frac{d\mu}{M(\mu)}$$

so kann man daraus μ als Function $N(\nu)$ mittelst Ausführung einer blossen Quadratur darstellen, und erhält aus 7):

9) $$ds^2 = e^{2k\omega}\,.\,N^2(\nu)(d\nu^2 + d\omega^2)$$

oder $N^2(\nu) = e^{2\varphi(\nu)}$ und ν wieder $= u$ sowie $w = v$ gesetzt:

10) $$ds^2 = e^{2k\omega + 2\varphi(u)}\,.\,(du^2 + dv^2)$$

Aus der Form 10) des Linienelements, die die gesuchte charakteristische Form des Linienelements der allgemeinen Spiralfläche 1) repräsentirt, folgt dass die neuen Coordinaten u und v isometrische Coordinaten der Fläche 1) sind, und zwar sind die Curven $u = \text{const.}$ nach 6) und 8) identisch mit den Bahncurven der Spiralung, also Spirallinien, während die Curven $v = \text{const.}$ die orthogonalen Trajectorien von $u = \text{const.}$ sind.

Zu der Form 10) des Linienelements gelangt man auch, wenn man ausgeht von der modificirten Parameterdarstellung der allgemeinen Spiralfläche:

11) $$x = e^{p(u)+kv}\cos\frac{q(u)+r(kv+p(u))}{k}$$

---

1) Vgl. Darboux, l. c. p. 109 und 110.

Digitized by Google

11) $$y = e^{p(u)+kv} \sin \frac{q(u)+r(kv+p(u))}{k}$$

$$z = e^{p(u)+kv} \cdot f(u)$$

Man erhält daraus für das Quadrat des Linienelements:

12) $$ds^2 = e^{2p(u)+2kv}(E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2)$$

wo gesetzt ist:

12′) $$E = \left(1+\frac{r^2}{k^2}+f^2(u)\right)p'^2(u)+2\left(\frac{r}{k^2}q'(u)+f(u)\cdot f'(u)\right) \times p'(u)+\left(\frac{q'^2(u)}{k^2}+f'^2(u)\right)$$

$$F = k\left\{\left(1+\frac{r^2}{k^2}+f^2(u)\right)p'(u)+\left(\frac{r}{k^2}q'(u)+f(u)\cdot f'(u)\right)\right\}$$

$$G = k^2\left(1+\frac{r^2}{k^2}+f^2(u)\right)$$

Damit nun 12) die gesuchte charakteristische Form 10) erhält, müssen die willkürlichen Functionen $p(u)$, $q(u)$, $f(u)$ so bestimmt werden, dass man hat:

13) $$\left(1+\frac{r^2}{k^2}+f^2(u)\right)p'(u)+\frac{r}{k^2}q'(u)+f(u)\cdot f'(u)=0$$

$$\left(1+\frac{r^2}{k^2}+f^2(u)\right)p'^2(u)+2\left(\frac{r}{k^2}q'(u)+f(u)\cdot f'(u)\right)p'(u)+\frac{q'^2(u)}{k^2} + f'^2(u) = k^2\left(1+\frac{r^2}{k^2}+f^2(u)\right)$$

wo die Striche immer die Differentiation nach u andeuten.

Aus diesen Gleichungen lassen sich 2 der willkürlichen Functionen, z. B. $p(u)$ und $q(u)$ durch die dritte $f(u)$ und die beiden Constanten k und r ausdrücken; eliminirt man nämlich aus der ersten Gleichung q' und subtrahirt den gefundenen Wert in die zweite, so erhält man für p' die quadratische Gleichung:

14) $$(1+f^2)p'^2+2ff'p'+\frac{f'^2}{1+\frac{r^2}{k^2}+f^2}\left(f^2+\frac{r^2}{k^2}\right)-r^2=0$$

Setzt man zur Abkürzung $\frac{r}{k}=\varkappa$, so folgt aus 14):

$$15) \qquad \frac{dp(u)}{du} = p'(u) = -\frac{ff'}{1+f^2} \pm \frac{\varkappa}{1+f^2}\sqrt{k^2(1+f^2)-\frac{f'^2}{1+\varkappa^2+f^2}}$$

woraus sich $p(u)$ mittelst einer blossen Quadratur bestimmen lässt, da f und f' allein Functionen von u sind. Durch eine nochmalige Quadratur ergiebt sich dann $q(u)$ aus:

$$16) \qquad \frac{dq(u)}{du} = q'(u) = -\frac{k^2}{r}\left[ff' + (1+\varkappa^2+f^2)p'\right]$$

Die Form 12) lässt sich sonach infolge der Willkürlichkeit von $f(u)$ bei gegebenen Constanten k und r auf einfach unendlich viele Arten transformiren in

$$17) \qquad \begin{aligned} ds^2 &= E(u)\, e^{2p(u)\,2kv}(du^2+dv^2) \\ &= e^{2\varphi(u)+2kv}(du^2+dv^2) \end{aligned}$$

d. i. auf die charakteristische Form 10) bringen.

Es erübrigt noch zu zeigen, dass man auch von der Lévy'schen Gleichungsform der allgemeinen Spiralfläche in § 7., 9)

$$18) \qquad \begin{aligned} x &= \varrho\cos\frac{1}{k}\left(r\log z + \psi\left(\frac{\varrho}{z}\right)\right) \\ y &= \varrho\sin\frac{1}{k}\left(r\log z + \psi\left(\frac{\varrho}{z}\right)\right) \\ z &= z \end{aligned}$$

ausgehend zu der charakteristischen Form 10) des Linienelementes der Fläche gelangt. Setzt man zur Abkürzung:

$$19) \qquad \frac{\varrho}{z} = u, \quad \text{i. e.} \quad d\varrho = z\,du + \mu\,dz$$

so folgt aus 18) für das Quadrat des Linienelements [1]):

$$20) \qquad \begin{aligned} ds^2 &= \left(1+\frac{u^2\psi'^2}{k^2}\right)d\varrho^2 + 2\frac{u^2}{k^2}\psi'(r-u\psi')\,d\varrho\,dz \\ &\qquad + \left[1+(r-\psi' u)^2\right]\frac{u^2}{k^2}dz^2 \\ &= A\,du^2 + 2M\,du\,dz + N\,dz^2 \end{aligned}$$

wo gesetzt ist

---

1) Vgl. Lévy, l. c. p. 790, (2).

Digitized by Google

20′ $$A = z^2\left(1+\frac{u^2\psi'^2}{k^2}\right)$$

$$M = \frac{zu}{k^2}(k^2+ru\psi')$$

$$N = \frac{u^2}{k^2}(1+k^2+r^2)$$

Um den Coefficienten M fortzuschaffen, führen wir eine neue Variabele v statt z ein durch die Gleichung:

21) $$z = f(u, v)$$

wo f eine noch zu bestimmende Function bezeichnet; die Gleichung 20) wird dann:

22) $$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

wo gesetzt ist:

22′) $$E = \frac{u^2}{k^2}[f_1^2+(f\psi'+f_1r)^2+(f+f_1u)^2]$$

$$F = \frac{u^2}{k^2}a^2f_1f_2+\frac{u}{k^2}ff_2(k^2+ru\psi')$$

$$G = \frac{u^2}{k^2}a^2f_2^2$$

unter a^2 die Constante $1+k^2+r^2$, unter f_1 und f_2 die partiellen Differentialquotienten von f nach u und v verstanden. Die Function f in 21) werde nun so bestimmt, dass:

23) $$F = 0$$

die Curven $u =$ const. und $v =$ const. also orthogonal sind; man erhält dann nach 22′):

24) $$\frac{f_1}{f} = \frac{\partial \log f}{\partial u} = \frac{-k^2-ru\psi'}{a^2u}$$

woraus durch Integration folgt:

25) $$\log f(u, v) = -\frac{k^2}{a^2}\log u - \frac{r}{a^2}\psi(u)+\frac{\chi(v)}{a}$$

unter $\chi(v)$ eine Integralfunction verstanden. Die quadratische Differentialform 22) wird damit:

Digitized by Google

$$26) \qquad ds^2 = \frac{n^2}{k^2} \cdot f^2(M\,du^2 + N dv^2)$$

wo gesetzt ist:

$$26') \qquad M = \frac{f_1^2}{f^2} + \left(\psi' + \frac{f_1}{f} r\right)^2 + \left(1 + \frac{f_1}{f} u\right)^2 = M(u)$$

$$N = \frac{f_2^2}{f^2} a^2 = \chi'^2(v)$$

Da M und N allein von u bzhw. von v abhangen, kann man setzen:

$$27) \qquad M(u)\,du^2 = d\mu^2$$
$$N(v)\,dv^2 = dv^2$$

woraus sich u und v als Functionen der neuen isometrischen Coordinaten μ und ν mittelst blosser Quadraturen bestimmen. Die Form 27) wird damit gemäss dem Werte 25) von f:

$$28) \qquad ds^2 = \frac{u^2}{k^2} e^{-2\frac{k^2}{a^2}\log u - 2r\frac{\psi(u)}{a^2} + 2\frac{\chi(v)}{a}} (d\mu^2 + dv^2)$$
$$= e^{2\varphi(u) + 2\,\text{const.}\,v}(d\mu^2 + dv^2)$$

d. i. wieder die charakteristische Form 10) in geänderter Bezeichnung: $u = \mu$, $v = \nu$ der Variabelen.

Führt man statt der isometrischen Coordinaten u und v die symmetrischen Coordinaten x und y ein vermöge der Substitution:

$$29) \qquad x = u + iv, \quad y = u - iv$$

so geht die charakteristische Form des Linienelements der Spiralflächen über in die zuerst von Herrn Lie gegebene Form [1]):

$$30) \qquad ds^2 = e^{\frac{k}{i}(x-y) + \varphi(x+y)}\, dx\, dy$$
$$= e^{2kiy + \left(\frac{k}{i}(x+y) + \varphi(x+y)\right)}\, dx\, dy$$
$$= e^{ay} \cdot \Phi(y+y) \cdot dx\, dy,$$

---

1) Vgl Lie. Mathem. Annalen. Bd. XX. p. 368. § 2.; die daselbst behandelte 1. Flächenclasse umfasst also die Spiralflächen und die auf sie abwickelbaren Flächen.

Digitized by Google

Ist speciell $k = 0$, so erhält man die bekannte Form des Linienelements der Rotationsflächen

31) $$ds^2 = e^{2q(u)} \cdot (du^2 + dv^2) = m^2(u) \cdot (du^2 + dv^2)$$

§ 9.

Das Linienelement der auf Spiralflächen abwickelbaren Flächen.

Nach § 8. hat das Quadrat des Linienelements der Spiralflächen die Form:

1) $$ds^2 = e^{2q(u)+2kv}(du^2 + dv^2)$$

Nach dem Begriff der Abwickelbarkeit kommt diese Form auch jeder Fläche zu, die auf eine Spiralfläche abgewickelt werden kann. Umgekehrt lässt sich aber auch zeigen, dass jede Fläche, die die Form 1) des Linienelements besitzt — unter k eine Constante, unter $\varphi(u) = \varphi_0(u)$ eine gegebene Function von u verstanden —, auf eine Spiralfläche abwickelbar ist. Denn nach § 8. lassen sich die arbiträren Functionen $p(u)$, $q(u)$, $f(u)$ einer allgemeinen Spiralfläche:

2) $$\left.\begin{aligned} x &= \varrho\cos\varphi \\ y &= \varrho\sin\varphi \\ z &= \varrho f(u) \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} \varrho &= e^{p(u)+kv} \\ \varphi &= \frac{q(u) + r(kv + p)}{k} \end{aligned}$$

stets so bestimmen, dass das Linienelement von 2) die Form erhält

3) $$ds^2 = e^{2q(u)+2kv}(du^2 + dv^2)$$

unter $\varphi(u)$ jetzt aber eine Function der 3 Grössen $f(u)$, k, r verstanden; man hat dazu nur die in § 8., 15) und 16) gegebenen Werte von $p(u)$ und $S(u)$ zu wählen. Da diese aber ausser k und r noch die arbiträre Function $f(u)$ enthalten, so hat man letztere nur so zu bestimmen, dass $\varphi(u)$ in 3) den gegebenen Wert $\varphi_0(u)$ erhält, was auf die Gleichung führt (vergl. § 8., 12') und 17)):

4) $$k^2\left(1 + \frac{r^2}{k^2} + f'^2(u)\right)e^{2p(u)} = e^{2\varphi_0(u)}$$

wo für $p(u)$ sein Wert aus § 8., 15) zu setzen ist. Hat man aus 4) $f(u)$ gefunden, also damit auch $p(u)$ und $q(u)$, bei dem gegebenen Wert von k und beliebigem r, so ist dadurch eine Spiralfläche 2) gegeben, die auf die Fläche 1) abgewickelt werden kann, da sie dieselbe Form des Linienelements hat. Mithin kann auch vice versa die Fläche 1) auf eine Spiralfläche 2) abgewickelt werden, q. e. d.

Digitized by Google

Da in 4) die Constante r noch willkürlich war, giebt es einfach unendlich viele Spiralflächen 2), die auf die vorgelegte Fläche 1), mithin auch auf einander abwickelbar sind [1]). Für den Specialfall $k = 0$ reducirt sich dieser Satz auf das bekannte Theorem von Bour, wonach es 2fach unendlich viele Schraubenflächen giebt, die auf eine vorgelegte Rotationsfläche abwickelbar sind.

§ 10.

Curven auf den Spiralflächen.

Unter den Curven auf einer Fläche sind von besonderem Interesse die Haupttangentencurven, Krümmungscurven und die geodätischen Linien. Beschäftigen wir uns kurz mit diesen Curven auf den Spiralflächen und den auf dieselben abwickelbaren Flächen.

Was zunächst die Haupttangenten- und Krümmungscurven dieser Flächen anlangt, so hat Lie allgemein gezeigt, dass die Haupttangenten- und Krümmungscurven jeder Fläche, die eine conforme und lineare infinitesimale Transformation gestattet, durch Quadraturen gefunden werden können [2]). Eine solche Fläche ist nun die allgemeine Spiralfläche, die sich als invariante Fläche der conformen projectiven infinitesimalen Transformation allen derartigen Anforderungen genügt, d. h. durch eine infinitesimale Spiraltransformation des Raumes in sich übergeht: dasselbe gilt auch von den allgemeinen Schraubenflächen, die die infinitesimale Schraubentransformation des Raumes gestatten, und den bezüglichen Spiralfällen der Rotations-, Kegel- und Cylinderflächen. Die Haupttangentencurven und die Krümmungscurven aller dieser Flächen können mithin durch Quadraturen gefunden werden [3]).

Was weiter die geodätischen Linien einer Fläche mit einer infinitesimalen Transformation anlangt, so hat Lie ebenfalls gezeigt, dass die geodätischen Linien einer solchen Fläche zu ihrer Bestimmung nur die Integration einer Differentialgleichung erster Ordnung, alsdann nur noch eine Quadratur erfordern [4]). Bildet man in der Tat die Differentialgleichung der geodätischen Linien der Spiralflächen aus der bekannten Eigenschaft der geodätischen Linien:

---

1) Vgl. Lévy, l. c. p. 790, wo das Linienelement der „pseudo-moulures-logarithmiques“ in der Form: $Adx^2 + 2Bdx\,dy + Cdy^2$ vorausgesetzt wird, unter A, B, C homogene Functionen vom Grade 0 in x und y verstanden.

2) Vgl. Lie, Mathem. Ann. Bd. IV, p. 84, Bd. V, p. 204 ff.

3) Vgl. Lie-Scheffers, l. c, p. 260 und 261.

4) Vgl. Lie, Mathem. Ann. Bd. V, p. 204, Bd XV, p 438.

Digitized by Google

1) $$\delta \int ds = \delta \int e^{q(u)+kv} \cdot \sqrt{1+u'^2}\, du = 0$$

unter u die unabhängige Variabele verstanden, so erhält man

2) $$\frac{dv'}{du} = (1+v'^2)\,(k + \varphi'(u) \cdot v')$$

mit

2') $$v' = \frac{dv}{du}, \quad \varphi'(u) = \frac{d\varphi(u)}{du}$$

welche Differentialgleichung in u und v' eine Differentialgleichung erster Ordnung ist. Darboux hat gezeigt, dass diese Differentialgleichung 1. Ordnung, die für den Spiralfall $k = 0$ der Rotationsflächen sofort auf eine Quadratur zurückführbar ist, in dem allgemeinen Falle auf eine Riccati'sche Differentialgleichung reducirt werden kann [1]); dasselbe gilt auch von der Differentialgleichung der geodätischen Linien einer jeden Fläche, der dasselbe Linienelement zukommt, wie den Spiralflächen, d. h. von allen auf Spiralflächen abwickelbaren Flächen. Hat das Integral der Riccati'schen Differentialgleichung dann etwa die Form:

3) $$f(u, v') = \text{const.}$$

so hat man nur noch eine Differentialgleichung 1. Ordnung in u und v, von welcher im Falle der Spiralflächen bekannt ist, dass ihre Integralcurven eine Transformation — eben die Spiraltransformation des Raumes — gestatten; nach einem Fundamentaltheorem von Lie [2]) ist 3) folglich durch eine Quadratur integrirbar.

§ 11.

Zusammenfassung des Entwickelten.

Die Betrachtungen dieses Abschnittes lassen sich in den Satz zusammenfassen:

II) „Das Linienelement der Spiralflächen und der auf diese „Flächen abwickelbaren Flächen lässt sich stets auf die „bringen:

$$ds^2 = e^{2q(u)+2kv}\,(du^2 + dv^2)$$

---

1) Vgl. Lie-Scheffers, l. c. p. 260, 373, Anm.

2) Vgl. Lie-Scheffers, l. c. p. 97, Theorem 8.

Digitized by Google

„unter k eine Constante, unter $\varphi(u)$ eine willkürliche Func-
„tion von u verstanden, und vice versa lässt sich jede
„Fläche mit derartiger Form des Linienelements auf jede
„von ∞^1 Spiralflächen abwickeln, so dass die obige Form
„des Linienelements für eine gewisse Flächenclasse cha-
„rakteristisch ist. Dabei sind die isometrischen Coordi-
„natencurven $u =$ const. Spirallinien, $v =$ const. orthogonale
„Trajectorien mit logarithmischen Spiralen als Projection
„auf eine Coordinatenebene."

„Die Haupttangenten- und Krümmungscurven der Spiral-
„flächen lassen sich durch Quadraturen; die geodätischen
„Linien der ganzen Flächenclasse durch Integration einer
„Riccati'schen Differentialgleichung bestimmen."

Dritter Abschnitt.

Die Theorie der Bewegung eines Punktes unter Einfluss einer Kräftefunction auf Oberflächen und die Spiralflächen.

§ 12.

Bedingungen einer infinitesimalen Transformation für die Bahncurven eines Punktes auf Oberflächen unter Einfluss einer Kräftefunction.

Die durch die Spiralfläche gekennzeichnete Flächenclasse steht in einer interessanten Beziehung zu der Theorie der Bewegung eines Punktes auf Oberflächen unter Einfluss einer Kräftefunction [1]).

Auf einer Oberfläche sei irgend ein Coordinatensystem u, v fixirt, in welchem das Quadrat des Linienelements sei:

$$1) \qquad ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

Die Kräftefunction sei

$$2) \qquad U = U(u, v)$$

Dann giebt das Princip von Hamilton die Differentialgleichung der Bahncurven eines bewegten Punktes auf der Fläche in der Form:

$$3) \qquad v'' = \omega(u, v, v')$$

unter u etwa die unabhängige Variabele verstanden, die Accente bezeichnen dann die Differentiation nach u.

---

1) Vgl. Staude, Leipz. Ber. 1892 vom 17. October, p. 429 ff.

Digitized by Google

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die ∞^2 Integralcurven der Differentialgleichung 2ter Ordnung sub 3) eine infinitesimale Transformation:

$$4) \qquad Tf = \xi(u, v)\frac{\partial f}{\partial u} + \eta\frac{\partial f}{\partial v}$$

zulassen, unter ξ und η Functionen von u, v verstanden, lautet dann nach Lie [1]):

$$5) \qquad \xi\frac{\partial w}{\partial u} + \eta\frac{\partial w}{\partial v} + \eta'\frac{\partial w}{\partial v'} - \eta'' = 0$$

mit der Abkürzung:

$$b') \qquad \eta' = \eta_1 + (\eta_2 - \xi_1)v' - \xi_2 v'^2$$
$$\eta'' = \eta_{11} + (2\eta_{12} - \xi_u)v' + (\eta_{22} - 2\xi_{12})v'^2 - \xi_u v'^3 + (\eta_2 2\xi_1 - 3\xi_2 v')v''$$

welche Gleichung vermöge 3) identisch in u, v, v' bestehen muss; man erhält so die identische Gleichung:

$$6) \qquad \xi\frac{\partial w}{\partial u} + \eta\frac{\partial w}{\partial v} + \eta'\frac{\partial w}{\partial v'} - \eta_{11} - (2\eta_{12} - \xi_{11})v' - (\eta_{22} - 2\xi_{12})v'^2 + \xi_{22}v'^3 - (\eta_2 - 2\xi_1 - 3\xi_2 v')w = 0$$

Dieselbe vereinfacht sich, wenn man für die willkürlichen Coordinaten u, v die kanonischen Coordinaten u, v von 4) einführt. Dann wird in den neuen Coordinaten [2]):

$$7) \qquad \xi = 0, \quad \eta = 1, \quad Tf = \frac{\partial f}{\partial v}$$

und die Gleichung 6) reducirt sich auf

$$8) \qquad \frac{\partial \omega}{\partial v} = 0$$

wo für ω sein Wert aus 3) zu setzen wäre.

Wir verlangen nun, dass die neuen Coordinaten ebenso wie die alten isometrische Coordinaten der Fläche sind, um die folgenden Betrachtungen zu vereinfachen. Dann werden die Gleichungen 1) und 3) bezüglich:

$$9) \qquad ds^2 = E(u, v)(du^2 + dv^2)$$

---

1) Vgl. Lie-Scheffers, l. c. p. 362, Theor. 34.

2) Vgl. Lie, l. c. I, p. 56, § 14; Lie-Scheffers, l. c. p. 225, Theor. 15.

Digitized by Google

10) $$v'' = (1 + v'^2)(p_2 - p_1 v') \equiv \omega(u, v, v')$$

wo gesetzt ist (h als Integrationsconstante gebraucht)

10′) $$p = \tfrac{1}{2}\log E + \tfrac{1}{2}\log(U + h)$$

und die Indices 1, 2 die partielle Differentiation nach u und v bezeichnen. Die identische Gleichung 8) gilt in den neuen Variabeln u, v, wo u = const. die Integralcurven der Differentialgleichung der Bahncurven von 4)

11) $$\xi dv - \eta du = 0$$

repräsentirt; damit nun die zweite kanonische Coordinate v mit der kanonischen Coordinate u ein orthogonales System bildet, ist notwendig und hinreichend, dass v = const Integralcurven der Differentialgleichung der orthogonalen Trajectorie von 11):

11′) $$\xi du + \eta dv = 0$$

darstellt; damit ferner in den neuen Coordinaten

12) $$ds^2 = E(u, v)(du^2 + dv^2)$$

wird, ist notwendig und hinreichend, dass die Differentialgleichungen 11) und 11′) denselben Multiplicator besitzen [1]); die Differentialgleichung des Multiplicators ergiebt als Bedingung dafür:

13) $$\xi_1 - \eta_2 = 0, \quad \xi_2 + \eta_1 = 0$$

welches nach § 2. die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür sind, dass die Transformation [1]) in den alten Coordinaten conform ist.

Man kann somit in den neuen Coordinaten auch setzen:

14) $$\pi = \tfrac{1}{2}\log E + \tfrac{1}{2}\log(U + h)$$

und die identische Gleichung 8) wird gemäss 10):

15) $$\pi_{22} - \pi_{12} \cdot v' = 0$$

d. i. nach 14):

15) $$w_{12} = 0, \quad w_{22} = 0$$
$$U_{12} = 0, \quad U_2 = 0$$

wenn zur Abkürzug

16) $$w = \log E$$

---

1) Vgl. Lie-Scheffers, l. c. p. 156, § 2.

Digitized by Google

gesetzt ist, und wenn verlangt wird, dass die Gleichung 15) nicht nur identisch in u, v, v', sondern auch identisch in h gelten soll, unter h die Integrationsconstante des Integrals der lebendigen Kraft verstanden, d. h wenn die ∞^2 Bahncurven unseres bewegten Punktes unabhängig von h die infinitesimale Transformation 7) gestatten.

Aus 15′) folgt

17) $$w = 2av + 2\varphi(u), \quad U = \psi(u)$$

unter $2a$ eine Integrationsconstante, unter $\varphi(u)$ und $\psi(u)$ beliebige Functionen von u verstanden.

Sollen also die ∞^2 Bahncurven des bewegten Punktes unabhängig von h eine infinitesimale Transformation gestatten, so ist dazu nach 12), 16) und 17) notwendig und hinreichend, dass auf der Fläche ein isometrisches Coordinatensystem u, v existirt, in welchen das Quadrat des Linienelements die Form annimmt:

18) $$ds^2 = e^{2\varphi(u)+2av}(du^2 + dv^2);$$

während die Kräftefunction zugleich die Form

18′) $$U = U(u)$$

haben muss. Das Symbol der infinitesimalen Transformation wird in diesem System:

$$Tf = \frac{\partial f}{\partial v}$$

so dass die Bahncurven $u =$ const der Transformatio zusammenfallen mit den Niveaulinien $U =$ const.

Für $U =$ const. überhaupt erhält man in 18) die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die ∞^2 geodätischen Linien einer Fläche eine conforme infinitesimale Transformation gestatten [1]).

§ 13.

Folgerungen für die Spiralflächen.

Im zweiten Abschnitt war gezeigt worden, dass die einzigen Flächen, deren Linienelemente die Form zukommt:

1) $$ds^2 = e^{2\varphi(u)+2av}(du^2 + dv^2)$$

die Spiralflächen und die auf sie abwickelbaren Flächen sind.

---

1) Vgl. Lie, Untersuchungen über geodätische Curven, Mathem. Annalen Bd. XX. p. 370. Satz 5 in § 2, wo nur statt isometrischer Coordinaten symmetrische Coordinaten angewandt sind.

Digitized by Google

Nach dem vorhergehenden Paragraphen bildet aber 1) in Verbindung mit der Gleichung:

$$U = U(u)$$

für die Kräftefunction die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die ∞^2 Bahncurven eines bewegten Punktes unter Einfluss einer Kräftefunction jederzeit eine infinitesimale Transformation gestatten.

Die notwendige Bedingung für eine derartige Eigenschaft der Bahncurven eines bewegten Punktes auf einer Fläche unter Einfluss einer Kräftefunction ist also die, dass die Fläche zu der durch die Spiralflächen gekennzeichneten allgemeinen Flächenclasse gehört. Da ferner für die Spiralflächen die Coordinatencurven u = const. nach § 8. Spirallinien sind, die gleichen Curven aber nach § 12. die Bahncurven derjenigen infinitesimalen Transformation sind, welche die ∞^2 Bahncurven des bewegten Punktes zulassen, so erhält man als derartige infinitesimale Transformation für die Spiralflächen die Spiraltransformation oder allgemeiner die conforme projective infinitesimale Transformation des Raumes, wie aus der Invarianz der Spiralflächen für eben diese infinitesimale Transformation vorherzusehen war; die Niveaulinien der Kräftefunction auf der Fläche müssen dann ebenfalls Spirallinien sein.

Ein einfaches Beispiel der Bewegung eines Punktes auf Oberflächen, wo die Bedingungen des § 12. erfüllt sind, ist die Bewegung eines Punktes auf einer Oberfläche, die durch Rotation irgend einer Curve um die z-Axe entsteht, unter Einfluss der Schwerkraft; die infinitesimale Transformation ist dann die infinitesimale Drehungstransformation um die z-Axe, ein specieller Fall der allgemeinen conformen projectiven infinitesimalen Transformation des Raumes; die Niveaulinien der Kräftefunction sind dann Parallelkreise um die Axe der Rotation.

Wie aber in dem angeführten Beispiele jede Niveaulinie bekanntlich Umhüllungscurve eines Systems von ∞^1 Bahncurven des bewegten Punktes sein kann [1]), so gilt auch allgemein der Satz, dass jede Niveaucurve des § 12. Umhüllungscurve eines Systems von ∞^1 Bahncurven des bewegten Punktes sein kann, dass also im Falle der Spiralflächen die Spirallinien selbst Umhüllungscurven von ∞ Bahncurven des bewegten Punktes sind.

---

1) Vgl. Pund, Ueber bedingt-periodische Bewegungen eines materiellen Punktes auf Oberflächen 2. Ordnung etc. Diss. 1893, § 2 und § 1 des ersten bzhw. zweiten Abschn.

Digitized by Google

Wie ferner in demselben Beispiel auch Bewegung auf einem Parallelkreis stattfinden kann, so gilt auch allgemein der Satz, dass jede Niveaucurve des § 12. im allgemeinen bei geeignetem Wert von h Bahncurve des Punktes sein kann, dass also im Falle der Spiralflächen die Spirallinien selbst Bahncurven des bewegten Punktes sein können.

Diese beiden Sätze sind von Herrn Staude des Näheren bewiesen worden [1]).

§ 14.

Zusammenfassung.

Wir fassen das Resultat unserer Entwicklungen in den Satz zusammen:

III) Die durch die Spiralflächen charakterisirte Flächenclasse ist die einzige, auf welcher die ∞^2 Bahncurven eines bewegten Punktes unter Einfluss einer Kräftefunction eine infinitesimale Transformation gestatten; die Kräftefunction selbst muss dabei die Form haben:

$$U = U(u)$$

unter u und v die isometrischen Coordinaten der Fläche verstanden".

1) Vgl. Staude, Leipz. Ber. 1892 vom 17. Octbr. p. 438 ff. §§ 4, 5.

V.

Dreizehn Auflösungen des Malfatti'schen Problems.

Fortsetzung von T. XIII., Nr. II.

Von

C. Davids.

VII. Auflösung.

$$d\Re = my + nz + 2\Re\sqrt{yz}$$
$$e\Re = nz + lx + 2\Re\sqrt{zx}$$
$$f\Re = lx + my + 2\Re\sqrt{xy}$$

Man gehe von der Ansicht aus, dass diese Gleichungen nur dann zu lösen sind, wenn die Ausdrücke xy, xz, yz wirkliche, durch die übrigen Grössen darstellbare Quadrate sind, und daher setze man

43) . . . Es sei $yz = s^2$
$xz = t^2$
$xy = u^2$

(dieses u von $u = PD$ zu unterscheiden), woraus folgt

44) . . . $xyz = stu$

$$x = \frac{tu}{s}$$

$$y = \frac{su}{t}$$

$$z = \frac{st}{u}$$

Digitized by Google

Es ist also

45) . . . $d\Re = \frac{sum}{t} + \frac{stn}{u} + 2\Re s$ oder $s = \frac{\Re dtu}{mu^2 + nt^2 + \Re ut}$

$$e\Re = \frac{tul}{s} + \frac{tsn}{u} + 2\Re t$$

$$f\Re = \frac{utl}{s} + \frac{usm}{t} + 2\Re u$$

Ferner

$$\Re(d+e-f) = \frac{2stn}{u} + 2\Re s + 2\Re t - 2\Re u$$

$$d+e-f = 2n$$

$$\Re s + \frac{stn}{u} = \Re n + \Re u - \Re t$$

46) . . . $\Re su + stn = \Re un + \Re u^2 - \Re ut$

oder

47) . . . $\begin{cases} s(\Re n + tn) = u\Re(n+u-t) \text{ oder } t(\Re u + ns) = u\Re(n+u-s) \\ t(\Re s + ul) = s\Re(l+s-u) \text{ oder } u(\Re s + tl) = s\Re(l+s-t) \\ u(\Re t + sm) = t\Re(m+t-s) \text{ oder } s(\Re t + mu) = t\Re(m+t-u) \end{cases}$

Wird nun die erste Gleichung links mit der zweiten Gleichung rechts multiplicirt, so kommt:

$$\Re^2 us + \Re tul + \Re stn + t^2 ln = \Re^2(ln + ns - nt + ul + us - ut - tl - st + t^2)$$

die dritte Gleichung:

$$\Re sum + \Re^2 tm = -\Re^2 ut - \Re^2 st + \Re^2 t^2$$

subtrahirt

48) . . . $\Re tul + \Re stn - \Re sum + t^2 ln = -\Re^2 t(l+m+n) + \Re^2(ln + ns + ul)$

Die dritte Gleichung mit ln multiplicirt und durch $\Re$ dividirt, giebt

49) . . . $utln + sn\Re(l+m+n) = \Re^2 t(l+m+n) + t^2 ln - stln$

Hierzu 48) addirt, giebt

$$\Re tul + \Re stn + tuln + \Re sul + \Re sun = -stln + \Re^2(ln + sn + ul)$$

Hierin

$tuln = \Re sln + \Re s^2n - \Re sun - stn$ zweite Gl. v.
$stln = \Re uln + \Re u^2f - \Re tul - \Re sul$ erste Gl. } subtrahirt

und dann durch $\Re$ dividirt

50) . . . $s^2n + u^2l + (s+u)ln = \Re(ln + sn + ul)$ *)

Diese Gleichung kann als eine solche betrachtet werden, die aus der ersten und zweiten Gleichung in 47) durch Elimination der Grösse t mittels der dritten Gleichung und mittels der Gleichung

$$lmn = u^2(l+m+n)$$

hervorgegangen ist. Wenn sie durch ln dividirt wird, so bemerkt man darin symmetrische Beziehungen. Es ist alsdann:

51) . . . $\frac{t^2}{l} + \frac{u^2}{n} + s + u = \Re + \frac{\Re s}{l} + \frac{\Re u}{n}$

Ebenso

$$\frac{t^2}{m} + \frac{u^3}{n} + l + u = \Re + \frac{\Re t}{m} + \frac{\Re u}{n}$$

subtrahirt.

$$\frac{s^2}{l} - \frac{t^3}{m} + s - t = \frac{\Re s}{l} - \frac{\Re t}{m}$$

$$s^2m - \Re sm + slm = t^2l - \Re tl + tlm \qquad lm$$

---

*) Besser von jetzt an so:

50) . . . $sn(s+l) + ul(u+n) = \Re[n(s+\frac{1}{2}l) + l(u+\frac{1}{2}n)]$

oder

$$\frac{2s(s+l)}{l} + \frac{2u(u+n)}{n} = \Re\left[\frac{2s+l}{l} + \frac{2u+n}{n}\right]$$

Ebenso

$$\frac{2s(s+l)}{l} + \frac{2t(l+m)}{m} = \Re\left[\frac{2s+l}{l} + \frac{2t+m}{m}\right]$$

addirt, und hiervon

$$\frac{2t(l+m)}{m} + \frac{2u(u+n)}{n} = \Re\left[\frac{2t+m}{m} + \frac{2u+n}{n}\right]$$

subtrahirt

$$\frac{4s(s+l)}{l} = \Re\left[\frac{4s+2l}{l}\right]$$

$$\frac{2s(s+l)}{2s+l} = \mathfrak{F} \qquad \text{(vergl. 56))}$$

Digitized by Google

52) . . . $\dfrac{s(s-\Re+l)}{l} = \dfrac{t(t-\Re+m)}{m} = \dfrac{u(u-\Re+n)}{n}$

[$= \frac{1}{2}\Re$, Anmerk. 14.]

Wird aus dem ersten und dritten Ausdruck eine Gleichung gebildet, und diese dann mit ln multiplicirt, so kommt:

$$s^2n-\Re sn+sln = u^2l-\Re ul+uln$$

Zu 50) addirt, giebt:

$$2s^2n+2sln = \Re ln+2\Re sn$$

n)

$$s^2+(l-\Re)s = \frac{\Re-l}{2} \pm \sqrt{\frac{l^2+\Re^2}{4}}$$

53) . . . $\sqrt{yz} = s = \dfrac{\Re+u-l}{2}$

Das Weitere nach Anmerkung 6.

Anmerkung 14. Es lassen sich aus dieser Entwicklung noch andere interessante Gleichungen ableiten. Wird z. B. die erste Gleichung 47) rechts mit der zweiten Gleichung links multiplicirt, nämlich:

$$t(\Re u+ns) = u\Re(n+u-s)$$

mit

$$s\Re(l+s-u) = t(\Re s+lu)$$

so kommt

54) . . . $s^2(2\Re u+ln+ns-nu)+\Re sul = u^2(2\Re s+ln+lu-ls)+\Re sun$

50 mit s

$$s^2n+su^2l+s^2ln+suln = \Re sln+\Re sul+\Re s^2n$$

und u^2 multiplicirt

$$\Re uln+\Re u^2l+\Re sun = s^2un+u^2tl+suln+u^2ln$$

subtrahirt

$$2\Re s^2u+2\Re sul-\Re uln-\Re u^2l = 2\Re su^2+2\Re sun-\Re sln-\Re s^2n$$

55) . . $2s^2u+2sul-uln-u^2l = 2su^2+2sun-sln-s^2n$

$$s^2(2u+n)-un(2s+l) = u^2(2s+l)-sl(2u+n)$$

$$(s^2+sl)(2u+n) = (u^2+un)(2s+l)$$

Digitized by Google

56) . . . $\frac{s(s+l)}{2s+l} = \frac{u(u+n)}{2u+n} = \frac{t(t+m)}{2t+m} = \frac{1}{2}\Re$

Dass die Ausdrücke in dieser Gleichung $= \frac{1}{2}\Re$ sind, ist am leichtesten aus 51) und 52) zu ersehen, denn in 51) ist:

$$\frac{s^2}{l} + s - \frac{\Re s}{l} + \frac{u^2}{n} + u - \frac{\Re u}{n} = \Re$$

$$\frac{s(s+l-\Re)}{l} + \frac{u(u+n-\Re)}{n} = \Re \quad \text{(vergl. 52)}$$

57) . . . $\frac{2s(s+l-\Re)}{l} = \Re \quad (52)$

Also

$$2s^2 + 2sl - 2\Re s = \Re l$$
$$2s(s+l) = \Re(2s+l)$$

58) . . . $\frac{s(s+l)}{2s+l} = \frac{1}{2}\Re = \frac{s(s+l-\Re)}{l} \quad (51)$

Diese letzte Gleichung enthält eigentlich 3 Gleichungen. Jede derselben führt direct auf das Resultat 52).

Ferner:

Wird die erste Gleichung in 47) mit s und die zweite mit u multiplicirt, so kommt:

$$su\Re(n+u-t) = s^2(\Re u + tn)$$
$$su\Re(l+s-u) = tu(\Re s + lu)$$

subtrahirt

$$\Re sun + 2\Re su^2 + tu^2 l = \Re sul + 2\Re s^2 u + s^2 tn$$

59) . . . $s^2(2\Re u + tn) + \Re sul = u^2(2\Re s + tl) + \Re sun$

subtrahirt von 54) giebt

$$s^2(ln + ns - nu - nl = u^2(ln + lu - ls - tl \qquad n)$$

60) . . . $\frac{s^2}{l}[l+s-t-u] = \frac{u^2}{n}[n+u-s-t]$

$$= \frac{t^2}{m}[m+t-s-u] = \frac{stu}{\Re}$$

Digitized by Google

(Zu diesem Resultat gelangt man auf einfachere Art dadurch, dass man von 47) nur eine einzige Gleichung benutzt, z. B. die zweite, indem man diese mit s multiplicirt).

Ferner:

Wenn die 3 Gleichungen in 47) — und zwar beide Partieen — mit einander multiplicirt werden, so ergiebt sich:

$$61) \quad \ldots \frac{(l+s-u)(m+t-s)(n+u-t)}{(\Re s+ul)(\Re t+ms)(\Re u+nt)}$$

$$= \frac{(l+s-t)(m+t-u)(n+u-s)}{(\Re s+lt)(\Re t+mu)(\Re u+ns)}$$

das Pr. der Zähler $= 423 \,.\, 23 \,.\, 234 \,.\, 251$

und zwar ist, wie sich beweisen lässt, das Product der 3 Zähler der rechten Seite dem Product der 3 Zähler der linken Seite gleich; nämlich:

$$62) \quad \ldots (l+s-u)(m+t-s)(n+u-t)$$
$$= (l+s-t)(m+t-u)(n+u-s)$$

Beweis. Werden die Multiplicationen ausgeführt, so kommt:

$$\left.\begin{array}{l} lmn+mns+lnt+lmu \\ \quad +lut+mus+nst \\ +s^2t+t^2u+u^2s-u^2l-t^2s-s^2u \\ \quad -s^2n-mu^2-t^2l \\ +lst+mtu+nsu-lsu-mst-ntu \\ -sln-tlm-umn \end{array}\right\}$$

$$= \left\{\begin{array}{l} lmn+mns+lnt+lmu \\ \quad +lut+mus+nst \\ +s^2u+u^2t+t^2s-s^2t-t^2u-u^2s \\ \quad -s^2m-u^2l-t^2n \\ -lst-mtu-nus+lsu+mst+ntu \\ -slm-tmn-uln \end{array}\right.$$

Digitized by Google

Werden die mit einander übereinstimmenden Glieder weggelassen und die übrigen Glieder geordnet, so erhält man:

$$63) \ldots \left\{ \begin{array}{l} 2s^2t + 2t^2u + 2u^2s \\ + 2stl + 2tum + 2usn \\ + s^2m + t^2n + u^2l \\ + lsm + tmn + uln \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} 2s^2u + 2t^2s + 2u^2t \\ + 2sul + 2tsm + 2utn \\ + s^2n + t^2l + u^2m \\ + sln + tlm + umn \end{array} \right\}$$

Nun ist nach 56)

$$s(s+l)(2t+m) = t(t+m)(2s+l)$$

oder

$$64) \ldots 2s^2t + 2stl + s^2m + slm = 2t^2s + 2tsm + t^2l + tlm$$

u. s. w.

woraus die in 62) aufgestellte Behauptung einleuchtet.

Weiter folgt nun auch noch, dass die Producte de-Nenner in 61) einander gleich sind.

Für weitere Untersuchungen ist es vielleicht beachtenswert, dass in der Gleichung 62) eigentlich nur 2 unbekannte Grössen vorkommen; denn es treten die Grössen s, t, u in ihren Verbindungen mit einander nur als Differenzen auf und nicht jede Grösse einzeln für sich; die dritte Differenz bestimmt sich daher aus den beiden andern Differenzen. Ist z. B.

$$s - u = p \quad \text{und} \quad u - t = q$$

so ist

$$t - r = -(p+q)$$

Daher können die Grössen s, t, u in Gleichung 62) auch beliebig erhöht oder erniedrigt werden, allerdings unter der Bedingung, dass alle 3 Grössen s, t, n gleich viel erhöht oder erniedrigt werden.

Anmerkung 15. Für weitere Untersuchungen noch folgende Gleichungen:

Digitized by Google

$$65) \ldots \left\{\begin{matrix} \Re l u^2 t + s^2 tmn \\ + \Re m s^2 u + tun \\ + \Re n t^2 s + u^2 stm \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} \Re l t^2 u + s^2 umn \\ + \Re m u^2 s + t^2 sln \\ + \Re n s^2 t + u^2 tlm \end{matrix}\right\}$$

[Die Producte der Nenner in 51).]

$$66) \ldots \left\{\begin{matrix} mny\sqrt{z} + \Re lz\sqrt{z} \\ + lmx\sqrt{y} + \Re nz\sqrt{y} \\ + lnz\sqrt{x} + \Re my\sqrt{x} \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} mnz\sqrt{y} + \Re lx\sqrt{y} \\ + lmy\sqrt{x} + \Re my\sqrt{z} \\ + lnx\sqrt{z} + \Re nz\sqrt{x} \end{matrix}\right\}$$

[Die Producte der Gleichungen 4).]

Oder

$$67) \ldots \left\{\begin{matrix} (lx - my)(n - \Re)\sqrt{z} \\ + (nz - lx)(m - \Re)\sqrt{y} \\ + (my - nz)(l - \Re)\sqrt{x} \end{matrix}\right\} = 0$$

Die Gleichungen 17) geordnet

$$68) \ldots \left\{\begin{matrix} u(d\sqrt{x} - v\sqrt{y}) = w(f\sqrt{z} - v\sqrt{y}) \\ v(e\sqrt{y} - w\sqrt{z}) = u(d\sqrt{x} - w\sqrt{z}) \\ w(f\sqrt{z} - u\sqrt{x}) = v(e\sqrt{y} - u\sqrt{x}) \end{matrix}\right.$$

Aus 68) und 70) lässt sich durch Multiplication und Addirung ableiten:

$$\left\{\begin{matrix} m(\Re + u)\sqrt{xy} \\ + n(\Re + v)\sqrt{yz} \\ + l(\Re + w)\sqrt{xz} \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} l(\Re + v)\sqrt{xy} \\ + m(\Re + w)\sqrt{yz} \\ + n(\Re + u)\sqrt{xz} \end{matrix}\right\}$$

und dann mit einander multiplicirt, giebt:

$$69) \ldots \left\{\begin{matrix} (de + uv)x\sqrt{y} \\ + (ef + vw)y\sqrt{z} \\ + (fd + uw)z\sqrt{x} \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} (de + uv)y\sqrt{x} \\ + (ef + vw)z\sqrt{y} \\ + (fd + uw)x\sqrt{z} \end{matrix}\right\}$$

Wenn die Gleichungen 68) mit $\Re$ multiplicirt und dann die Formeln 204) angewendet werden, so verwandeln sie sich in

$$70) \ldots \left\{\begin{matrix} vw[l\sqrt{x} + \Re\sqrt{y}] = uw[n\sqrt{z} + \Re\sqrt{y}] \\ uw[g\sqrt{z} + \Re\sqrt{x}] = uw[m\sqrt{y} + \Re\sqrt{x}] \\ uw[m\sqrt{y} + \Re\sqrt{z}] = vw[l\sqrt{x} + \Re\sqrt{z}] \end{matrix}\right.$$

mit einander multiplicirt, kommt:

Digitized by Google

$$71) \ldots \left\{ \begin{array}{l} (m-\Re)lx\sqrt{y} \\ +(n-\Re)my\sqrt{z} \\ +(l-\Re)nz\sqrt{x} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} (l-\Re)my\sqrt{x} \\ +(m-\Re)nz\sqrt{y} \\ +(n-\Re)lx\sqrt{z} \end{array} \right.$$

Oder:

$$72) \ldots \left\{ \begin{array}{l} (lx-my)(n-\Re)\sqrt{z} \\ +(my-nz)(l-\Re)\sqrt{x} \\ +(nz-lx)(m-\Re)\sqrt{y} \end{array} \right\} = 0$$

Die Gleichungen 17) oder 68) ergeben ferner

$$73) \ldots uv\sqrt{x} + vw\sqrt{y} + wu\sqrt{z} = uw\sqrt{x} + vu\sqrt{y} + wv\sqrt{z}$$

Anmerkung 16. Die VII. Auflösung kann natürlich auch ohne Vereinfachung der Ausdrücke ausgeführt werden, und zwar folgender Gestalt. Wenn die dritte Grundgleichung von der Summe der beiden anderen subtrahirt wird, so kommt statt

$$17) \qquad \sqrt{yz} = \frac{\Re(n+\sqrt{xy}-\sqrt{xz})\sqrt{y}}{\Re\sqrt{y}+n\sqrt{z}}$$

auch:

$$\sqrt{yz} = \frac{\Re(m+\sqrt{xz}-\sqrt{xy})\sqrt{z}}{\Re\sqrt{z}+m\sqrt{y}}$$

daher

$$(n+\sqrt{xy}-\sqrt{xz})\sqrt{y}(\Re\sqrt{z}+m\sqrt{y}) = (m+\sqrt{xz}-xy)\sqrt{z}(\Re\sqrt{y}+n\sqrt{z})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Re n\sqrt{yz}+\Re y\sqrt{xz}-\Re z\sqrt{xz} \\ +mny+my\sqrt{xy}-my\sqrt{xz} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \Re m\sqrt{yz}+\Re z\sqrt{xy}-\Re y\sqrt{xz} \\ +nnz+nz\sqrt{xz}-nz\sqrt{xy} \end{array} \right.$$

oder

$$2\Re y\sqrt{xz}+mny+my\sqrt{xy}-my\sqrt{xz}+\Re n\sqrt{yz} = 2\Re z\sqrt{xy}+mnz+nz\sqrt{xz}-nz\sqrt{xy}+\Re m\sqrt{yz}$$

$$\alpha) \quad y[2\Re\sqrt{xz}+mn+m\sqrt{xy}-m\sqrt{xz}]+\Re n\sqrt{yz} = z[2\Re\sqrt{xy}+mn+n\sqrt{xz}-n\sqrt{xy}]+\Re m\sqrt{yz}$$

$$\beta) \quad x[2\Re\sqrt{yz}+ln+l\sqrt{xy}-l\sqrt{yz}]+\Re n\sqrt{xz} = z[2\Re\sqrt{xy}+ln+n\sqrt{yz}-n\sqrt{xy}]+\Re l\sqrt{xz}$$

Digitized by Google

In 47) ist

$$\left.\begin{array}{l}\gamma) \quad \mathfrak{R}\sqrt{yz} + nz = \mathfrak{R}(n + \sqrt{xy} - \sqrt{xz}) \\ \text{auch} \\ \qquad \mathfrak{R}\sqrt{xy} + lx = \mathfrak{R}(l + \sqrt{yz} - \sqrt{xz})\end{array}\right\} \text{multiplicirt.}$$

$$\mathfrak{R}nz\sqrt{xy} + \mathfrak{R}lx\sqrt{yz} + lnxz$$
$$= \mathfrak{R}^2[ln + l\sqrt{xy} - l\sqrt{xz} + n\sqrt{yz} - z\sqrt{xy}]$$
$$- n\sqrt{xz} - x\sqrt{yz} + xz$$

Nun ist auch

$$\mathfrak{R}\sqrt{xy} + my = \mathfrak{R}(m + \sqrt{xz} - \sqrt{yz})$$
$$\mathfrak{R}\sqrt{xz}$$

$$\mathfrak{R}^2\sqrt{xy}\,.\,\sqrt{xz} + \mathfrak{R}my\sqrt{xz}$$
$$= {}^2m\sqrt{xz} + \mathfrak{R}^2xz - \mathfrak{R}^2\sqrt{yz}\,.\,\sqrt{xz}$$

Diese Gleichung von der vorigen subtrahirt:

$$\mathfrak{R}nz\sqrt{xy} + \mathfrak{R}lx\sqrt{yz} + lnxz - \mathfrak{R}^2\sqrt{xy}\,.\,\sqrt{xz} - \mathfrak{R}my\sqrt{xz}$$
$$= \mathfrak{R}^2[ln + n\sqrt{yz} - n\sqrt{xz} + l\sqrt{xy} - l\sqrt{xz} - z\sqrt{xy}]$$
$$- x\sqrt{yz} + xz$$
$$- \mathfrak{R}^2m\sqrt{xz} - \mathfrak{R}^2xz + \mathfrak{R}^2z\sqrt{xy}$$

statt 48)

$$\mathfrak{R}nz\sqrt{xy} + \mathfrak{R}lx\sqrt{yz} + lnxz - \mathfrak{R}my\sqrt{xz}$$
$$= \mathfrak{R}^2[ln - n\sqrt{yz} + l\sqrt{xy}] - \mathfrak{R}^2\sqrt{xz}\,.\,(+m+n)$$

Wird nun die Gleichung

$$\mathfrak{R}\sqrt{xy} + my = \mathfrak{R}(m + \sqrt{xz} - \sqrt{yz})$$

mit ln multiplicirt, so kommt statt 49)

$$\mathfrak{R}ln\sqrt{xy} + \mathfrak{R}^2(l+m+n)y \qquad \mathfrak{R}$$
$$= \mathfrak{R}lmn\,\mathfrak{R}ln\sqrt{xz} - \mathfrak{R}ln\sqrt{yz} \qquad \sqrt{xz}$$

$$ln\sqrt{xy}\,.\,\sqrt{xz} + \mathfrak{R}(l+m+n)y\,.\,\sqrt{xz}$$
$$= \mathfrak{R}^2(l+m+n)\sqrt{xz} + lnxz - lnz\sqrt{xy}$$

Hierzu 98) addirt, giebt

Digitized by Google

$$\left.\begin{aligned}&\Re lx\sqrt{yz}+\Re nz\sqrt{xy}+ln\sqrt{xy}\,.\,\sqrt{xz}\\&\quad+\Re ly\sqrt{xz}+\Re ny\sqrt{xz}\end{aligned}\right\}$$
$$=\Re^2[ln+n\sqrt{yz}+l\sqrt{xy}]-lnz\sqrt{xy}$$

substituirt:

$$lx=\Re(l+\sqrt{yz}-\sqrt{xz})-\Re\sqrt{xy}$$

(unter 47)) mit $n\sqrt{yz}$ multiplicirt

substituirt:

$$nz=\Re(n+\sqrt{xy}-\sqrt{xz})-\Re\sqrt{yz}$$

mit $l\sqrt{xy}$ multiplicirt

$\Re$

statt 50)

$$nyz+ln\sqrt{yz}=\Re[ln+n\sqrt{yz}+l\sqrt{xy}]-ln\sqrt{xy}-lxy$$

Wird nun 47) β) mit $\sqrt{y}$ multiplicirt, so kommt

$$x[2\Re y\sqrt{z}+ln\sqrt{y}+ly\sqrt{x}-ly\sqrt{z}]+\Re n\sqrt{xyz}$$
$$=z[2\Re y\sqrt{x}+ln\sqrt{y}+ny\sqrt{z}-nk\sqrt{x}]+\Re l\sqrt{xyz}$$

$$nyz\sqrt{z}+lxy\sqrt{x}+ln\sqrt{xy}+lnx\sqrt{y}$$
$$=\Re ln\sqrt{x}+\Re n\sqrt{xyz}+\Re lx\sqrt{y}\qquad(50\text{ mit }\sqrt{x})$$

$$\Re ln\sqrt{z}+\Re nz\sqrt{y}+\Re l\sqrt{xyz}$$
$$=nyz\pm z+lxy\sqrt{y}+ln\sqrt{xyz}\qquad(50\text{ mit }\sqrt{z})$$

$$2\Re xy\sqrt{z}+2\Re n\sqrt{xyz}-\Re ln\sqrt{z}-\Re nz\sqrt{y}$$
$$=2\Re yz\sqrt{x}+2\Re l\sqrt{xyz}-\Re ln\sqrt{x}-\Re lx\sqrt{y}$$

$\Re$

$$2xy\sqrt{z}+2n\sqrt{xyz}-ln\sqrt{z}-nz\sqrt{y}$$
$$-2yz\sqrt{x}+2l\sqrt{xyz}-ln\sqrt{x}-lx\sqrt{y}$$

$\sqrt{xy}$

$$2xy\sqrt{yz}+2n\sqrt{xy}\,.\,\sqrt{yz}-ln\sqrt{yz}-nyz$$
$$=2yz\sqrt{xy}+2l\sqrt{xy}\,.\,\sqrt{yz}-ln\sqrt{xy}-lxy$$

$$2xy\sqrt{yz}+2n\sqrt{xy}\,.\,\sqrt{yz}+ln\sqrt{xy}+lxy$$
$$=2yz\sqrt{xy}+2l\sqrt{xy}\,.\,\sqrt{yz}+ln\sqrt{yz}+nyz$$

$$xy(2\sqrt{yz}+l)+n\sqrt{xy}\,(2\sqrt{yz}+l)$$
$$=yz(2\sqrt{xy}+n)+l\sqrt{yz}\,(2\sqrt{xy}+n)$$

Digitized by Google

$$(xy + n\sqrt{xy})(2\sqrt{yz} + l) = (yz + l\sqrt{yz})(2\sqrt{xy} + n)$$

statt 56)

$$\frac{xy + n\sqrt{xy}}{2\sqrt{xy} + n} = \frac{yz + l\sqrt{yz}}{2\sqrt{yz} + l} = \frac{xz + m\sqrt{xz}}{2\sqrt{xz} + m}$$

Anmerkung 17. Die Auflösungen in VII. zeichnen sich dadurch aus, dass die Quadratwurzel erst gegen Ende der Entwicklung eines Hauptresultats ausgegangen wird.

Dass diese Ausdrücke $= \frac{1}{2}\Re$ sind, kann leicht aus 50) und 56) abgeleitet werden. Also:

$$\frac{xy + n\sqrt{xy}}{2\sqrt{xy} + n} = \tfrac{1}{2}\Re$$

$$xy + (n - \Re)\sqrt{xy} = \frac{\Re n}{2}$$

$$\sqrt{xy} = \frac{\Re - n}{2} + \sqrt{\frac{2\Re n + n^2 - 2\Re n + \Re^2}{4}}$$

$$\sqrt{xy} = \frac{\Re - n}{2} + \frac{w}{2} = \frac{\Re + w - n}{2}$$

VIII. Auflösung.

In dieser Auflösung sollen x, y, z nicht die Radien der gesuchten Kreise, sondern die Abstände der Mittelpunkte dieser Kreise von dem Punkte P bezeichnen; ferner sollen h, s, t die Seiten des Dreiecks LMN bedeuten. Die übrigen Grössen, nämlich d, e, f, l, m, n, u, v, w sollen ihre bisherige Bedeutung beibehalten.

In einem jeden Dreieck, wie D. E, P, in welchem beliebig eine Querlinie LM gezogen ist, ist

75) .
$$\left\{\begin{array}{l} (s+x-y)(s+y-x)uv = (f+u-v)(f+v-u)xy \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{Ebenso:} \\ (h+y-z)(h+z-y)vw = (d+v-w)(d+w-v)yz \\ (t+z-x)(t+x-z)uw = (e+w-u)(e+u-w)xz \end{array}\right.$$

Diese Gleichungen gelten also ganz allgemein. Aus der ersten dieser Gleichungen geht hervor:

Digitized by Google

$$s^2 = \frac{2(lm - \Re^2)}{uv} xy + x^2 + y^2$$

und hieraus wiederum, wenn u, v, w winkelhalbirende Linien sind:

$$76) \ldots \left\{ \begin{array}{l} s^2 w = 2\Re xy + (x^2 + y^2)w \\ h^2 u = 2\Re yz + (y^2 + z^2)u \\ t^2 v = 2\Re xz + (x^2 + z^2)v \end{array} \right\} \text{erste Bedingung}$$

Diese 3 Gleichungen sprechen die Bedingung aus, dass die Mittelpunkte der gesuchten Kreise sich auf den Linien u, v, w befinden, welche die Winkel des Dreiecks DEF halbiren.

Nun ist ferner:

$$DL : LL' = DP : \Re$$

oder

$$u - x : LL' = u : \Re$$

also

$$LL' = \frac{(u - x)\Re}{u}$$

Ebenso

$$MM' = \left(\frac{v - y}{v}\right) \Re$$

addirt. Folglich

$$77) \ldots \left\{ \begin{array}{l} s = 2\Re - \frac{\Re x}{u} - \frac{\Re y}{v} \\ h = 2\Re - \frac{\Re y}{v} - \frac{\Re z}{w} \\ t = 2\Re - \frac{\Re x}{u} - \frac{\Re z}{w} \end{array} \right\} \text{zweite Bedingung.}$$

Jede dieser 3 Gleichungen enthält die Bedingung, dass zwei Kreise sich gegenseitig und auch die gemeinschaftliche Seite berühren. Die Gleichungen 76) und 77) sind also Grundgleichungen. Sie enthalten 6 unbekannte Grössen in 6 Gleichungen.

Aus 77) ergiebt sich sehr leicht:

$$78) \ldots s - \frac{\Re z}{w} = h - \frac{\Re x}{u} = t - \frac{\Re y}{v} = \frac{s + h + t}{2} - \Re$$

$$\frac{\Re}{w} = \frac{s^2 - x^2 - y^2}{2xy} \qquad \frac{\Re}{u} = \frac{h^2 - y^2 - z^2}{2yz} \qquad (76)$$

Digitized by Google

$$s - \frac{(s^2 - x^2 - y^2)z}{2xy} = h - \frac{(h^2 - y^2 - z^2)x}{2yz}$$

$$2xyz$$

$$s \cdot 2xyz - (s^2 - x^2 - y^2)z^2 = h \cdot 2xyz - (h^2 - y^2 - z^2)x^2$$

$$s^2z^2 - 2xy \cdot zs + x^2y^2 = h^2x^2 - 2yz \cdot xh + y^2z^2$$

$$sz - xy = hx - yz = ty - xz$$

Nach dieser Gleichung ist nun

$$s = \frac{ty - xz + xy}{z}$$

daher

$$s + x - y = \frac{ty - xz + xy + xz - yz}{z}$$

oder

$$80) \ldots \begin{cases} s + x - y = \dfrac{(t + x - z)y}{z}, & \text{ebenso} \\ s + y - x = \dfrac{(h + y - z)x}{z} \end{cases}$$

Werden diese beiden Gleichungen in der ersten Gleichung von 75) substituirt, so erhält man:

$$\frac{(t + x - z)y}{x} \cdot \frac{(h + y - z)x}{z} uv = (f^2 - u^2 + 2uv - z^2)xy$$

$$(t + x - z)(h + y - x) = \frac{(f^2 - u^2 - v^2 + 2uv)z^2}{uv}$$

$$th + hx - yz - hz + xy + z^2 + ty - xz - tz = 2z^2 + \frac{(f^2 - u^2 - v^2)}{uv} z^2$$

$$hx - yz = sz - xy$$

$$ty - xz = sz - xy$$

$$\frac{f^2 - u^2 - v^2}{uv} = \frac{2\Re}{v} \qquad = \frac{2\Re + s - h - t}{z} \qquad (78)$$

$$th + (2s - h - t)z - xy = z^2 + (2\Re + s - h - t)z$$

$$81) \ldots \begin{cases} ht - xy = z(z + 2\Re - s) & \text{Ebenso:} \\ sh - xz = y(y + 2\Re - t) \\ st - yx = x(x + 2\Re - h) \end{cases}$$

Nimmt man zu diesen Gleichungen die Gleichungen von 79 zu Hülfe, so geht daraus hervor:

$$82) \ldots x(x + 2\Re) - st = y(y + 2\Re) - sh = z(z + 2\Re) - ht$$
$$= \Re(r' + r'' + r''' - \Re)$$

Digitized by Google

Nun multiplicire man je zwei Gleichungen 77) miteinander. Es kommt:

$$83) \ldots st+2\frac{\Re^2 x}{u}-\frac{\Re^2 x^2}{u^2}=sh+\frac{2\Re^2 y}{v}-\frac{\Re^2 y^2}{v^2}=th+\frac{2\Re^2 z}{w}-\frac{\Re^2 z^2}{w^2}$$
$$=\Re^2+\frac{(2sh+2st+2ht-s^2-h^2-t^2)}{4}$$

Wird diese Gleichung zu der vorigen addirt, so kommt:

$$84) \ldots x^2+2\Re x+\frac{\Re^2 x}{u}-\frac{\Re^2 x^2}{u^2}=y^2+2\Re y+\frac{2\Re^2 y}{v}-\frac{\Re^2 y^2}{v^2}$$
$$=z^2+2\Re z+\frac{2\Re^2 z}{w}-\frac{\Re^2 z^2}{w^2}$$

Oder:

$$85) \ldots \frac{l^2x^2}{u^2}+\frac{2\Re(u+\Re)}{u}x=\frac{m^2y^2}{v^2}+\frac{2\Re(v+\Re)}{v}y=\frac{n^2z^2}{w^2}$$
$$+\frac{2\Re(w+\Re)}{w}z$$
$$=\Re(r'+r''+r''')+xy+xz+yz \text{ (Radien)}$$

Ferner ist nach 77):

$$s=\frac{\Re(u-x)}{u}+\frac{\Re(v-y)}{v}$$

und folglich

$$s^2w=\frac{\Re^2(u-x)^2}{u^2}w+\frac{\Re^2(v-y)^2}{v^2}w+\frac{2\Re^2(u-x)(v-y)}{uv}$$
$$=2\Re xh+(x^2+y^2)w \quad (76)$$

$$\left.\begin{aligned}\Re^2w-\frac{2\Re^2wx}{u}+\Re^2w-\frac{2\Re^2wy}{v}+2\Re^2w\left(1-\frac{x}{u}-\frac{y}{v}+\frac{xy}{uv}\right)\\+\frac{\Re^2x^2}{w^2}w\qquad+\frac{\Re^2y^2}{v^2}w\end{aligned}\right\}$$
$$=\frac{2\Re uvxy}{uv}+(x^2+y^2)w$$

$$\left.\begin{aligned}4\Re^2-\frac{2\Re^2x}{u}+\frac{\Re^2x^2}{u^2}-\frac{2\Re^2y}{v}+\frac{\Re^2y^2}{v^2}=2\Re^2\left(\frac{x}{u}+\frac{y}{v}\right)\\+\frac{2\Re^2xy}{uv}\end{aligned}\right\}$$
$$-\frac{2lmxy}{uv}-\frac{2\Re^2xy}{uv}+x^2+y^2$$

$$4\Re^2-4\Re^2\left(\frac{x}{u}+\frac{y}{v}\right)+\frac{\Re^2x^2}{u^2}+\frac{\Re^2y^2}{v^2}+\frac{4\Re^2xy}{uv}=\frac{2lmxy}{uv}+\frac{u^2x^2}{u^2}+\frac{v^2y^2}{v^2}$$

Digitized by Google

86) . . . $4\Re^2\left(1-\frac{x}{u}-\frac{y}{v}+\frac{xy}{uv}\right)=\frac{l^2x^2}{u^2}+\frac{2lmxy}{uv}+\frac{m^2y^2}{v^2}$

Oder

87) . . . $\frac{lx}{u}+\frac{my}{v}=2\Re\sqrt{\frac{(u-x)\,(v-y)}{uv}}$ $=\Re+w-a$

Man hat nun in 85) und 87) zwei Gleichungen mit zwei unbekannten Grössen x, y. Die Auflösung derselben kann auf folgende Art ausgeführt werden. Nach 85) ist:

88) . . . $\frac{l^2x^2}{u^2}-\frac{m^2y^2}{v^2}+2\Re^2\left(\frac{x}{u}-\frac{y}{v}\right)=2\Re(y-x)$ quadrirt

$$\left.\begin{aligned}&\frac{l^4x^4}{u^4}-2\frac{l^2m^2x^2y^2}{u^2v^2}+4\Re^2\left(\frac{l^2x^2}{u^2}-\frac{m^2y^2}{v^2}\right)\left(\frac{x}{u}-\frac{y}{v}\right)\\+&\frac{m^2y^2}{v^2}\qquad\qquad+4\Re^4\left(\frac{x^2}{u^2}-\frac{2xy}{uv}+\frac{y^2}{v^2}\right)\end{aligned}\right\}=4\Re^2(y^2-2xy+x^2)$$

$$2\Re^4\left(\frac{x^2}{u^2}-\frac{2xy}{uv}+\frac{y^2}{v^2}\right)=4\Re^2\left(\frac{\Re^2x^2}{u^2}+\frac{\Re^2y^2}{v^2}\right)-\frac{8\Re^4xy}{uv}$$

$$=4\Re^2\frac{(u^2-l^2)x^2}{u^2}+4\Re^2\frac{(v^2-m^2)y^2}{v^2}-\frac{8\Re^4xy}{uv}$$

$$\left.\begin{aligned}&\left(\frac{l^2x^2}{u^2}-\frac{m^2y^2}{v^2}\right)^2+4\Re^2\left(\frac{l^2x^2}{u^2}-\frac{m^2y^2}{v^2}\right)\left(\frac{x}{u}-\frac{y}{v}\right)\\&\quad-\frac{4\Re^2l^2x^2}{u^2}-\frac{4\Re^2m^2y^2}{v^2}-\frac{8\Re^4xy}{uv}\\&\quad+4\Re^2x^2+4\Re^2y^2\end{aligned}\right\}=4\Re^2(x^2-2xy+y^2)$$

$$\left.\begin{aligned}&\left(\frac{l^2x^2}{u^2}-\frac{m^2y^2}{v^2}\right)^2+4\Re^2\left(\frac{l^2x^2}{u^2}-\frac{m^2y^2}{v^2}\right)\left(\frac{x}{u}-\frac{y}{v}\right)\\&\quad-4\Re^2\left(\frac{l^2x^2}{u^2}+\frac{m^2y^2}{y^2}\right)\end{aligned}\right\}=\frac{8\Re^4xy}{uv}-8\Re^2xy$$

$$\left(\frac{l^2x^2}{u^2}-\frac{m^2y^2}{v^2}\right)^2=\left(\frac{lx}{u}+\frac{my}{v}\right)^2\left(\frac{lx}{v}-\frac{my}{v}\right)$$

$$=4\Re^2\left(1-\frac{x}{u}-\frac{y}{v}+\frac{x}{v}\right)\left(\frac{x}{u}-\frac{my}{v^2}\right)$$

Digitized by Google

$$\left.\begin{aligned}&\left(1-\frac{x}{u}-\frac{y}{v}+\frac{xy}{uv}\right)\left(\frac{l^2x^2}{u^2}-\frac{2lmxy}{uv}+\frac{m^2h^2}{v^2}\right)\\&\qquad+\frac{l^3x^2}{u^2}\cdot\frac{x}{u}+\frac{m^2y^2}{v^2}\cdot\frac{y}{v}-\frac{m^2y^2}{v^2}\cdot\frac{x}{u}-\frac{l^2x^2}{u^2}\cdot\frac{y}{v}\\&-\left(\frac{l^3x^2}{u^2}+\frac{m^2y^2}{v^2}\right)\qquad-\frac{2\Re^2xy}{uv}+2xy\end{aligned}\right\}=0$$

$$\left.\begin{aligned}&-\frac{2lmxy}{uv}+\frac{2lmxy}{uv}\left(\frac{x}{u}+\frac{y}{v}\right)-2lm\frac{x^2}{u^2}\cdot\frac{y^2}{v^2}+\frac{l^2x^2}{u^2}\cdot\frac{x}{u}-\frac{l^2x^2}{u^2}\cdot\frac{y}{v}\\&-\frac{l^2x^2}{u^2}\left(\frac{x}{u}+\frac{y}{v}\right)+\frac{l^2x^2}{u^2}\cdot\frac{xy}{uv}\qquad+\frac{m^2y^2}{v^2}\cdot\frac{y}{v}-\frac{m^2y^2}{v^2}\cdot\frac{x}{u}\\&-\frac{m^2y^2}{v^2}\left(\frac{x}{u}+\frac{y}{v}\right)+\frac{m^2y^4}{v^4}\cdot\frac{xy}{uv}\qquad-\frac{2\Re^2xy}{uv}+2xy\end{aligned}\right\}$$

$$=0$$

$$\left.\begin{aligned}&-\frac{2lmxy}{uv}+\frac{2lmxy}{uv}\left(\frac{x}{u}+\frac{y}{v}\right)-2lm\frac{x^2}{u^2}\cdot\frac{y^2}{v^2}-\frac{2l^2x^2}{u^2}\cdot\frac{y}{v}+\frac{l^2x^2}{u^2}\cdot\frac{xy}{uv}\\&\qquad-\frac{2m^2y^2}{v^2}\cdot\frac{x}{u}+\frac{m^2y^2}{v^2}\cdot\frac{xy}{uv}\\&\qquad-\frac{2\Re^2xy}{uv}+2xy\end{aligned}\right\}$$

$$=0$$

$$\left.\begin{aligned}&-2lm+2lm\left(\frac{x}{u}+\frac{y}{v}\right)-\frac{2lmxy}{uv}-\frac{2lx^2}{u}+\frac{l^2x^2}{u^2}\\&\qquad-\frac{2m^2y}{v}+\frac{m^2y^2}{v^2}\\&\qquad-2\Re^2+2uv\end{aligned}\right\}=0$$

$$\left.\begin{aligned}&-4lm+4lm\left(\frac{x}{u}+\frac{y}{v}\right)-\frac{4lmxy}{uv}-(2m+2l)\frac{lx}{u}+2lm\\&\qquad-(2l+2m)\frac{my}{r}-2\Re^2\\&+\frac{l^2x^2}{u^2}+\frac{2lmxy}{uv}+\frac{m^2y^2}{v^2}+2uv\end{aligned}\right\}=0$$

$$\sqrt{2lm}-2\Re^2=\frac{2\Re uv}{v}$$

Digitized by Google

$$-4lm\left(1-\frac{x}{u}-\frac{y}{v}+\frac{xy}{uw}\right)-2f\left(\frac{lx}{u}+\frac{my}{v}\right)+\left(\frac{lx}{u}+\frac{my}{v}\right)^2\Bigg\}=0$$
$$+\frac{2\Re uv}{w}+2uw$$

$$\alpha)\quad -lm\left(\frac{lx}{u}+\frac{my}{v}\right)^2+\Re^2\left(\frac{lx}{u}+\frac{my}{v}\right)^2-2\Re^2 f\left(\frac{lx}{u}+\frac{my}{v}\right)\Bigg\}=0$$
$$+\frac{2\Re uv\,\Re^2}{w}+\frac{2uv\,\Re^2 w}{w}$$

$$(\Re^2-lm)\left(\frac{lx}{u}+\frac{my}{v}\right)^2-2\Re^2 f\left(\frac{lx}{u}+\frac{my}{v}\right)+\frac{2\Re^2 uv(\Re+w)}{w}=0$$

$$lm-\Re^2=\frac{\Re uv}{w}\qquad\qquad \Re fw=uvn$$

$$nv$$

$$\Re uv\left(\frac{lx}{u}+\frac{my}{v}\right)^2+2\Re uvn\left(\frac{lx}{u}+\frac{my}{v}\right)=2\Re^2 uv(\Re+w)$$

$$\left(\frac{lx}{u}+\frac{my}{v}\right)^2+2n\left(\frac{lx}{u}+\frac{my}{v}\right)=2\Re(\Re+w)$$

$$\frac{lx}{u}+\frac{my}{v}+n=\sqrt{2\Re^2+2\Re w+n^2}$$

89) . . . $\frac{lx}{u}+\frac{my}{v}=\Re+w-n$

Wenn nun 3 Gleichungen wie 89) gebildet werden, so leitet man daraus ohne Mühe ab:

90) . . . $x=\frac{u}{2l}[\Re+v+w-u-m-n+l]$

eine Gleichung, die sich ohne Schwierigkeit construiren lässt. Sie hat Aehnlichkeit mit der Gleichung 15) in II., wobei nicht zu übersehen ist, dass x in 90) eine andere Bedeutung als in 15) hat. Zur Ausführung dieser dritten Construction schreibe man die Gleichung 90) in folgender Gestalt:

$$x=\frac{u}{l}\left[\frac{l+\Re-u+v+w-d}{2}\right]$$

Man ziehe zunächst die Halbirungslinien u, v, w und den Radius PF, mache dann

$$FG=FP \quad \text{und} \quad DH=DG$$

dann ist

Digitized by Google

$$PH = l + \Re - u$$

man mache ferner

$$ER = EP \quad \text{und} \quad FS = FP$$

dann ist

$$RS = v + w - d$$

dann mache man

$$HO = RS$$

und halbire PO in Q; dann mache man

$$FL' = PH$$

und errichte in L' ein Perpendikel $L'L$. Die Linie LL' ist dann der Radius des einen der 3 gesuchten Kreise.

Anmerkung 18. Leichter wäre es gewesen, aus 3 Gleichungen wie 87) ein Resultat zu gewinnen (vergl. Auflösung IX).

Anmerkung 19. Die Zusammenstellung der Gleichungen

$$91) \ldots \begin{cases} \dfrac{l^2x^2}{u^2} + \dfrac{2\Re(u+\Re)}{u}x = \dfrac{m^2y^2}{v} + \dfrac{2\Re(v+\Re)}{v}y \\ \dfrac{l^2x^2}{u^2} + \dfrac{2lmxy}{vv} + \dfrac{m^2y^2}{v^2} = 4\Re^2\left(1 - \dfrac{x}{u} - \dfrac{y}{a} + \dfrac{xy}{uv}\right) \end{cases}$$

habe ich als eine selbstständige Aufgabe aufgefasst, die sich direct (ohne Umformung und ohne Hülfsformeln) einzig und allein durch die in den Grössen selbst liegende Beziehung

$$\Re^2 = u^2 - l^2 = v^2 - m^2$$

lösen lassen müsse. So aufgefasst hat sie mich eine lange Zeit beschäftigt, bis ihre Lösung mir endlich gelang. Zwar sind bei der Entwicklung auch die Formeln

$$2lm - 2\Re^2 = \frac{2\Re uv}{w}$$

und

$$\Re fw = uvn$$

benutzt worden; allein man bemerkt sehr leicht, dass sie keineswegs durchaus nötig waren, und dass die Lösung auch ohne sie erfolgt wäre. Statt der Gleichung α wäre nämlich gekommen:

Digitized by Google

92) . . . $(\mathfrak{R}^2 - lm)\left[\frac{lx}{u} + \frac{my}{v}\right]^2 - 2\mathfrak{R}^2 f\left(\frac{lx}{u} + \frac{my}{v}\right)$

$$+ (2lm - 2\mathfrak{R}^2 + 2uv)\mathfrak{R}^2 = 0$$

$$\left[\frac{lx}{u} + \frac{my}{v}\right]^2 + \frac{2\mathfrak{R}^2 f}{lm - \mathfrak{R}^2}\left(\frac{lx}{u} + \frac{my}{v}\right) = \frac{(2lm - 2\mathfrak{R}^2 + 2uv)\mathfrak{R}^2}{lm - \mathfrak{R}^2}$$

$$\left[\frac{lx}{u} + \frac{my}{v}\right]^2 + \frac{2\mathfrak{R}^2 f}{lm - \mathfrak{R}^2}\left(\frac{lx}{u} + \frac{my}{v}\right) + \frac{\mathfrak{R}^4 f^2}{(lm - \mathfrak{R}^2)^2}$$

$$= \mathfrak{R}^2 + \mathfrak{R}^2 + \frac{2uv\mathfrak{R}^2}{lm - \mathfrak{R}^2} + \frac{\mathfrak{R}^4 f^2}{(lm - \mathfrak{R})^2}$$

$$\frac{lx}{u} + \frac{my}{v} + \frac{\mathfrak{R}^2 f}{lm - \mathfrak{R}^2}$$

$$= \sqrt{\mathfrak{R}^2 + \frac{2\mathfrak{R}^2 uv}{lm - \mathfrak{R}^2} + \frac{\mathfrak{R}^4 f^2 + \mathfrak{R}^2 l^2 m^2 - 2\mathfrak{R}^4 lm + \mathfrak{R}^6}{(lm - \mathfrak{R}^2)^2}}$$

$$= \sqrt{\mathfrak{R}^2 + \frac{2\mathfrak{R}^2 uv}{lm - \mathfrak{R}^2} + \frac{\mathfrak{R}^2[\mathfrak{R}^2(l^2 + m^2) + l^2 m^2 + \mathfrak{R}^4)}{(lm - \mathfrak{R}^2)^2}}$$

Nun ist:

$$u^2 v^2 = \mathfrak{R}^2(u^2 + v^2) + l^2 m^2 - \mathfrak{R}^2$$
$$= \mathfrak{R}^2(\mathfrak{R}^2 + l^2 + \mathfrak{R}^2 + m^2) + l^2 m^2 - \mathfrak{R}^4$$

$$= \sqrt{\mathfrak{R}^2 + \frac{2\mathfrak{R}uv}{lm - \mathfrak{R}^2} + \frac{\mathfrak{R}^2 u^2 v^2}{(lm - \mathfrak{R}^2)^2}}$$

$$\frac{lx}{u} + \frac{my}{v} + \frac{\mathfrak{R}^2 f}{lm - \mathfrak{R}^2} = \mathfrak{R} + \frac{\mathfrak{R}uv}{lm - \mathfrak{R}^2}$$

93) . . . $$\frac{lx}{v} + \frac{my}{v} = \mathfrak{R} + \frac{\mathfrak{R}[uv - \mathfrak{R}(l+m)]}{lm - \mathfrak{R}^2}$$

Auffallend könnte es erscheinen, dass die Auflösung obiger Aufgabe nur durch Quadrirung der einen Gleichung 88) gelang, während man nach den voraufgegangenen Lösungen verwandter Gleichungen vermuten durfte, dass die Ausziehung der Quadratwurzel zum Ziele führen würde. Indessen darf man nicht übersehen, dass man sich unter $\mathfrak{R}$ in jener Gleichung $\sqrt{u^2 - l^2}$ und $\sqrt{v^2 - m^2}$ vorzustellen hat, und, dieses in Betracht gezogen, scheint die Quadrirung durchaus erforderlich zu sein.

Anmerkung 20. Vervollständigung der Gleichungen 75)—89)

Digitized by Google

94) . . . $\dfrac{2\mathfrak{R}}{u} = \dfrac{2\mathfrak{R} + h - s - t}{x}$

$$s + h + t = 6\mathfrak{R} - \frac{2\mathfrak{R}x}{u} - \frac{2\mathfrak{R}y}{v} - \frac{2\mathfrak{R}z}{w}$$

95) . . .
$$\begin{cases} st = x^2 + yz + \left(\dfrac{\mathfrak{R}y}{v} + \dfrac{\mathfrak{R}z}{w}\right)x \\ sh = y^2 + xs + \left(\dfrac{\mathfrak{R}x}{u} + \dfrac{\mathfrak{R}z}{w}\right)y \\ ht = s^2 + xy + \left(\dfrac{\mathfrak{R}x}{u} + \dfrac{\mathfrak{R}y}{v}\right)z \end{cases}$$ aus 81) u. 89)

Wenn man die 3 Gleichungen in 75) mit einander multiplicirt, so erhält man auf der rechten Seite ein Quadrat, weil

$$(f+u-v)(d+v-w)(e+w-u)$$
$$= (f+v-u)(d+w-v)(e+w-u) = \frac{2\,def\,\mathfrak{R}}{r}$$

ist. Daher müssen auch die Factoren auf der linken Seite ein Quadrat geben, und merkwürdigerweise ist:

96) . . . $(s + x - y)(h + y - z)(t + z - x)$
$= (s + y - x)(h + z - y)(t + x - z)$

Denn

$$\left.\begin{array}{l} z(s + y - x) = x(h + y - z) \quad (89) \\ x(h + z - y) = y(t + z - x) \\ y(t + x - z) = z(s + x - y) \end{array}\right\}$$ mit einander multiplicirt

Die Producte geben nun:

$$(s+x-y)(h+y-z)(t+z-x) = sht$$
$$+s(xz+yz-xy-z^2)+sz(h-t)+z^2(y-x)$$
$$+h(xy+xz-yz-x^2)+hx(t-s)+x^2(z-y)$$
$$+t(yz+xy-xz-y^2)+ty(s-h)+y^2(x-z)$$

$$(s+y-x)(h+z-y)(t+x-z) = sht$$
$$+s(xz+yz-xy-z^2)-sz(h-t)-z^2(y-x)$$
$$+h(xy+xz-yz-x^2)-hx(t-s)-x^2(z-y)$$
$$+t(yz+xy-xz-y^2)-ty(s-h)-y^2(x-z)$$

Digitized by Google

In jedem dieser beiden Producte müssen die 6 letzten Glieder der rechten Seite = 0 sein; denn, wenn z. B.

$$A = B + Q$$

und

$$A = B - Q$$

ist, so folgt

$$Q = 0$$

Aus 75) geht demnach hervor:

97) . . . $$\left\{\begin{array}{l} sht+s(xz+yz-xy-z^2 \\ +h(xy+xz-yz-x^2 \\ +t(yz+xy-xz-y^2 \end{array}\right) uvw = \frac{2\,def\,\mathfrak{R}}{r} \cdot xyz$$

Für weitere Untersuchungen kann auch gebraucht werden:

98) . . . $$(s+x)(h+y)(t+z) = (s+y)(h+z)(t+x)$$
$$= \frac{19 \cdot 15 \cdot 47}{14} \cdot 34 \cdot 29 \cdot \frac{13 \cdot 13}{14} \cdot 86$$

denn

$$x = \frac{(z+y)z}{h+y} = \frac{(t+z)y}{h+z}$$

Hieraus folgt:

99) . . . $$\left.\begin{array}{l} (sh-ty)x \\ +(ht-sz)y \\ +(st-hx)z \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} (sh-ty)z \\ +(ht-sz)x \\ +(st-hx)y \end{array}\right.$$

Auch ist:

100) . . . $$\left.\begin{array}{l} (sh-y^2)x \\ +(ht-z^2)y \\ +(st-x^2)z \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} (sh-y^2)z \\ +(ht-z^2)x \\ +(st-x^2)y \end{array}\right.$$

Ferner:

101) . . . $$\left.\begin{array}{l} (t-y)yx \\ +(s-z)zy) \\ +(h-x)xz \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} (t-y)yz \\ +(s-z)zx \\ +(h-x))xy \end{array}\right.$$

Die Gleichung 79) kann vervollständigt werden:

102) . . . $$sz - xy = hx - yz = ty - xz$$
$$= \frac{2\mathfrak{R}xy}{s+x+y} = \frac{2\mathfrak{R}yz}{h+y+z} = \frac{2\mathfrak{R}xz}{t+x+z}$$

Digitized by Google

Denn:

$$hx = sz - xy + yz \qquad (79)$$
$$ty = sz - xy + xz$$

$$ht\,xy = s^2z^2 - 2s\,xyz + x^2y^2 + sz^2(x+y) - xyz(x+y) + xyz^2$$

aber auch

$$ht\,xy = xy(z^2 + xy + 2\Re z - sz) \qquad (81)$$

subtrahirt

$$0 = (sz - xy)(sz + (sz - xy)z(x+y) - 2\Re\,xyz$$
$$2\Re\,xyz = (sz - xy)(s+x+y)z$$

Die Gleichung 79) kann auch geschrieben werden:

103) . . . $x(h+y+z) = y(t+x+z) = z(s+x+y)$

$$= \frac{13 \cdot 13 \cdot 3) \cdot 39 \cdot 47}{14} = \frac{xyz}{r'+r''+r'''-\Re}$$

ferner auch:

104) . . . $\dfrac{yz}{h+y+z} = \dfrac{xz}{t+x+z} = \dfrac{xy}{s+x+y}$

$$= \frac{25 \cdot 35}{26} = \frac{195}{2} = \frac{r'+r''+r'''-\Re}{2}$$

105) . . . $x\left[\Re+y-\dfrac{\Re y}{v}+\Re+z-\dfrac{\Re z}{w}\right] = y\left[\Re+x-\dfrac{\Re x}{u}+\Re+z-\dfrac{\Re z}{w}\right]$

$$= z\left[\Re+x-\frac{\Re x}{u}+\Re+y-\frac{\Re y}{v}\right]$$

Denn

$$sz - xy = hx - yz$$

$$s = 2\Re - \frac{\Re x}{u} - \frac{\Re y}{v} \qquad k = 2\Re - \frac{\Re y}{v} - \frac{\Re z}{w}$$

$$z\left(2\Re - \frac{\Re x}{u} - \frac{\Re y}{v}\right) - xy = x\left(2\Re - \frac{\Re y}{v} - \frac{\Re z}{w}\right) - yz$$

$$z\left(2\Re+y - \frac{\Re x}{u} - \frac{\Re y}{v}\right) = x\left(2\Re+y - \frac{\Re y}{v} - \frac{\Re z}{w}\right)$$

Es folgt hieraus wiederum:

$$\frac{z\left(2\Re+x-\dfrac{\Re x}{u}\right)}{2\Re+x-\dfrac{\Re x}{u}-\dfrac{\Re z}{w}+\dfrac{\Re^2}{v}} = y = \frac{x\left(2\Re+z-\dfrac{\Re z}{w}\right)}{2\Re+z-\dfrac{\Re z}{w}-\dfrac{\Re x}{u}+\dfrac{\Re x}{v}}$$

Digitized by Google

$$\left(2\mathfrak{R}+z-\frac{\mathfrak{R}z}{w}\right)\left(\frac{\mathfrak{R}+w}{w}\right)z=\left(2\mathfrak{R}+x-\frac{\mathfrak{R}x}{u}\right)\left(\frac{\mathfrak{R}+u}{u}\right)$$

(84) multiplicirt:

$$\frac{z\left(\frac{\mathfrak{R}+w}{w}\right)z}{2\mathfrak{R}+x-\frac{\mathfrak{R}x}{u}-\frac{\mathfrak{R}z}{w}+\frac{\mathfrak{R}z}{v}}=\frac{x\left(\frac{\mathfrak{R}+u}{u}\right)x}{2\mathfrak{R}+z-\frac{\mathfrak{R}z}{w}-\frac{\mathfrak{R}x}{u}+\frac{\mathfrak{R}x}{v}}$$

$$z^2\left(\frac{\mathfrak{R}+w}{w}\right)\left[2\mathfrak{R}+z-\frac{\mathfrak{R}z}{w}-\frac{\mathfrak{R}x}{u}+\frac{\mathfrak{R}x}{v}\right]$$
$$=x^2\left(\frac{\mathfrak{R}+u}{u}\right)\left[2\mathfrak{R}+x-\frac{\mathfrak{R}x}{u}-\frac{\mathfrak{R}z}{w}+\frac{\mathfrak{R}z}{v}\right]$$

$$c\left[\frac{2\mathfrak{R}(\mathfrak{R}+w)z}{w}+\frac{n^2z^2}{w^2}-\left(\frac{\mathfrak{R}}{u}-\frac{\mathfrak{R}}{v}\right)\left(\frac{\mathfrak{R}+w}{w}\right)xz\right]$$
$$=z\left[\frac{2\mathfrak{R}(\mathfrak{R}+u)x}{u}+\frac{l^2x^2}{u^2}-\left(\frac{\mathfrak{R}}{w}-\frac{\mathfrak{R}}{v}\right)\left(\frac{\mathfrak{R}+u}{u}\right)xz\right]$$

$$\frac{2\mathfrak{R}(\mathfrak{R}+w)z}{w}+\frac{n^2z^2}{w^2}=\frac{l^2x^2}{u^2}+\frac{2\mathfrak{R}(\mathfrak{R}+u)x}{u}-$$

$$\frac{2\mathfrak{R}(\mathfrak{R}+u)x}{u}+\frac{l^2x^2}{u^2}=\frac{n^2z^2}{w^2}+\frac{2\mathfrak{R}(\mathfrak{R}+w)}{w}z$$

$$\frac{l^2}{u^2}x+\frac{2\mathfrak{R}(\mathfrak{R}+u)}{u}-\left(\frac{\mathfrak{R}}{u}-\frac{\mathfrak{R}}{v}\right)\left(\frac{\mathfrak{R}+w}{w}\right)z$$
$$=\frac{n^2}{w^2}z+\frac{2\mathfrak{R}(\mathfrak{R}+w)}{w}-\left(\frac{\mathfrak{R}}{w}-\frac{\mathfrak{R}}{v}\right)\left(\frac{\mathfrak{R}+u}{u}\right)x$$

$$\frac{l^2}{u^2}x+\left(\frac{\mathfrak{R}}{w}-\frac{\mathfrak{R}}{v}\right)\left(\frac{\mathfrak{R}+u}{u}\right)x+\frac{2\mathfrak{R}(\mathfrak{R}+u)}{u}$$
$$=\frac{n^2}{w^2}z+\left(\frac{\mathfrak{R}}{u}-\frac{\mathfrak{R}}{v}\right)\left(\frac{\mathfrak{R}+w}{w}\right)z+\frac{2\mathfrak{R}(\mathfrak{R}+w)}{w}$$

106) . . . $$x\left[\frac{l^2}{u^2}+\frac{(\mathfrak{R}^2v-\mathfrak{R}uw)-(\mathfrak{R}^2w-\mathfrak{R}uv)}{uvw}\right]+\frac{2\mathfrak{R}^2}{u}$$
$$=z\left[\frac{u^2}{w^2}+\frac{(\mathfrak{R}^2v-\mathfrak{R}uw)-(\mathfrak{R}^2u-\mathfrak{R}uv)}{uvw}\right]+\frac{2\mathfrak{R}^2}{w}$$

Wenn nun mit uvw multiplicirt und

$$lvw=\mathfrak{R}ud,\quad nuv=\mathfrak{R}wf$$

gesetzt und durch $\mathfrak{R}$ dividirt wird, so kommt

Digitized by Google

107) . . $$\begin{cases} 2\Re vw+x[dl+(v-w)(\Re+u)]=2\Re(uw+x[fu+(v-u)(\Re+w)]; \\ \text{ebenso} \\ 2\Re uv+z[fn+(u-v)(\Re+w)]=2\Re uw+y[em+(u-w)(\Re+v)] \\ 2\Re uw+y[em+(w-u)(\Re+v)]=2\Re vw+x[dl+(w-v)(\Re+u)] \end{cases}$$

Diese Gleichungen sind so beschaffen, dass aus je zweien von ihnen die dritte abgeleitet werden kann, und also kann man mit ihnen allein nicht zum Ziel kommen. Zwar sind sie vom ersten Grade; aber dennoch eignen sie sich ihrer schiefen Gestalt wegen schlecht zur Entwicklung.

Werden sie addirt, so kommt:

108) . . . $$\left\{\begin{array}{r} x(\Re+u)\,(v-w) \\ +\,y(\Re+v)\,(w-u) \\ +\,z(\Re+w)\,(u-v) \end{array}\right\} = 0$$

Ferner:

109) . . . $$s\frac{\Re x}{u}+x^2+2\Re x = s\frac{\Re y}{v}+y^2+2\Re y$$

Aus 3 solchen Gleichungen folgt:

110) . . . $$s\frac{x}{u}+\frac{hy}{v}+\frac{tz}{w}=\frac{sy}{v}+\frac{hz}{w}+\frac{tx}{u}$$

Anmerkung 21. Weitere Ableitungen aus Gleichung 83).

Wenn noch eine Gleichung wie 89) gebildet und dann die eine von der anderen subtrahirt wird, so ergiebt sich

111) . . . $$\frac{lx}{u}+u-l=\frac{my}{v}+v-m=\frac{nz}{w}+w-n$$

Ferner: Aus 85) und 111) ergiebt sich:

112) . . . $$2(\Re+u-l)x-(u-l)^2=2(\Re+v-m)y-(v-m)^2 = 2(\Re+w-n)z-(w-n)^2$$

Ferner ist

113) . . . $$(\Re+u-l)^2\frac{x}{u}-(\Re+u-l)^2=(\Re+v-m)^2\frac{y}{v}-(\Re+v-m)^2 = (\Re+w-n)^2\frac{z}{w}-(\Re+w-n)^2$$

Digitized by Google

$$114) \ldots \begin{cases} 2(\Re + u - l)x + (u + v - l - m)\dfrac{lx}{u} \\ \qquad = 2(\Re + v - m)y + (u + v - l - m)\dfrac{my}{v} \\ \qquad\qquad \text{aus 111) und 11)} \\ 2(\Re + v - m)y + (v + w - m - n)\dfrac{my}{v} \\ \qquad = 2(\Re + w - n)z + (v + w - m - n)\dfrac{nz}{w} \\ 2(\Re + w - n)z + (w + u - l - n)\dfrac{nz}{v} \\ \qquad = 2(\Re + u - l)x + (w + u - l - n)\dfrac{lx}{u} \end{cases}$$

Hieraus:

$$115) \ldots \begin{cases} [(v - m) - (w - n)]\dfrac{lx}{u} \\ + [(w - n) - (u - l)]\dfrac{my}{v} \\ + [(u - l) - (v - m)]\dfrac{nz}{w} \end{cases} = 0$$

$$116) \ldots \frac{l\sqrt{x}}{u + l - \Re} = \frac{m\sqrt{y}}{v + m - \Re} = \frac{n\sqrt{z}}{w + n - \Re}$$

(Hier bedeuten x, y, z die Radien)

$$117) \ldots \Re(a + b + c - \Re)^2 + (xy + xz + yz)(a + b + c - \Re) = 2xyz \qquad \text{C. 79) und 81)}$$

IX. Auflösung.

(Aehnlich wie Auflösung IV.)

Werden die früheren Grundgleichungen

$$d\Re = my + nz + 2\Re\sqrt{yz}$$
$$e\Re = lx + nz + 2\Re\sqrt{xz}$$
$$f\Re = lx + my + 2\Re\sqrt{xy}$$

durch die Proportionen

$$-X : x = u : \Re \text{ u. s. w.}$$

Digitized by Google

worin x das x der Grundgleichungen (also einen gesuchten Radius) und X die Linie PL in der vorigen Auflösung bedeutet; oder werden sie, was dasselbe ist, durch die Gleichungen

$$\frac{x}{\mathfrak{R}} + \frac{X}{u} - 1 = \frac{y}{\mathfrak{R}} + \frac{Y}{v} = \frac{z}{\mathfrak{R}} + \frac{Z}{w}$$

die sich leicht aus Fig. 11. dartun lassen (was eigentlich nicht nötig ist), umgeformt, so erhält man:

117) . . .
$$\begin{cases} 2\mathfrak{R}\sqrt{\left(\frac{u-X}{u}\right)\left(\frac{v-Y}{v}\right)} = \frac{lX}{u} + \frac{mY}{v} \\ 2\mathfrak{R}\sqrt{\left(\frac{u-X}{u}\right)\left(\frac{w-Z}{w}\right)} = \frac{lX}{u} + \frac{nZ}{w} \\ 2\mathfrak{R}\sqrt{\left(\frac{v-Y}{v}\right)\left(\frac{w-Z}{w}\right)} = \frac{mY}{v} + \frac{nZ}{w} \end{cases}$$

Aus der dritten Gleichung in 117) folgt:

$$n\left(\frac{w-z}{w}\right) + 2\mathfrak{R}\sqrt{\left(\frac{v-y}{v}\right)}\sqrt{\left(\frac{w-z}{w}\right)} = n + \frac{my}{v}$$

$$\frac{w-z}{w} + \frac{2\mathfrak{R}}{n}\sqrt{\left(\frac{v-y}{v}\right)}\sqrt{\left(\frac{w-z}{w}\right)} = \frac{my}{nv} + \frac{nv}{nv}$$

quadratisch behandelt

$$\frac{w-z}{w} + \frac{2\mathfrak{R}}{n}\sqrt{\frac{v-y}{v}} \cdot \sqrt{\frac{w-z}{w} + \frac{\mathfrak{R}^2(v-y)}{n^2 v}}$$

$$= \frac{nmy + n^2 v + \mathfrak{R}^2 v - \mathfrak{R}^2 y}{n^2 v}$$

$$= \frac{w^2 + (nm - \mathfrak{R}^2)\frac{y}{v}}{n^2}$$

$$= w^2 + \frac{\mathfrak{R} v w}{u} \cdot \frac{y}{v}$$

118) . . .
$$\sqrt{\frac{w-z}{w}} + \frac{\mathfrak{R}}{n}\sqrt{\frac{v-y}{v}} = \sqrt{\frac{w^2 + \frac{\mathfrak{R} v w}{u} \cdot \frac{y}{v}}{n^2}}$$

Mit n multiplicirt, kommt:

Digitized by Google

$$n\sqrt{\frac{w-z}{w}} = -\Re\sqrt{\frac{v-y}{v}} + \sqrt{w^2 + \frac{\Re vw}{u}\cdot\frac{y}{v}}$$

Ebenso

$$n\sqrt{\frac{w-z}{n}} = -\Re\sqrt{\frac{u-x}{u}} + \sqrt{w^2 + \frac{\Re uw}{v}\cdot\frac{x}{u}}$$

Also:

119) . . . $\Re\sqrt{\left(\frac{u-x}{u}\right)} - \Re\sqrt{\left(\frac{v-y}{v}\right)}$

$$= \sqrt{w^2 + \frac{\Re uw}{n}\cdot\frac{x}{u}} - \sqrt{w^2 + \frac{\Re uw}{u}\cdot\frac{y}{v}}$$

quadrirt

$$\Re^2\left[\frac{u-x}{u} + \frac{v-y}{v} - 2\sqrt{\left(\frac{u-x}{u}\right)\left(\frac{v-y}{v}\right)}\right]$$

$$= w^2 + \frac{\Re uw}{v}\cdot\frac{x}{u} + w^2 + \frac{\Re vw}{u}\cdot\frac{y}{u}$$

$$-2\sqrt{\left(w^2 + \frac{\Re um}{v}\cdot\frac{x}{u}\right)\left(w^2 + \frac{\Re vw}{u}\cdot\frac{y}{v}\right)}$$

$$-2\Re^2\sqrt{\left(\frac{u-x}{u}\right)\left(\frac{v-y}{v}\right)}$$

$$= 2w^2 - 2\Re^2 + \left(\Re^2 + \frac{\Re um}{v}\right)\cdot\frac{x}{u} + \left(\Re^2 + \frac{\Re vw}{u}\right)\cdot\frac{y}{v}$$

$$-2\sqrt{w^4 + \frac{\Re uw}{v}w^2\frac{x}{u} + \frac{\Re vw}{u}w^2\frac{y}{v} + \Re^2 w^2\frac{x}{u}\cdot\frac{y}{v}}$$

$$-\Re\left(\frac{lx}{u} + \frac{my}{v}\right) = 2n^2 + \frac{lnx}{u} + \frac{mny}{v}$$

$$-2w\sqrt{w^2 + (ln - m^2)\frac{x}{u} + (mn - \Re^2)\frac{y}{v} + \Re^2\frac{x}{u}\cdot\frac{y}{v}}$$

$$2w\sqrt{\left[n^2 + \Re^2 - \frac{\Re^3 x}{u} - \frac{\Re^2 y}{v} + \frac{\Re^2 x}{u}\cdot\frac{y}{v} + \frac{lnx}{u} + \frac{mny}{v}\right]}$$

$$= 2n^2 + (\Re + n)\left(\frac{lx}{u} + \frac{my}{v}\right)$$

$$2w\sqrt{\left[n^2 + \tfrac{1}{4}\left(\frac{lx}{u} + \frac{my}{v}\right)^2 + n\left(\frac{lx}{u} + \frac{my}{v}\right)\right]}$$

$$= 2n^2 + (\Re + n)\left(\frac{lx}{u} + \frac{my}{v}\right)$$

$$2w\left[n + \tfrac{1}{2}\left(\frac{lx}{u} + \frac{my}{v}\right)\right] = 2n^2 + (\Re + n)\left(\frac{lx}{u} + \frac{my}{v}\right)$$

Digitized by Google

$$2wn - 2n^2 = (\Re - w + n)\left(\frac{lx}{u} + \frac{my}{x}\right)$$

120) . . . $\dfrac{lX}{u} + \dfrac{mY}{v} - \Re + w - n = 2\sqrt{xy}$

Also dasselbe Resultat wie in 89). Diese Auflösung stimmt mit der IV. Auflösung ziemlich überein.

X. Auflösung.

(Stimmt im Wesentlichen mit II. S. überein).

Wird in Fig. 12. DL' mit o, EM' mit p, und werden die von F ausgehenden entsprechenden Linien mit q bezeichnet; so ist aus geometrischen Gründen

$$o : x = l : \Re$$

und also

121) . . . $\begin{cases} lx = \Re o \\ my = \Re p \\ nz = \Re q \end{cases}$

Werden nun die beiden letzten Gleichungen in die Grundgleichung

$$d\Re = my + nz + 2\Re\sqrt{yz}$$

gesetzt, so kommt

122) . . . $d\Re = \Re p + \Re q + 2\Re\sqrt{\dfrac{\Re p}{m} \cdot \dfrac{\Re q}{n}}$

$$mn = \frac{\Re^2 ef}{u^2}$$

$$def = efp + efq + 2u\sqrt{efpq}$$

Ebenso

$$def = dfo + dfg + 2v\sqrt{dfoq}$$

Also

$$efp + cfq + 2u\sqrt{efpq} = dfo + dfq + 2v\sqrt{dfoq}$$

$$(ef - u^2)q - (df - v^2)q$$

$$efp + u^2q + 2u\sqrt{efpq} = dfo + v^2q + 2v\sqrt{dfoq}$$

Digitized by Google

123) . . .
$$\begin{cases} \sqrt{efp} + u\sqrt{q} = \sqrt{dfo} + v\sqrt{q} \\ \text{Ebenso} \\ \sqrt{deo} + w\sqrt{p} = \sqrt{feq} + u\sqrt{p} \\ \sqrt{dfq} + v\sqrt{o} = \sqrt{dep} + w\sqrt{o} \end{cases}$$

Wird nun die zweite Gleichung mit $\sqrt{d}$ und die dritte mit $\sqrt{e}$ multiplicirt, so erhält man:

$$\sqrt{defq} = -u\sqrt{dp} + d\sqrt{eo} + w\sqrt{dp}$$
$$\sqrt{defq} = -v\sqrt{eo} + e\sqrt{dp} + w\sqrt{eo}$$

Folglich

124) . . . $(d + v - w)\sqrt{eo} = (e + u - w)\sqrt{dp}$

Oder

$$\left(\frac{\Re + u - l}{u}\right)\sqrt{eo} = \left(\frac{\Re + v - m}{v}\right)\sqrt{dp} \qquad \text{(F. 313)}$$

$$(\Re + u - l)^2 \frac{eo}{u^2} = (\Re + v - m)^2 \frac{dp}{v^2}$$

$$u^2 dm = v^2 et$$

125) . . . $$\frac{(\Re + u - l)^2}{l} o = \frac{(\Re + v - m)^2}{m} p = \frac{(\Re + w - n)^2}{n} q$$

n 4 . 126 . 445

Jetzt nehme man die Gleichung 122) wieder auf:

$$d = p + q + 2\Re\sqrt{\frac{pq}{mn}}$$

$$p = \frac{m(\Re + u - l)^2 o}{l(\Re + v - m)^2}$$

$$q = \frac{n(\Re + u - l)^2 o}{l(\Re + w - n)^2}$$

$$d = p + q + \frac{2\Re(\Re + u - l)^2}{l(\Re + v - m)(\Re + w - n)} \cdot o$$

126) . . . $dl(\Re + v - m)(\Re + w - n)$
$$= (p + qL)(\Re + v - m)(\Re + w - n) + 2\Re(\Re + u - l)^2 \cdot o$$

$$p = \frac{(\Re + u - l)(v + m - \Re)}{(u + l - \Re)(\Re + v - m)} \cdot o$$

$$q = \frac{(\Re + u - l)(w + n - \Re)}{(u + l - \Re)(\Re + w - n)} \cdot o$$

Digitized by Google

entsteht, wenn man

$$l(\Re + v - m)(v + m - \Re) = m(\Re + u - l)(u + l - \Re)$$

mit Gl. 125) multiplicirt,

129) . . . $dl(\Re+v-m(\Re+w-n(u+l-\Re)$

$$= \begin{bmatrix} l(\Re+u-l)(v+m-\Re)(\Re+w-n) \\ +l(\Re+u-l)(w+n-\Re)(\Re+v-m) \end{bmatrix} + (u+l-\Re(2\Re(\Re+u-l)^2\Big] \cdot o$$

$$= (u+l-\Re)[2\Re\ l+m+n-\Re-u)(\Re+u-l)+2\Re(\Re+u-l)^2] \cdot o$$

$$dl(\Re+v-m)(\Re+w-n) = 2\Re(\Re+u-l)[l+m+n-\Re-u+\Re+u-l] \cdot o$$
$$= 2\Re(\Re+u-l)d \cdot o$$

128) . . . $O = \dfrac{l(\Re+v-m)(\Re+w-n)}{2\Re(\Re+u-l)} = \dfrac{lx}{\Re}$

eine Gleichung, die der Gleichung 8) entspricht. Setzt man diesen Wert in 126), so ergiebt sich:

$$dl(\Re+v-m)(\Re+w-n)$$
$$= (p+q)l(\Re+v-m)(\Re+w-n)+l(\Re+u-l)(\Re+v-m)(\Re+w-n)$$

$$d = p + q + \Re + u - l$$

129) . . . $p + q = l + m + n - \Re - u$

Ebenso

$$p + o = l + m + n - \Re - w$$
$$o + q = l + m + n - \Re - v$$

addirt

$$2b + 2p + 2q = 3(l + m + n) - 3\Re - (u + v + w)$$
$$2p + 2q = 2(l + m + n) - \Re - u$$

subtrahirt

130) . . . $2o = l + m + n - \Re + u - v - w$
$$= \Re + u + l - (\Re + v - m) - (\Re + w - n)$$

Dieses zweite Resultat kann auch direct aus 127) entwickelt werden; denn man erhält:

$$dl \cdot 2\Re^2(u-v-w+l+m+n-\Re)$$
$$= (u+l-\Re)2\Re[(l+m+n-\Re-u)(\Re+u-l)+(\Re+u-l)^2]o$$
$$= (u+l-\Re)2\Re\ (\Re+v-l)[l+m+n-\Re-u+\Re+u-l]o$$
$$= 2\Re(u+l-\Re)(\Re+u-l)d \cdot o$$
$$= 2\Re \cdot 2\Re\, l\, d\, 2c$$

$$u - v - w + l + m + n - \Re = 0$$

Digitized by Google

$$o = \frac{l+m+n-\Re+u-v-w}{2}$$

oder

$$o = \frac{\Re+u+l}{2} - \left(\frac{\Re+v-m}{2}\right) - \left(\frac{\Re+w=n}{2}\right)$$

Um hier noch eine Construction (die vierte) auszuführen, kann man u rückwärts verlängern, l auf der Verlängerung von D aus übertragen, ferner von P aus $\Re$ abtragen, dann in derselben Richtung nach RS (Fig. 11.) abtragen u. s. w.

Oder: Da, wie man leicht sieht,

$$u - 0 = v - p = w - q = \frac{\Re+u+v+w-l-m-n}{2}$$

ist, (Gleichungen, die mit 13) correspondiren); so beschreibe man von P aus mit $\frac{\Re+u-l+v-m+w-n}{2}$ einen Kreis, der die 3 Linien u, v, w in den Punkten $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{J}$, $\mathfrak{R}$ schneidet; darauf beschreibe man von D, E, F aus mit den auf u, v, w übrig bleibenden Stücken Kreise, die also den vorigen Kreis berühren, in den Durchschnittspunkten L', M', N' dieser Kreise mit den Seiten d, e, f des gegebenen Dreiecks errichte man Perpendikel, diese Perpendikel sind die Radien der gesuchten Kreise.

XI. Auflösung.

Es sei die Bedeutung von x, y, z, l, m, n, $\Re$, b, p, d so wie in der vorigen Auflösung und in Fig. 12. Es ist nun

$$M'L' = M\mathfrak{P} = \sqrt{ML^2 - L\mathfrak{P}^2} = \sqrt{(x+y)^2-(x-y)^2}$$

oder

$$M'L' - f - o - p = 2\sqrt{xy}$$

Nun ist

$$o : x = l : \Re$$
$$p : y = m : \Re$$

Also

$$f - o - p = 2\sqrt{\frac{\Re o\ \Re p}{lm}}$$

$$(f-o-p)^2 = \frac{4\Re^2 op}{lm}$$

Von derselben Form sind auch die andern beiden Grundgleichungen. Wenn aber

Digitized by Google

$$\mathfrak{R}^2 = \frac{lmn}{l+m+n}$$

gesetzt wird, so ergeben sich folgende 3 Grundgleichungen:

132) . . . $\begin{cases} 4opn = (l+m+n)(l+m-o-p)^2 \\ 4oqm = (l+m+n)(l+n-o-q)^2 \\ 4pql = (l+m+n)(m+n-p-q)^2 \end{cases}$

worin nur 3 constante Grössen vorkommen. Diese Gleichungen correspondiren mit den Gleichungen 117) und können rein algebraisch aufgelöst werden, nämlich so, dass bei der Auflösung auf solche Beziehungen der Grössen zu einander, welche in der geometrischen Natur des Malfatti'schen Problems liegen, nicht Rücksicht genommen wird. — Aus der zweiten Gleichung erhält man:

133) . . . $q + 2\sqrt{\frac{mo}{l+m+n}}\sqrt{q} = l+n-o$

$$q + 2\sqrt{\frac{mo}{l+m+n}}\sqrt{q} + \frac{mo}{l+m+n} = \frac{(l+n)(l+m+n-o)}{l+m+n}$$

$$\sqrt{q} + \sqrt{\frac{mo}{l+m+n}} = \pm\sqrt{\frac{(l+n)(l+m+n-o)}{l+m+n}}$$

134) . . . $\sqrt{(l+m+n)}\cdot\sqrt{q} = -\sqrt{mo} \pm \sqrt{(l+n)(l+m+n-o)}$

Ebenso

$$\sqrt{(l+m+n)}\cdot\sqrt{q} = -\sqrt{lp} \pm \sqrt{(m+n)(l+m+n-p)}$$

also

$$\sqrt{lp} - \sqrt{mo} = \sqrt{(m+n)(l+m+n-p)} - \sqrt{(l+n)(l+m+n-o)}$$

quadrirt

$$lp - 2\sqrt{lpmo} + mo = (m+n)(l+m+n-p) + (l+n)(l+m+n-o) - 2\sqrt{(m+n)(l+n)(l+m+n-o)(l+m+n-p)}$$

$$-2\sqrt{lmop} = (l+m+2n)(l+m+n) - (l+m+n)(o+p) - 2\sqrt{(m+n)(l+n)}\cdot\sqrt{(l+m+n)^2 - (l+m+n)(o+p) + op}$$

Erste Grundgleichung:

$$(l+m+n)(o+p) = -\sqrt{4opn(l+m+n) + (l+m+n)f}$$

Digitized by Google

$$-2\sqrt{lmop} = (l+m+2n)(l+m+n) - (l+m+n)(o+p) - 2\sqrt{(m+n)(l+n)}\,.\,\sqrt{n(l+m+n)} + 2\sqrt{n(l+m+n)op+op}$$

$$= (l+m+2n)(l+m+n) - (l+m+n)(o+p) - 2\sqrt{(l+n)(m+n)}\,[\sqrt{n(l+m+n)}+\sqrt{op}]$$

$$[\sqrt{(l+n)(m+n)}-\sqrt{lm}]\sqrt{4op} = (l+m+2n)(l+m+n) - (l+m+n)(o+p) - 2\sqrt{(l+n)(m+n)n(l+m+n)}$$

$$\sqrt{4op} = \sqrt{\frac{l+m+n}{n}}\,.\,(l+m-o-p)$$

$$\left.\begin{aligned}&[\sqrt{(l+n)(m+n)}-\sqrt{lm}](l+m)\sqrt{\frac{l+m+n}{n}}\\ -&[\sqrt{(l+n)(m+n)}-\sqrt{lm}](o+p)\sqrt{\frac{l+m+n}{n}}\end{aligned}\right\}$$

$$= (l+m+2n)(l+m+n) - (l+m+n)(o+p) - 2\sqrt{n(l+n)(m+n)(l+m+n)}$$

135) . . . $[n(l+m+n)-\sqrt{n(l+n)(m+n)(l+m+n)} + \sqrt{lmn(l+m+n)}](o+p)$

$$= n(l+m+n)(l+m+2n) - 2n\sqrt{n(l+n)(m+n)(l+m+n)} - (l+m)\sqrt{n(l+n)(m+n)(l+m+n)} + (l+m)\sqrt{lmn(l+m+n)}$$

Man sieht jetzt, dass die Auflösung zu Ende geführt werden kann. Zur Vereinfachung setze man aber als Annahme:

$$n(l+n)(m+n) = w^2(l+m+n);$$
$$lmn = \mathfrak{R}^2(l+m+n)$$

$$n(l+m+n) - w(l+m+n) + \mathfrak{R}(l+m+n)](o+p) = n(l+m+n)(l+m+2n) - 2nw(l+m+n) - (l+m)w(l+m+n) + (l+m)\mathfrak{R}(l+m+n)$$

Digitized by Google

$$[n-w+\Re](o+p) = n(l+m+2n) - 2nw - (l+m)w + (l+m)\Re$$

136) . . . $o+p = l+m+\dfrac{2n^2-2nw}{\Re-w+n}$

Man sieht also, dass die Auflösung der 3 Gleichungen in 132) sich rein algebraisch durchführen lässt; man braucht also nicht zu wissen, woher die Gleichungen stammen und in welchem inneren (geometrischen) Zusammenhang die darin vorkommenden Grössen stehen. Die beiden unter 135) gemachten Annahmen gestatten nun noch die Beziehung

$$n^2 = w^2 - \Re^2$$

eine Gleichung, die aus der Subtraction jener beiden Gleichungen hervorgeht, und bei welcher hier davon abgesehen wird, dass sie in der Natur des geometrischen Problems liegt. Wird nun diese Gleichung für 136) benutzt, so kommt

$$o+p = l+m+\frac{n^2+w^2-2nw-\Re^2}{\Re-w+n}$$

$$o+p = l+m+\frac{(w\Re n+\Re)(w-n+\Re)}{\Re-w+n}$$

137) . . . $o+p = l+m+n-w-\Re$

Der weitere Verfolg ergiebt, wenn w, $\Re$ etc. wieder fortgeschafft werden:

138) . . . $o = \dfrac{l+m+n}{2}$

$$-\frac{[\sqrt{lmn}+\sqrt{m(m+l)(m+n)}+\sqrt{n(n+l)(n+m)}-\sqrt{l(l+m((l+n)]}}{2\sqrt{(l+m+n)}}$$

XII. Auflösung.

Die Radien der gesuchten Kreise werden wiederum durch x, y z bezeichnet, o, p, q behalten ihre bisherigen Bedeutungen; ferner sei

$$\mathfrak{p}'\mathfrak{p}''' = \theta, \quad \mathfrak{DD} = \psi, \quad M_1\mathfrak{p}''' = \varrho$$

ferner sei $\mathfrak{p}$ der Durchschnittspunkt derjenigen 2 Tangenten, die durch die 3 Berührungspunkte der Kreise gezogen werden

$$E\mathfrak{p} = \lambda, \quad M'M'' = \mathfrak{l}$$

Digitized by Google

Dann ist in den beiden Dreiecken $\mathfrak{O}p\mathfrak{Q}$ und $E\mathfrak{O}\mathfrak{Q}$, die zusammen ein Viereck bilden, das den Kreis M einschliesst:

139) . . . $\theta^2(\mathfrak{r}+\sqrt{xy})\,(\mathfrak{r}+\sqrt{yz})$
$= (\psi+\sqrt{yz}-\sqrt{xy})\,(\psi+\sqrt{xy}-\sqrt{yz})\mathfrak{r}^2$

140) . . . $\mathfrak{k}^2(p+\sqrt{xy})\,(p+\sqrt{yz})$
$-(\psi+\sqrt{yz}-\sqrt{xy})\,(\psi+\sqrt{xy}-\sqrt{yz})p^2$

141) . . . $\dfrac{\theta^2(\mathfrak{r}+\sqrt{xy})\,(\mathfrak{r}+\sqrt{yz})}{\mathfrak{r}^2} = \dfrac{\mathfrak{k}^2(p+\sqrt{xy})\,(p+\sqrt{yz})}{p^2}$

Ferner ist in dem Dreieck $E\mathfrak{p}\mathfrak{Q}$:

142) . . . $\varrho^2(\mathfrak{r}+\sqrt{xy})\,(p+\sqrt{xy}) = \lambda+\mathfrak{r}-p)\,(\lambda+p-\mathfrak{r})xy$

$$\varrho = \frac{2y\sqrt{x}}{\sqrt{(x+y)}}$$

143) . . . $\dfrac{4y}{x+y}(\mathfrak{r}+\sqrt{xy})\,(p+\sqrt{xy}) = (\lambda+\mathfrak{r}-p)\,(\lambda+p-\mathfrak{r})$

144) . . . $\dfrac{4y}{z+y}(\mathfrak{r}+\sqrt{yz})\,(p+\sqrt{yz}) = (\lambda+\mathfrak{r}-p)\,(\lambda+p-\mathfrak{r})$

im Dreiek $E\mathfrak{O}p$

145) . . . $\dfrac{(\mathfrak{r}+\sqrt{xy})\,(p+\sqrt{xy})}{x+y} = \dfrac{(\mathfrak{r}+\sqrt{yz})\,(p\pm\sqrt{yz})}{y+z}$

(vergl. Gl. 104))

Aus 141) und 145) erhält man nun:

146) . . . $\theta^2\cdot\dfrac{x+y}{z+y}\dfrac{(\mathfrak{r}+\sqrt{yz})^2}{\mathfrak{r}^2} = \dfrac{\mathfrak{k}^2(p+\sqrt{xy})^2}{p^2}$

$$\theta^2 = \frac{2x\,.\,2z\,.\,y^2}{(x+y)\,(z-y)} \qquad p^2 = \frac{4m^2y^2}{v^2}$$

$$p^2 = \frac{m^2y^2}{\mathfrak{R}^2}$$

$$\frac{xz\,.\,y^2}{(y+z)^2}\frac{(\mathfrak{r}+\sqrt{yz})}{\mathfrak{r}^2} = \frac{\mathfrak{R}^2}{v^2}(p+\sqrt{xy})^2$$

$$\mathfrak{r} = \sqrt{\frac{xyz}{x+y+z}} \qquad p = \frac{my}{\mathfrak{R}}$$

$$\frac{\sqrt{xz}\,.\,y}{y+z}\cdot\frac{\sqrt{yz}\,(\sqrt{x}+\sqrt{x+y+z})}{\sqrt{xyz}} = \frac{\mathfrak{R}}{v}\cdot\frac{(my+\mathfrak{R}\sqrt{xy})}{\mathfrak{R}}$$

Digitized by Google

147) . . . $$\frac{\sqrt{xyz}+\sqrt{x+y+z}\,.\,\sqrt{yz}}{y+z}=\frac{m\sqrt{y}+\Re\sqrt{x}}{v}$$

und der Analogie wegen auch

$$=\frac{n\sqrt{z}+\Re\sqrt{x}}{w}$$

Also

148) . . . $w(m\sqrt{y}+\Re\sqrt{x})=v(n\sqrt{z}+\sqrt{x})$

(Das Weitere wie in Auflösung II. oder wie in Anmerkung 13).

Anmerkung 22. Weitere Folgerungen. Bildet man 3 Gleichungen wie 145), so geht daraus hervor:

$$\frac{(\mathfrak{r}+\sqrt{xy})\,(p+\sqrt{xy})}{x+y}=\frac{(\mathfrak{r}+\sqrt{yz})\,(p+\sqrt{yz})}{y+z}$$

$$\frac{(\mathfrak{r}+\sqrt{xz})\,(o+\sqrt{xz})}{x+z}=\frac{(\mathfrak{r}+\sqrt{xy})\,(o+\sqrt{xy})}{x+y}$$

$$\frac{(\mathfrak{r}+\sqrt{yz})\,(q+\sqrt{yz})}{y+z}=\frac{(\mathfrak{r}+\sqrt{xz})\,(q+\sqrt{xz})}{x+z}$$

149) . . . $$(o+\sqrt{xz})\,(p+\sqrt{xy})\,(q+\sqrt{yz})=(o+\sqrt{xy})\,(p+\sqrt{yz})\,(q+\sqrt{xz})$$

Oder:

$$D\mathfrak{P}\,.\,F\mathfrak{O}\,.\,E\mathfrak{Q}=D\mathfrak{Q}\,.\,E\mathfrak{O}\,.\,F\mathfrak{P}$$

d. h. wenn die Linien $D\mathfrak{O}$, $E\mathfrak{P}$, $F\mathfrak{Q}$ gezogen werden, so schneiden sich diese in einem und demselben Punkt.

Anmerkung 23. Aus 147) folgt:

$$\sqrt{xyz}=(y+z)\left(\frac{m\sqrt{y}+\Re\sqrt{x}}{v}\right)=\sqrt{x+y+z}\,.\,\sqrt{yz}$$

aber auch

$$=(y+x)\left(\frac{m\sqrt{y}+\Re\sqrt{z}}{v}\right)-\sqrt{x+y+z}\,.\,\sqrt{yx}$$

also

$$(y+z)[m\sqrt{y}+\Re\sqrt{x}]-v\sqrt{(x+y+z)}\sqrt{yz}=(y+x)[m\sqrt{y}+\Re\sqrt{z}]-v\sqrt{(x+y+z)}\sqrt{yx}$$

Digitized by Google

$$\left.\begin{matrix} ym\sqrt{y}+\Re y\sqrt{x}-v\sqrt{(x+y+z)}\sqrt{yz} \\ +zm\sqrt{y}+\Re z\sqrt{x} \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} ym\sqrt{y}+\Re y\sqrt{z}-v\sqrt{(x+y+z)}\sqrt{yx} \\ +xm\sqrt{y}+\Re x\sqrt{z} \end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix} (zm-xm)\sqrt{y}+\Re z\sqrt{x}+\Re y\sqrt{x} \\ -\Re x\sqrt{z}-\Re y\sqrt{z} \end{matrix}\right\} = v\sqrt{y(x+y+z)}\,.\,(\sqrt{z}-\sqrt{x})$$

$$\left.\begin{matrix} (z-x)m\sqrt{y}+\Re\sqrt{xz}\,(\sqrt{z}-\sqrt{x}) \\ +\Re y(\sqrt{x}-\sqrt{z}) \end{matrix}\right\} = v\sqrt{y(x+y+z)}\,.\,(\sqrt{z}-\sqrt{x})$$

$$(\sqrt{z}+\sqrt{x})m\sqrt{y}+\Re\sqrt{xz}-\Re y = v\sqrt{y(x+y+z)}$$

150) . . .
$$\left\{\begin{matrix} \Re\sqrt{xyz} = \Re y\sqrt{y}+vy\sqrt{x+y+z}-my[\sqrt{x}+\sqrt{z}] \\ = \Re x\sqrt{x}+ux\sqrt{x+y+z}-lx[\sqrt{y}+\sqrt{z}] \\ = \Re z\sqrt{z}+wz\sqrt{x+y+z}-nz[\sqrt{x}+\sqrt{y}] \end{matrix}\right.$$

Anmerkung 24. Die Entwicklung in XII. wird kürzer, wenn man folgende Lehrsätze als bekannt voraussetzt:

Wenn einem Kreise ein Viereck $\mathfrak{p}\Sigma E\Sigma$ umschrieben ist, so ist

151) . . .
$$\left\{\begin{matrix} 1)\quad \frac{ad}{\Sigma M^2}=\frac{bc}{\Sigma M^2} \quad \text{und} \quad \frac{nb}{EM^2}=\frac{cd}{\mathfrak{p}M^2} \\ 2)\quad \frac{EM\cdot\Sigma M}{a}=\frac{\Sigma M\,.\,\mathfrak{p}M}{c} \quad \text{und} \quad \frac{EM\,.\,OM}{b} \\ \qquad\qquad =\frac{\Sigma M\,.\,\mathfrak{p}M}{d} \end{matrix}\right.$$

Aus 1) geht nun unmittelbar Gleichung 145) hervor, die man indessen nicht braucht, da man die Gleichung 147) aus 2) ableiten kann; nämlich:

$$\frac{\mathfrak{p}M\,.\,M\Sigma}{d}=\frac{EM\,.\,OM}{b}$$

d. i.

Digitized by Google

$$\frac{\sqrt{(y^2+\mathfrak{r}^2)}\,\sqrt{y(x+y)}}{\mathfrak{r}+\sqrt{xy}} = \frac{\sqrt{(p^2+y^2)}\,\sqrt{y(y+z)}}{p+\sqrt{yz}} \quad \text{in Fig 14.}$$

$$\mathfrak{r} = \sqrt{\frac{xyz}{x+y+z}} \qquad p = \frac{my}{\mathfrak{R}}$$

$$\frac{\sqrt{\left(y^2+\frac{xyz}{x+y+z}\right)\sqrt{(x+y)}}}{\sqrt{\frac{xyz}{x+y+z}}+\sqrt{xy}} = \frac{\sqrt{\left(\frac{m^2y^2}{\mathfrak{R}^2}+y^2\right)\sqrt{(y+z)}}}{\frac{my}{\mathfrak{R}}+\sqrt{yz}}$$

$$\frac{\sqrt{[y(x+y+z)+xz]}\,\sqrt{(x+y)}}{\sqrt{xz}+\sqrt{x(x+y+z)}} = \frac{yv\,\sqrt{(y+z)}}{my+\mathfrak{R}\sqrt{yz}}$$

$$\frac{\sqrt{[x+y)(y+z)]}\,\sqrt{(x+y)}}{\sqrt{xz}+\sqrt{x(x+y+z)}} = \frac{v\sqrt{y}\,\sqrt{(y+z)}}{m\sqrt{y}+\mathfrak{R}\sqrt{z}}$$

$$\frac{x+y}{\sqrt{xz}+\sqrt{x(x+y+z)}} = \frac{m\sqrt{y}+\mathfrak{R}\sqrt{z}}{v\sqrt{y}}$$

$$\frac{\sqrt{xz}+\sqrt{x(x+y+z)}}{x+y} = \frac{m\sqrt{y}+\mathfrak{R}\sqrt{z}}{v\sqrt{y}}$$

(Umkehrung der Brüche)

152) . . .
$$\begin{cases} \dfrac{\sqrt{xyz}+\sqrt{(x+y+z)}\,\sqrt{xy}}{x+y} = \dfrac{m\sqrt{y}+\mathfrak{R}\sqrt{z}}{v} \\ \dfrac{\sqrt{xyz}+\sqrt{(x+y+z)}\,\sqrt{yz}}{y+z} = \dfrac{m\sqrt{y}+\mathfrak{R}\sqrt{x}}{v} \end{cases}$$ Ebenso

Anmerkung 25. Aus 152) geht wiederum hervor:

$$\frac{m\sqrt{y}}{v} - \frac{\sqrt{xyz}+\sqrt{x+y+z)}\,\sqrt{xy}}{x+y} - \frac{\mathfrak{R}}{v}\sqrt{z}$$
$$= \frac{\sqrt{xyz}+\sqrt{(x+y+z)}\,\sqrt{yz}}{y+z} - \frac{\mathfrak{R}}{v}\sqrt{x}$$

$$(y+z)\sqrt{xyz}+(y+z)\sqrt{(x+y+z)}\,\sqrt{xy}-(y+x)\sqrt{xyz}$$
$$-(x+y)\sqrt{(x+y+z)}\sqrt{yz} = (x+y)\frac{\mathfrak{R}}{v}(\sqrt{z}-\sqrt{x})$$

Digitized by Google

$$\left.\begin{aligned}(s-x)\sqrt{xyz}+\sqrt{z}\,.\,\sqrt{(x+y+z)\sqrt{xyz}}\\ -\sqrt{x}\,.\,\sqrt{(x+y+z)}\,\sqrt{xyz}\\ +y\sqrt{x}\,.\,\sqrt{(x+y+z)y}\\ -y\sqrt{z}\,.\sqrt{x+y+z)y)}\end{aligned}\right\} = (x+y)(z+y)\frac{\Re}{v}(\sqrt{z}-\sqrt{x})$$

$$(\sqrt{s}+\sqrt{x})\sqrt{xyz}\quad\sqrt{(x+y+z)}\,\sqrt{xyz}-y\sqrt{(x+y+z)y} = (x+y)(z+y)\frac{\Re}{v}\sqrt{z}-\sqrt{x}$$

XIII. Auflösung.

(Begründung der Construction von Steiner).

Steiners Construction (die 5te) ist im Wesentlichen folgende:

1) Man halbire die Winkel des gegebenen Dreiecks *DEF* durch die Linien *DP*, *EP*, *FP*.

2) In die hierdurch entstehenden Dreiecke *PEF*, *PDF*, *PED* beschreibe man die 3 Kreise $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}'$, $\mathfrak{M}''$.

3) Man verbinde die Mittelpunkte $\mathfrak{M}'''$, $\mathfrak{M}''$ zweier eingeschriebenen Kreise durch eine gerade Linie $\mathfrak{M}'''$, $\mathfrak{M}''$, welche die Linie *DP* in $\mathfrak{l}$ schneidet.

4) Den Berührungspunkt $\mathfrak{D}$ des dritten Kreises verbinde man mit $\mathfrak{l}$ durch eine gerade Linie $\mathfrak{D}\mathfrak{l}$.

5) Endlich halbire man den Winkel $E\mathfrak{D}\mathfrak{l}$, wodurch man in *EP* den Mittelpunkt *M* eines der gesuchten Kreise erhält.
Durch Halbirung des Winkels $F\mathfrak{D}\mathfrak{l}$ erhält man den Mittelpunkt *N* eines zweiten Kreises.

Steiner hat diese Construction ohne Beweis gegeben. Derselbe ist von Professor Zornow in Königsberg im Jahre 1833 geliefert worden und findet sich im zehnten Bande des Crelle'schen Journals pag. 300—302. Diesen Beweis hat Adams in seiner Schrift „das Malfatti'sche Problem", Winterthur 1846, Seite 16, modificirt gegeben, und da derselbe sehr hübsch ist, so ist es eigentlich überflüssig, noch eine andere Begründuag der Steiner'schen Construction beizubringen. Jedoch mag die folgende Entwicklung hier Platz

Digitized by Google

finden, die ich bereits ausgeführt hatte, als der von Adams reproducirte Zornow'sche Beweis mir zu Gesicht kam.

Beweis. Zur Führung des Beweises werde hier der nachstehende Lehrsatz vorangeschickt:

> Wenn in dem Dreieck DEF der Punkt P derjenige Punkt ist, wo die 3 winkelhalbirenden Linien sich schneiden, so ist DP eine für die Kreise $\mathfrak{M}'$ und $\mathfrak{M}''$ gemeinschaftliche Tangente, welche die Centrallinie $\mathfrak{M}'\mathfrak{M}''$ in l schneidet. Es giebt alsdann aber noch eine zweite gemeinschaftliche Tangente, welche jene Centrallinie ebenfalls in l schneidet, und diese trifft bei ihrer Verlängerung nach dem Berührungspunkt $\mathfrak{O}$ des Kreises $\mathfrak{M}$.

Um hierzu den Beweis zu führen, bedarf es einer weiteren Ausführung: Wenn in einem Dreieck ERl (Fig 17) von den Ecken E und l aus zwei einander schneidende Querlinien EP und lO beliebig gezogen werden, so lässt sich beweisen, dass

154) . . . $EJ \,.\, R\mathfrak{O} : E\mathfrak{O} \,.\, JP = Bl : Pl$

ist. Also

$$EJ \,.\, (CR - EO) : E\mathfrak{O} \,.\, JP = PP + Pl : Pl$$

$$EJ \,.\, FR \,.\, Pl - EJ \,.\, E\mathfrak{O} \,.\, Pl = E\mathfrak{O} \,.\, JP \,.\, RP + E\mathfrak{O} \,.\, JR \,.\, Pl$$

$$E\mathfrak{O}[JP \,.\, RP + JP \,.\, Pl + EJ \,.\, Pl = EJ \,.\, ER \,.\, Pl$$

$$EO = \frac{EJ \,.\, Pl \,.\, ER}{Pl(JP + EJ) + JP \,.\, RP}$$

$$ER = \frac{df}{e+f}, \quad RP = \frac{du}{e+f}$$

155) . . . $$E\mathfrak{O} = \frac{(v - JP)\, Pl \,.\, df}{Pl \,.\, v(e+f) + JP \,.\, du}$$

Nun handelt es sich darum, für JP und Pl passende, zur Vereinfachung taugliche Ausdrücke zu finden und dann die vorstehende Gleichung zu reduciren. Dieses Geschäft ist jedenfalls ausserordentlich mühsam, wenn auch ein weniger weitläufiges Verfahren als das nachfolgende möglich sein sollte.

Nach den beiden Berührungspunkten l' und l'' der Linie DP ziehe man die Radien

$$\mathfrak{M}''l' = r'' \quad \text{und} \quad \mathfrak{M}'''l'' = r'''$$

Digitized by Google

Alsdann ist, (wie ich an einem andern Orte bewiesen):

$$156) \ldots JP = \frac{ll'' \,.\, P\mathfrak{M}''^2}{r'''^2 + ll' \,.\, Pl''}$$

$$JP = \frac{\frac{r'''}{(r''+r''')}\left[\frac{u+v-f}{1} - \left(\frac{u+w-e}{2}\right]\right) . RM''^2}{r'''^2+ll''(Pl+ll'')}$$

$$PM^2 = \frac{uv(u+v-f)}{u+v+f}$$

$$JP = \frac{\frac{r'''}{(r''+r''')}\left(\frac{v+e-w-f}{2}\right) . uv\left(\frac{u+v-f}{u+v+f}\right)}{r'''^2+ll''^3+ll'' \,.\, Pl}$$

$$JP = \frac{\frac{r'''}{2(r''+r''')}(v+e-w-f)uv\left(\frac{u+v-f}{u+v+f}\right)}{r''^2+\frac{(v+e-w-f)^2r'''^2}{4(r''+r''')^2}+\frac{(v+e-w-f)r'''}{2(r''+r''')}\times \left[\frac{(u+v-f)r''+(u+w-e)r'''}{2(r''+r''')}\right]}$$

$$JP = \frac{2r'''(v+e-w-f)uv\left(\frac{u+v-f}{u+v+f}\right)}{4r'''^2(r''+r''')+(v+e-w-f)^2r'''^2+(v+e-w-f)r'''\times \frac{[(u+v-f)r''+(u+w-e)r''']}{r''+r'''}}$$

$$JP = \frac{2(v+e-w-f)uv\left(\frac{u+v-f}{u+v+f}\right)(r'+r'')}{4r'''(r''+r''')+(v+e-w-f)^2r'''^2+(v+e-w-f)r'''\times [(u+v-f)r''+u+w-e)r''']}$$

$$JP = \frac{2(r+r''')(v+e-w-f)uv\left(\frac{u+v-f}{u+v+f}\right)}{4r'''(r''+r''')+(v+e-w-f)[(u+v-f)r''+(u+v-f)r''']}$$

$$157) \ldots JP = \frac{2(v+e-w-f)uv\left(\frac{u+v-f}{u+v+f}\right)}{4r'''(r''+r''')+(v+e-w-f)(u+v-f)}$$

Nun ist

$$r'' = \frac{\mathfrak{R}e}{u+w+e'} \qquad e'' = \frac{\mathfrak{R}f}{u+v+f}$$

also

Digitized by Google

$$4r'''(r''+r''') = \frac{4\Re f}{u+v+f}\left[\frac{\Re e}{u+w+e}+\frac{\Re f}{u+v+f}\right]$$

ferner

$$\frac{\Re e}{u+w+e} : \frac{\Re f}{u+v+f} = r'' : r''' = \frac{e+u-w}{2} : \frac{f+u-v}{2}$$

also

$$\frac{e}{u+w+e} : \frac{f}{u+v+f} = e+u-w : f+u-v$$

daher

$$4r'''(r''+r''') = \frac{4\Re f}{u+v+f}\left[\frac{\Re f(e+u-w)}{(f+u+v)(f+u-v)}+\frac{\Re f}{f+u+v}\right]$$

$$= \frac{4\Re^2 f^2}{f+u+v}\left[\frac{e+v-w+f+u-v}{(f+u+v)(f+u-v)}\right]$$

$$JP = \frac{2(v+e-w-f)uv\left(\frac{u+v-f}{u+v+f}\right)}{\frac{4\Re^2 f^2}{(u+v+f)^2}\left[\frac{e+u-w+f+u-v}{f+u-v}\right]+(v+e-w-f)(u+v-f)}$$

$$JP = \frac{2(v+e-w-f)uv\left(\frac{u+v-f}{u+v+f}\right)(u+v+f)^2(f+u-v)}{4\Re^2 f^2(e+u-w+f+u-v)+(v+e-w-f)(u+v-f)(u+v+f)^2}$$
$$(f+u-v)$$

$$JP = \frac{2(v+e-w-f)uv(u+v-f)(u+v+f)(f+u-v)}{4\Re^2 f^2(e+u-w+f+u-v)+(v+e-w-f)(u+v-f)(u+v+f)^2}$$
$$(f+u-v)\times(f+u-v)$$

(Zähler und Nenner mit $f+u-v$ multiplicirt)

$$JP = \frac{2(v+e-w-f)uv \cdot 2\Im f \cdot 2\Re f}{4\Re^2 f^2(v+u-w+f+u-v)(f+v-u)+(v+e-w-f)(u+v+f)}$$
$$\cdot 2\Re f \cdot 2\Re f$$

$$JP = \frac{2(v+v-w-f)uv}{(e+u-w+f+u-v)(f+v-u)+(v-w-f)(u+v+f)}$$

$$JP = \frac{2(v+e-w-f)uv}{2ef-2u^2+4uv-2ew-2wf+2ve}$$

158) . . . $JP = \dfrac{(v+e-w-f)uv}{ef-u^2+2ve-vw-wf+ve}$

Ferner findet man ohne grosse Mühe

159) . . . $Pl = \dfrac{e(u+v)^2+f(u+w)^2-ef(e+f)}{2[e(f+u+v)+f(e+u+w)]}$

Digitized by Google

$$= \frac{e(u+v+f)(u+v-f)+f(u+w+e)(u+w-e)}{2[e(f+u\cdot v)+f(e+u+w)]}$$

Nun ist

$$r'' : r''' = \frac{e}{e+u+w} : \frac{f}{f+u+v}, \quad \text{aber auch} \quad = \frac{e+u-w}{2} : \frac{f+u-v}{2}$$

also

$$e : f = (e+u+w)\,(e+u-w) : (f+u+v)\,(f+u-v)$$

$$Pt = \frac{e(u+a+f)(u+v-f)+e\dfrac{(f\ u+v)(f+u-v)}{e+u-w}}{2[e(f+n+v)+e\dfrac{(f+u+v)(f+u-v)}{e+u-w}}$$

$$Pl = \frac{(u+v+f)(e+u-w)+(u+w-e)(f+u-v)}{2[e+u-w+f+u-v]}$$

160) . . . $Pl = \dfrac{u^2-ef-vw+ve+wf}{e+f+2u-v-w}$

Dieser Ausdruck ist aber auch

$$= \frac{(v+e-w-f)du^2}{(wf-vc)[e+f+2u-v-w]}$$

denn

161) . . . $(v+e-w-f)du^2 = (wf-vc)(u^2-ef-vw+ve+wf)$

(nachzuweisen)

$$vdu^2+deu^2-dwu^2-dfu^2 = \begin{cases} u^2wf-wf^2e-vw^2f+vwef+w^2f^2 \\ -u^2ve+ve^2f+v^2we-vwef-v^2e^2 \end{cases}$$

Es ist nun

$$we\,f^2 = w\,.\,v^2e + w\,.\,u^2(d+f)$$
$$ve^2f = v\,.\,w^2f + v\,.\,u^2(d+e)$$

$$vdu^2+deu^2-dwu^2-dfu^2 = \begin{cases} v^2wf-vw^2e-wu^2(d+f)-vw^2f+w^2f^2 \\ -u^2ve+vw^2f+vu^2(d+e)+v^2we-v^2e^2 \end{cases}$$

$$vdu^2+deu^2-dwu^2-dfu^2 = \begin{cases} -wv^2e-wu^2d-vw^2f+w^2f^2 \\ -u^2ve+vw^2f+u^2dv+u^2ve+v^2we-v^2e^2 \end{cases}$$

$$= -u^2dw+w^2f^2+u^2dv-v^2e^2$$

$$de\,u^2 - df\,u^2 = w^2f^2 - v^2e^2$$

$$w^2f^2 = (u^2+v^2)w^2 + 2uvw\,\Re$$
$$v^2e^2 = (u^2+w^2)v^2 + 2uvw\,\Re$$

$$de\,u^2 - df\,u^2 = u^2w^2 - u^2v^2$$

Digitized by Google

$$de - df = w^2 - v^2$$

$$de - w^2 = df - v^2$$

Die Gleichung 155) verwandelt sich demnach in

$$E\mathfrak{D} = \frac{\left[v - \frac{(v+e-w-f)uv}{ef-u^2+2uv-vw+ve-wf}\right] \cdot \left[\frac{(v+e-w-f)du^2}{(wf-ve)[e+f+2u-v-w)]}\right]df}{\frac{(v+e-w-f)du^2}{(wf-ve)(e+f+2u-v-w)} \cdot v(e+f) + \frac{(v+e-w-f)uv \cdot du}{ef-u^2+2uv-vw+ve-wf}}$$

$$E\mathfrak{D} = \frac{[v(ef-u^2+2uv-vw+ve-wf)-(v+e-w-f)uv]df}{v(e+f)(ef-u^2+2uv-vw+vr-wf)+wf-ve)(v+e-w-f)}$$

$$E\mathfrak{D} = \frac{[cf-u^2+uv-vw+ve-wf+uw-eu+fu]df}{(e+f((ef-u^2+2uv-vw+ve=wf)-(wf-ve)(e+f+2u-v-w)}$$

$$E\mathfrak{D} = \frac{[ef-u^2+uv+uw-vw+ve+fu-wf-eu]df}{e^2f+ef^2-eu^2-fu^2+2uvf-vwf+2uwf-vwf-w^2f+v^2e}$$

$$e^2f = w^2f + u^2d + u^3e$$

$$ef^2 = v^2e + u^2d + u^2f$$

$$E\mathfrak{D} = \frac{[ef-u^3+uv+uw-vw+ve+fu-wf-eu]df}{2ef^2-u^2f-u^2f+2uvf+2uwf-2vwf}$$

$$E\mathfrak{D} = \frac{[ef-u^2+uv+uw-vw+ve+uf-wf-ue]d}{2[ef-u^2+uv+uw-vw]}$$

$$E\mathfrak{D} = \tfrac{1}{2}d + \frac{(ve+fu-wf-ue)d}{2[ef-u^2+uv+uw-vw]}$$

Nun ist

$$ved + dfu - wfd - ued = (v-w)(ef - u^2 + uv + uw - vw)$$

oder

$$= vef - u^2u + uv^2 - v^2w$$
$$- wef + u^2w - vw^2 + vw^2$$

oder

$$\left.\begin{matrix} ud \cdot f - ud \cdot e \\ + wf \cdot e - ve \cdot f \\ + ve \cdot d - wf \cdot d \end{matrix}\right\} \begin{matrix} u^2w - u^2v \\ = + w^2v - v^3w \\ + v^2u - w^2u \end{matrix}$$

oder

Digitized by Google

$$\left.\begin{matrix} u(df - v^2) \\ + w(ef - u^2) \\ + v(ed - w^2) \end{matrix}\right\} = \begin{matrix} udc - u^2v \\ + vef - v^2w \\ + wdf - w^2u \end{matrix} \quad \begin{matrix} u(de - w^2) \\ + v(ef - u^2) \\ + w(df - v^2) \end{matrix}$$

oder

$$(u + v + w)2R\Re = (u + v + w)2R\Re$$

Also

$$E\mathfrak{D} = \tfrac{1}{2}d + \tfrac{1}{2}(v - w) = \frac{d + v - w}{2}$$

und demnach ist $\mathfrak{D}$ der in der Seite d liegende Berührungspunkt des dritten Kreises.

Jetzt werde ein Ausdruck für $\mathfrak{D}l$ gesucht. Es ist:

$$\mathfrak{D}l^2 = \frac{El^2 \cdot \mathfrak{D}F + Fl^2 \cdot E\mathfrak{D} - E\mathfrak{D}^2 \cdot \mathfrak{D}F - \mathfrak{D}F^2 E\mathfrak{D}}{d}$$

$$El^2 = \frac{f^2 Pl + v^2(u - Pl) - Pl^2(u - Pl) - (u - Pl)^2 Pl}{u}$$

$$= \frac{(f^2 - u^2 - v^2)}{u} Pl + v^2 + Pl^2$$

$$El^2 = \frac{2\Re v}{w} Pl + v^2 + Pl^2$$

$$El^2 = \frac{2\Re w}{v} Pl + w^2 + Pl^2$$

$$\mathfrak{D}l^2 = \frac{\left(\frac{d+w-v}{2} \cdot\right)\left[\frac{2\Re v}{w} Pl + v^2 + Pl^2\right] + \left(\frac{d+v-w}{2}\right)\left[\frac{2\Re w}{v} Pl + w^2 + Pl^2\right]}{d}$$

$$- \left(\frac{d+v-w}{2}\right)^2 \left(\frac{d+w-v}{2}\right) - \left(\frac{d+w-v}{2}\right)^2 \left(\frac{d+v-w}{2}\right)$$

$$\mathfrak{D}l^2 = \left[\frac{(d+w-v)\frac{\Re v}{w} + (d+v-w)\frac{\Re w}{v}}{d}\right] Pl + Pl^2$$

$$+ \frac{v^2 \cdot \mathfrak{D}F + w^2 \cdot \mathfrak{D}E - E\mathfrak{D}^2 \cdot \mathfrak{D}F - \mathfrak{D}F^2 \cdot E\mathfrak{D}}{d}$$

$$\mathfrak{D}l^2 = \left[\frac{\Re(e+f) + u(v+w)}{ud}\right] 2r^2 Pl + Pl^2 + \mathfrak{D}P^2$$

$$\mathfrak{D}l^2 = \left[\frac{\Re(e+f) + u(v+w)}{u(d+v+w)}\right] 2\Re Pl + Pl^2 + \Re^2 + \left[\frac{(d+v-w)}{2} - m\right]^2$$

Digitized by Google

$$\mathfrak{D}l^2 = \left[\frac{\Re(e+f)-du}{u(d+v+w)}\right] 2\Re Pl + 2\Re Bl + \Re^2 + \left[\frac{v+e-w-f}{2}\right]^2 + Pl^2$$

Nun ist

$$Pl^2 = \left[\frac{(u+v-f)r''-(uw-e)r'''}{2(r''+r''')}\right]^2$$

$$= \frac{(+v-f)^2r''^2+(u+w-e)^2r'''^2+2(u+v+w-e)r''r'''}{4(r''+r''')^2}$$

Ferner

$$\left(\frac{v+r-w-f}{2}\right)^2 = \frac{[(u+v-f)-(u-w-e)]^2[r''^2+r'''^2+2r''r''']}{4(r''+r''')}$$

$$= \left[\begin{array}{l}(u+v-f^2)r''^2+(u+w-e)^2r''^2+(u+v-f)^2r'''^2+(u+w-e)^2r'''^2 \\ -2(u+v-f)(u+w-e)[r''^2+r'''^2+2r''r'''] \\ +\dfrac{(u+v-f)^2 2r''r''+(u+w-e)^2 2r''r'''}{4(r''+r''')^2}\end{array}\right]$$

Also

$$Pl^2 + \left(\frac{v+e-w-f}{2}\right)^2$$

$$= (u+v-f)^2r'''^2+(u+w-e)^2r''^2+2(u+v-f)(u+w-e)r''r'''$$
$$+ 2(u+v-f)^2r''^2+(u+v-f)2r''r'''+2(u+w-e)^2r'''^2+(u+w-e)^2 2r''r'''$$
$$\frac{-2(u+v-f)(u+w-e)[r''+r'''}{4(r''+r''')^2}$$

$$= [(u+a-f-f)r'''+(u+w-e)r'']^2$$
$$+ 2(u+v-f)^2(r'')(r''+r''')+2(u+w-e)^2r'''(r''+r''')$$
$$\frac{-(u+v-f)(u+w-e)[r''+r''']^2}{4(r''+r''')^2}$$

$$\mathfrak{D}l^2 = \left[\frac{\Re(e+f)-du}{u'd+v+w)}\right] 2\Re Pl + 2\Re Pl + \Re^2 + \frac{[(u+v-f)r'''+(u+w-e)'']^2}{4(r''+r''')^2}$$
$$+ \frac{(u+v-f)^2r''+(u+w-e)^2r'''}{2(r''+r''')} - \frac{(u+v-f)(u+w-e)(r''+r''')}{2(r''+r''')}$$

$$\frac{(u+v-f)r''[u+v-f-(v+w-e)]+(u+w-e)r'''[v+w-e-(u+v-f)]}{2(r'+r'')}$$

$$= (v+e-w-f)\frac{[(u+v-f)r''-(u+w-e)r''']}{2(r''+r''')}$$

$$= (v+e-w-f)\frac{[(-u+v-f)r''+2ur''-(-u+w-e)r''-2ur''']}{2(r''+r''')}$$

nun ist

Digitized by Google

$$(f+u-v)r'' = (e+u-w)r'''$$

$$\mathfrak{D}l^2 = \left[\frac{\mathfrak{R}(e+f)-du}{u(d+v+w}\right] 2\mathfrak{R}Pl + 2\mathfrak{R}Pl + \mathfrak{R}^3 + \frac{(v+e-w-f)2u(r''+r''')}{2(r''+r''')} + \frac{[(u+v-f)r'''+(u+w-e)r''']}{4(r''+r''')^2}$$

$$Pl = \frac{u^2 - ef - vw + ve + wf}{2u+e+f-v-w}$$

$$\mathfrak{D}l^2 = \left[\frac{2\mathfrak{R}^2(e+f)-2\mathfrak{R}ud}{u(d+v+w)}\right] \cdot \left[\frac{u^2-ef-vw}{2u+e+f-v-w}\right] + \left[\frac{2\mathfrak{R}^2(e+f)-2\mathfrak{R}ud}{u(d+v+w)}\right] \cdot \left[\frac{ve+wf}{2u+e+f-v-w}\right] + +$$

$$u^2 - ef - vw = -\frac{vw(\mathfrak{R}+u)}{\mathfrak{R}}$$

$$(e+f)(ve+wf) = (v+w)\left[\frac{vw(\mathfrak{R}+u)}{\mathfrak{R}} + 2u(\mathfrak{R}+u)\right]$$

$$d(ve+wf) = (v+w)vw\left(\frac{\mathfrak{R}+u}{\mathfrak{R}}\right)$$

$$\mathfrak{D}l^2 = \left[\frac{2\mathfrak{R}^2(e+f)-2\mathfrak{R}ud}{u(d+v+w)}\right] \cdot \left[\frac{-vw(\mathfrak{R}+u)}{\mathfrak{R}(2u+e+f-v-w}\right] + 2(v+w)\left[\frac{vw(\mathfrak{R}+u)\mathfrak{R}+2\mathfrak{R}^2u(\mathfrak{R}+u)}{u(d+v+w)(2u+e+f-v-w)}\right] - \frac{2u[(v+w)vw(\mathfrak{R}+u)]}{u(d+v+w)(2+e+f-v-w)} + +$$

$$\mathfrak{D}l^2 = \frac{2(\mathfrak{R}+u)[vw[du \quad \mathfrak{R}(e+f)]]}{u(d+v+w)(2u+e+f-v-w(} + 2(\mathfrak{R}+u)\left[\frac{(v+w)vw\mathfrak{R}+2\mathfrak{R}^2u(v+w)-uvw(v+w)}{u(d+a+w)(2u+e+f-v-w)}\right] + +$$

$$\mathfrak{D}l^2 = \frac{2(\mathfrak{R}+u)[uvwd-\mathfrak{R}vw(e+f)+\mathfrak{R}vw(v+w+2\mathfrak{R}^2u(v+w)-2uvw(v+w)]}{u(d+v+w)(2x+e+f-v-w)} + +$$

$$2\mathfrak{R}vw = u(d^2-v^2-w^2)$$

$$\mathfrak{D}l^2 = \frac{(\mathfrak{R}+u)[2uvw(d-v-w)-u(d^2-v^2-w^2)(e+f-v-w)+4\mathfrak{R}^2u(v+w)]}{u(d+v+w)(2u+e+f-v-w)} + +$$

$$\mathfrak{D}l^2 = \frac{(\mathfrak{R}+u)[2dvw-2vw(v+w)-(d-v^2-w^2)(e+f-v-w)+\mathfrak{R}^2(v+w)]}{(d+a+w)(2u+e+f-v-w)} + +$$

$$2dvw = 2(e+f)vw - 4\mathfrak{R}ud$$

Digitized by Google

$$\mathfrak{D}l^2 = \frac{(\mathfrak{R}+v)[(d+v+w)(v+w-d)(e+f-v-w)+4\mathfrak{R}^2(v+w)-4\mathfrak{R}ud]}{(d+v+w)(2u+e+f-v-w)} + +$$

Nun ist

$$4\mathfrak{R}ud-4\mathfrak{R}^2(v+w) = (d+v+w)[(v+w-d)(e+f-v-w)+(v+e-w-f)^2]$$

Nachweisung:

$$4\mathfrak{R}ud = 4vwl = 2vw(e+f)-2dvw$$
$$4\mathfrak{R}^2v = 4vln-4\mathfrak{R}uw = v(e+f-d)(d+e-f)-2v[e^2-(u^2+w^2)]$$
$$4\mathfrak{R}^2w = 4wlm-\mathfrak{R}uv = w(e+f-d)(d+f-e)-2w[f^2-(u^2+v^2]$$

Also

$$\left.\begin{matrix} 2vw(e+f) - 2vw - v(2df-d^2-e^2-f^2)-2v(u^2+w^2) \\ -w(2de-d^2-e^2-f)-2w(u^2+w^2) \end{matrix}\right\}$$
$$= (d+v+w\left[\begin{matrix} 3vc+3wf-vf-we-4vw+e^2+f^2 \\ -de-df-2ef+dv+dw \end{matrix}\right]$$
$$= \begin{cases} d(e^2+f^2-de-df-2ef \\ +3v^2e+3w^2f+2vwe+2vwf-2dvw \\ -v^2f-w^2e-4v^2w-4vw^2+dv^2+dw^2 \\ +2vde-2vdf=2vef+2wdf-2wde-2wef \\ +v(d^2+e^2+f^2)+w(d^2+e^2+f^2) \end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix} -2u^2(v+w) \\ +2v^2w+2vw^2 \end{matrix}\right\} = \begin{cases} d[e^2+f^2-de-df-2ef]-(v^2-w^2)(e+f-d) \\ +2vde-2vef+2wdf-2wef+4v^2e+4w^2f \end{cases}$$

nun ist

$$2vw^2 - 2vu^2 = 2vde - 2vef$$
$$2wv^2 - 2wu^2 = 2wdf - 2wef$$

und

$$d(e^2 + f^2) = (v^2 + w^2)(b + f) + 2du^2$$

$$d[de + df + 2ef] = d)v^2 + w^2) + 2du^2 + 4v^2e + 4w^2f$$

$$def = du^2 + d^2f - dv^2$$
$$def = dv^2 + d^2e - dw^2$$

$$2d[de + df] = 2d(v^2 + w^2) + 4v^2e + 4w^2f$$

$$df - v^2 = ef - u^2$$
$$de - w^2 = ef - u^2$$

$$4def - 2du^2 = 4v^2e + 4w^2f$$

$$def = du^2 + ev^2 + fw^2$$

Also erwiesen

Digitized by Google

$$\mathfrak{D}l^2 = (\mathfrak{R}+u)\frac{\left[\begin{array}{l}(d+v+w)(v+w-d)(s+f-v-w)\\ -(d+v+w)[(v+w-d)(e+f-v-w)+(v+e-w-f)^2]\end{array}\right]}{(d+v+w)(2u+e+f-v-w)}$$

$$\mathfrak{D}l^2 = -\frac{(\mathfrak{R}+u)(v+e-w-f)^2}{2u+e+f-v-w}+2\mathfrak{R}\mathfrak{P}+\mathfrak{R}^2$$
$$+\frac{[(u+v-f)r'''+(u+w-e)s'']^2}{4(r''+r''')^2}$$
$$+\frac{2u(v+e-w-f)(r''-r''')}{2(r''+r''')}$$

Nun ist

$$\frac{-(v+e-w-f)^2}{2u+e+f-v-w}=\frac{(v+e-w-f)(r'''-r'')}{r''+r'''}$$

oder

$$-(v+e-w-f((r''+r''')=(2u+e+f-v-w)(r'''-r'')$$

denn

$$(ef+u-v)r''=(e+u-w)r'''$$

$$\mathfrak{D}l^2 = \frac{2(\mathfrak{R}+u)[v+e-w-f](r'''-r'')}{2(r''+r''')}+2\mathfrak{R}\frac{[(u+v-f)r''+(u+w-e)r''']}{2(r''+r''')}$$
$$+\mathfrak{R}^2+\frac{](u+v-f)r'''+(u+w-e)r'']^2}{4(r''+r''')^2}$$
$$+2u\frac{[v+e-w-f](s''-r''')}{2[c''+r''']}$$

$$\mathfrak{D}l^2 = \frac{2\mathfrak{R}[r'''(v+e-w-f)-(v+e-w-f)r'']}{2(r''+r''')}$$
$$+2\mathfrak{R}\frac{[(u+v-f\ r''+(u+w-e)r'''[}{2(r''+r''')}$$
$$+\mathfrak{R}^2+\frac{[(u+v-f)r'''+(u+w-e)r'']^2}{4(r''+r''')^2}$$

$$\mathfrak{D}l^2 = \frac{2\mathfrak{R}[(u+v-f)r'''+(u+w-e)r'']}{2(r''+r''')}$$
$$+\mathfrak{R}^2+\frac{[(u+v-f)r'''+(u+w-e)r'']^2}{4(r''+r''')^2}$$

$$\mathfrak{D}l=\mathfrak{R}+\frac{[(u+v-f)r'''+(u+w-e)r'']}{2(r''+r''')}$$

Ferner ist

Digitized by Google

$$l'l = l_1 = \frac{(v+e-w-f)r''}{2(r''+r''')}$$

und daher

$$\mathfrak{D}l + l_1 = \mathfrak{R} + \frac{[(u+v-f)r''' + (u+v-f)r'']}{2(r''+r''')}$$

$$\mathfrak{D}l_1 = \mathfrak{R} + \frac{u+v-f}{2}$$

Ebenso

$$\mathfrak{Q}n_1 = \mathfrak{R} + \frac{v+w-d}{2}$$

Nun lässt sich beweisen, dass in das Viereck $E\mathfrak{D}i\mathfrak{Q}$ sich ein Kreis beschreiben lässt, denn

$$\mathfrak{D}l_1 + E\mathfrak{Q} = \mathfrak{R} + u + \frac{v}{2} - f + \frac{f+v-u}{2}$$

$$\mathfrak{D}l_1 + E\mathfrak{Q} = \mathrm{R} + v$$

Ebenso

$$\mathfrak{Q}n_1 + E\mathfrak{D} = \mathfrak{R} + v$$

Da nun

$$il_1 = in_1$$

ist, so folgt

$$\mathfrak{D}i + E\mathfrak{Q} = \mathfrak{Q}i + E\mathfrak{D}$$

Sucht man einen Ausdruck für $\mathfrak{Q}i$, so kann man folgendermassen verfahren:

$$\mathfrak{D}l = \mathfrak{R} + \frac{(u+v-f)r''' + (u+w-e)r''}{2(r''+r''')}$$

$$Pl = \frac{(u+v-f)r'' + (u+w-e)r'''}{2(r''+r''')}$$

Nun ist

$$\mathfrak{D}l + Pl = \mathfrak{R} + \frac{u+v-f+u+w-e}{2}$$

subtrahirt

Digitized by Google

$$Pl+il=\frac{(r'+r''+r'''-\Re)}{2(r'+r''+r''')}[3\Re+u+v+w-l-m-n]$$

$$\mathfrak{D}i=\frac{(2\Re+2u+v+w-e-f)(r'+r''+r''')+[3\Re+u+v+w-l-m-n]+\Re[3\Re+u+u+w-l-m-n]}{2(r'+r''+r''')}$$

$$\mathfrak{D}i=\frac{\Re]\Re+u-l+\Re+v-m+\Re+w-n]}{2(r'+r''+r''')}-\Re+\frac{\Re+u-l}{2}$$

IX.

Miscellen.

1.

Einige durch den Ausdruck des Bogens bestimmte Curven.

Bezeichne s den Bogen einer ebenen Curve, x, y die Coordinaten des laufenden Punktes, τ den Richtungswinkel der Tangente gegen die x Axe, $\varrho = \frac{ds}{\partial\tau}$ den Krümmungsradius.

Sei s in x, y, $\frac{\partial y}{\partial x}$ gegeben, und die Gleichung der Curve in x, y für die 4 besonders einfachen Fälle:

$$s = \frac{y}{x^2},\quad x^2+y^2,\quad \frac{dy}{\partial x},\quad x\frac{\partial y}{\partial x}$$

gesucht. In den 3 ersten Aufgaben ist ein constanter Factor, der sich als Linieneinheit betrachten lässt, der Kürze wegen $= 1$ gesetzt und kann jederzeit leicht ergänzt werden.

Die 2 ersten Aufgaben sind nur Specialfälle der allgemeinern, wo zwischen s, x, y eine beliebige Gleichung 2. Grades gegeben ist, einer Aufgabe die in Crelle J. LXII. 193 bereits gelöst ist, zeichnen sich aber dadurch aus, dass ihre Lösung nur Differentiation bis zu 2. Ordnung, jene hingegen bis zu 3. Ordnung erfordert.

Ausserdem ist die erste der 4 Curven in Nr. VIII S. 200 dieses Teiles untersucht und Eigenschaften derselben ermittelt, schliesslich auch ihre Gleichung daraus hergeleitet worden, deren unmittelbare Herleitung auf kürzestem Wege unsere gegenwärtige Aufgabe ist.

Digitized by Google

Curve I.

$$s = \frac{y}{x} = \operatorname{tg}\varphi$$

Differentiirt man die Gleichung

$$sx = y \tag{1}$$

2 mal, so kommt:

$$s\cos\tau + x = \sin\tau \tag{2}$$

$$-s\sin\tau + 2\varrho\cos\tau = \cos\tau \tag{3}$$

Letztere Gleichung bestimmt linear 1. Ordnung s als Function von τ. Ihr Integral ist bekannt und lautet:

$$s = \frac{1}{2\sqrt{\cos\tau}} \int \partial\tau \sqrt{\cos\tau}$$

Daraus folgt nach Gl. (2):

$$x = \sin\tau - \tfrac{1}{2}\sqrt{\cos\tau} \int \partial\tau \sqrt{\cos\tau}$$

dann nach Gl. (1):

$$y = \tfrac{1}{4}\left(\frac{2\sin\tau}{\sqrt{\cos\tau}} - \int \partial\tau \sqrt{\cos\tau}\right) \int \partial\tau \sqrt{\cos\tau}$$

dann nach (3):

$$\varrho = \tfrac{1}{2} + \frac{\operatorname{tg}\tau}{4\sqrt{\cos\tau}} \int \partial\tau \sqrt{\cos\tau}$$

Um die elliptische Integralfunction in der Grundform darzustellen, hat man nach Gudermann'scher Bezeichnung, wo

$$\operatorname{el} u = \int_0 \operatorname{dn}^2 u \, \partial u$$

die zweite Gattung als Function der ersten ausdrückt, zu setzen:

$$\cos\tau = \operatorname{cn}^2 u; \quad \text{Modul } k = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

dann wird

$$\int \partial\tau \sqrt{\cos\tau} = \sqrt{2}\,(2\operatorname{el} u - u) + \text{const}$$

Die Gleichungen der Curve, die Werte des Bogens und des Krümmungsradius lauten dann:

$$x = \sqrt{2}\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u - \frac{\operatorname{cn} u}{\sqrt{2}}(2\operatorname{el} u - u + c) \tag{4}$$

$$y = \tfrac{1}{2}\left(\frac{2\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u}{\operatorname{cn} u} - 2\operatorname{el} u + u - c\right)(2\operatorname{el} u - u + c) \tag{5}$$

Digitized by Google

$$s = \frac{1}{\sqrt{2\,\mathrm{cn}\,u}}(2\,\mathrm{el}\,u - u + c) \tag{6}$$

$$\varrho = \tfrac{1}{2} + \frac{\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{dn}\,u}{2\,\mathrm{cn}\,u}(2\,\mathrm{el}\,u - u + c) \tag{7}$$

Curve II.

$$s = x^2 + y^2 \tag{8}$$

Nach zweimaliger Differentiation erhält man:

$$x\cos\tau + y\sin\tau = \tfrac{1}{2}$$
$$x\sin\tau - y\cos\tau = \varrho$$

woraus:

$$\left.\begin{aligned} x &= \tfrac{1}{2}\cos\tau + \varrho\sin\tau \\ y &= \tfrac{1}{2}\sin\tau - \varrho\cos\tau \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

$$\varrho^2 + \tfrac{1}{4} = x^2 + y^2 = s \tag{10}$$

Die letzte Gleichung gibt:

$$\partial\tau = \frac{2\,\partial s}{\sqrt{4s - 1}}$$

und nach Integration:

$$\tau + c = \sqrt{4s - 1} \quad \text{oder}$$

$$s = \frac{(\tau + c)^2 + 1}{4} \tag{11}$$

woraus nach Gl. (10):

$$\varrho = \tfrac{1}{2}(\tau + c) \tag{12}$$

und nach Einsetzung in die Gl. (9):

$$2x = \cos\tau + (\tau + c)\sin\tau \tag{13}$$
$$2y = \sin\tau - (\tau + c)\cos\tau \tag{14}$$

und in Polarcoordinaten r, φ:

$$r = \tfrac{1}{2}\sqrt{(\tau + c)^2 + 1}; \quad \varphi = \tau + c - \mathrm{arc\,tg}\,(\tau + c) \tag{15}$$

Curve III.

$$s = \frac{\partial y}{\partial x} = \mathrm{tg}\,\tau \tag{16}$$

Die Differentiation gibt:

$$\partial s = \frac{\partial\tau}{\cos^2\tau}$$

woraus:

$$\partial x = \frac{\partial\tau}{\cos\tau}; \qquad \partial y = \frac{\sin\tau\,\partial\tau}{\cos^2\tau} = \partial\,\frac{1}{\cos\tau}$$

oder, wenn man

Digitized by Google

$$\tau = 2\omega - \mathrm{R}$$

setzt:

$$dx = \frac{2\,\partial\omega}{\sin 2\omega}; \quad \partial y = \partial\,\frac{\mathrm{I}}{\sin 2\omega}$$

integrirt:

$$x = a + \log \operatorname{tg} \omega; \quad y = b + \tfrac{1}{2}(\operatorname{tg}\omega + \cot\omega) \tag{17}$$

und nach Elimination von ω:

$$y = b + \tfrac{1}{2}(e^{x-a} + e^{-x+a}) = b + \cos i(x-a) \tag{18}$$

$$s = \tfrac{1}{2}(\operatorname{tg}\omega - \cot\omega) = \tfrac{1}{2}(e^{x-a} - e^{-x+a}) = \frac{\sin i(x-a)}{i} \tag{19}$$

$$(y-b)^2 - s^2 = 1 \tag{20}$$

$$\varrho = \tfrac{1}{4}(e^{x-a} + e^{-x-a})^2 = \cos^2 i(x-a) \tag{21}$$

$$\varrho - s^2 = 1; \quad \varrho - (y-b)^2 = 0 \tag{22}$$

Curve IV.

$$s = x\,\frac{\partial y}{\partial x} = x \operatorname{tg}\tau \tag{23(}$$

Nach zweimaliger Differentiation erhält man:

$$1 = \sin\tau + \frac{z}{\varrho\cos^2\tau} \tag{24}$$

$$0 = \cos\tau + \frac{1}{\cos\tau} + x\,\frac{\partial}{\partial\tau}\,\frac{2}{\varrho\cos^2\tau}$$

woraus nach Elimination von x:

$$-\partial \log \frac{1}{\varrho\cos^2\tau} = \frac{\cos\tau + \dfrac{1}{\cos\tau}}{1-\sin\tau}\,\partial\tau$$

$$= \left(\frac{1}{\cos\tau} + \frac{1}{\cos^3\tau}\right)(1+\sin\tau)\,\partial\tau$$

integrirt:

$$\log(\varrho\cos^2\tau) = \tfrac{3}{2}\log\frac{1+\sin\tau}{\cos\tau} - \log\tau + \tfrac{1}{2}\,\frac{1}{1-\sin\tau} + \text{const}$$

Sei

$$\operatorname{tg}\frac{\tau}{2} = \frac{t^2-1}{t^2+1}$$

woraus:

$$\cos\tau = \frac{2t^2}{t^4+1}; \quad \sin\tau = \frac{t^4-1}{t^4+1}$$

$$1+\sin t = \frac{2t^4}{t^4+1}; \quad 1-\sin\tau = \frac{2}{t^4+4}$$

Digitized by Google

$$\frac{1+\sin\tau}{\cos\tau} = t^2; \quad \frac{1-\sin\tau}{\cos\tau} = t^{-2}$$

dann wird

$$\varrho = c\left(\frac{t^4+1}{t}\right)^2 e^{\frac{1}{4}t^4} \tag{25}$$

Gl. (24) gibt hiernach:

$$x = ct - t^{\frac{1}{4}t^4} \tag{26}$$

woraus nach Gl. (23):

$$z = c\,\frac{t^4-1}{2t}\,e^{\frac{1}{4}t^4} \tag{27}$$

Ferner ist

$$\partial y = \varrho \sin\tau\,\partial\tau = 4c\,\frac{t^8-1}{t^3}\,e^{\frac{1}{4}t^4}\,\partial t$$

wo e die Grundzahl der natürlichen Logarithmen bezeichnet. Setzt man zur Abkürzung

$$\int_0 t^m e^{\frac{1}{4}t^4}\,\partial t = f(t,\ n)$$

so ergibt sich durch teilweise Integration:

$$y = 4c\left\{\frac{t^4+1}{t}\,e^{\frac{1}{4}t^4} - 4f(t,\ 2)\right\} + \text{const}$$

R. Hoppe.

2.

Abwickelbare Schraubenfläche.

Eine Schraubenfläche wird von einer (geraden oder krummen) Linie erzeugt, welche um eine feste Axe rotirt und gleichzeitig sich in axialer Richtung proportional dem Rotationswinkel verschiebt. Jede solche Fläche hat die Eigenschaft, dass sie spiralisch in sich selbst verschiebbar ist. Vermöge dieser Eigenschaft ist sie brauchbar als Oberfläche einer Schraube.

Im allgemeinen ist eine Schraubenfläche windschief. Soll sie abwickelbar sein, so muss die Erzeugende gerade sein und eine feste Schraubenlinie als Gratlinie der Fläche beständig berühren.

Die Gleichungen dieser Gratlinie s_0 erzeugt vom Berührungspunkt $(x_0\,y_0\,z_0)$ seien

$$x_0 = k\cos\vartheta\cos u; \quad y_0 = k\cos\vartheta\sin u; \quad z_0 = k\sin\vartheta \ldots u \tag{1}$$

dann sind die Richtungscosinus der Tangente

Digitized by Google

$$\frac{\partial x_0}{\partial s_0} = -\cos\vartheta\sin u;\quad \frac{\partial y_0}{\partial s_0} = \cos\vartheta\cos u;\quad \frac{\partial z_0}{\partial s_0} = \sin\vartheta \tag{2}$$

der Bogen

$$s_0 = ku \tag{3}$$

die Gleichungen der abwickelbaren Schraubenfläche

$$\left.\begin{aligned} x &= \cos\vartheta(k\cos u - v\sin u)\\ y &= \cos\vartheta(k\sin u + v\cos u)\end{aligned}\right\}\quad z = \sin\vartheta(ku+v) \tag{4}$$

die Richtungscosinus der Flächennormale

$$p = -\sin\vartheta\sin u;\quad q = \sin\vartheta\cos u;\quad s = \cos\vartheta \tag{5}$$

die Fundamentalgrössen der Fläche

$$e = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \ldots = k^2 + v^2\cos^2\vartheta$$

$$f = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} + \ldots = k$$

$$g = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \ldots = 1$$

$$E = p\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + \ldots = v\sin\vartheta\cos\vartheta$$

$$F = p\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} + \ldots = 0;\quad G = p\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} + \ldots = 0$$

$$t = \sqrt{eg - f^2} = v\cos\vartheta \tag{6}$$

Krümmung der Fläche

$$\frac{1}{\varrho_1\varrho_2} = \frac{EG - F^2}{t^2} = 0$$

Summe der Hauptkrümmungen

$$\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} = \frac{1}{\varrho_1} = \frac{\operatorname{tg}\vartheta}{v} \tag{7}$$

Das Flächenelement ist

$$\partial S = t\,\partial u\,\partial v = v\cos\vartheta\,\partial u\,\partial v$$

also das Areal bei unabhängiger Variation von u und v

$$S = \tfrac{1}{2}uv^2\cos\vartheta \tag{8}$$

Dies wird begrenzt von 2 Erzeugenden $u = 0$ und $u = u$ und 2 Cylindern von gemeinsamer Axe mit der Schraubenfläche gehend durch die Punkte $v = 0$ und $v = v$. Die Radien dieser Cylinder C_0 und C sind

Digitized by Google

$$R_0 = k\cos\vartheta; \quad R = \sqrt{k^2\cos^2\vartheta + v^2} \tag{9}$$

Die Anwendung der Complanationsformel (8) beschränkt sich jedoch nicht auf diese Begrenzung. Zieht man nämlich von beiden Enden von s_0 beliebige congruente Linien L_0, L längs der Schraubenfläche, die bei deren Erzeugung zur Deckung gelangen, und verschiebt das Flächenstück zwischen L, C und der Erzeugenden $u = u$ rückwärts bis es in das Flächenstück zwischen L_0, C und der Erzeugenden $u = 0$ fällt, so setzt sich aus den 2 Teilen von S ein Areal $= S$ zusammen, begrenzt von C_0, C, L_0 und L.

Insbesondere kann man jetzt 2 durch die Axe gehende Ebenen E, E_u nebst C_0 und C_1 als Grenzen von S betrachten. Der Winkel zwischen beiden Ebenen ist dann der Wert von u.

Endlich erhält man für jede der genannten Grenzen das Flächenstück zwischen 2 beliebigen coaxialen Cylindern C, und C durch Subtraction, nämlich

$$S - S_1 = \tfrac{1}{2}u(v^2 - v_1^2)\cos\vartheta$$

Die Aufgabe der Abwickelung der Schraubenfläche wird durch folgende Betrachtung eine sehr leichte. Die Tangenten an die Curve s_0 müssen bei Abwickelung Tangenten an die ebene Curve s_0' bleiben, in welche s_0 übergeht. Als Element von S sehen wir nun das Flächenstück zwischen zwei consecutiven Tangenten und dem Bogenelement ∂s_0 an. Durch successive Verschiebung um die gleiche Länge ∂s_0 lässt sich eine Reihe congruenter Flächenelemente ∂S herstellen, die an einander grenzen und zusammen S bilden. Da nun die Gestalt des abgewickelten Elements $\partial S'$ durch ∂S bestimmt ist, so müssen auch die entsprechenden $\partial s_0'$ einander congruent, mithin gleichgekrümmt sein, folglich ist $\partial s'$ ein Kreis, und S' wird erzeugt von Tangenten eines Kreises.

Der Radius ϱ_0 dieses Kreises ergibt sich durch 2 Relationen. Erstens ist

$$\partial s_0' = \partial s_0 = \varrho_0 \partial\varphi = k\,\partial u \tag{10}$$

wo $\partial\varphi$ den Centriwinkel des Bogens $\partial s_0'$ bezeichnet. Zweitens ist der Centriwinkel gleich dem Winkel zwischen den Tangenten in beiden Enden des Bogens und dieser muss bei Abwickelung unverändert bleiben. Sind also a, b, c die Richtungscosinus der Tangente an s_0, so ist nach den Gl. (2)

Digitized by Google

$$\partial\varphi^2 = \partial a^2 + \partial b^2 + \partial c^2 - \cos^2\vartheta\,\partial u^2$$

und nach Vergleichung mit Gl. (10)

$$\varrho_0 = \frac{k}{\cos\vartheta} \tag{11}$$

Ferner ist nach Gl. (10) (11) der Centriwinkel zum Bogen s_0'

$$\varphi = \frac{ku}{\varrho_0} = u\cos\vartheta \tag{12}$$

folglich fällt nach Abwickelung der Punkt (xyz) auf den Punkt $(x'y')$, wo

$$x' = \varrho_0\cos\varphi - v\sin\varphi = \frac{k\cos(u\cos\vartheta)}{\cos\vartheta} - v\sin(u\cos\vartheta) \tag{13}$$

$$y' = \varrho_0\sin\varphi + v\cos\varphi = \frac{k\sin(u\cos\vartheta)}{\cos\vartheta} + v\cos(u\cos\vartheta)$$

Die Grenzen von S' sind die 2 concentrischen Kreise mit den Radien ϱ_0 und ϱ, wo ϱ_0 den Wert (11) hat, und

$$\varrho = \sqrt{\left(\frac{k}{\cos\vartheta}\right)^2 + v^2} \tag{14}$$

ist, und die 2 Tangenten an den innern Kreis in den Endpunkten von s_0'.

Begrenzt man S durch die Meridianebenen E und E_u, so werden die Meridian-Curven D, D_u. Sei E die xz Ebene, so folgt aus $y = 0$ (s. Gl. (4)):

$$v = -k\,\mathrm{tg}\,u \tag{15}$$

Dies in die Gl (13) substituirt gibt als Gleichungen der ersten Grenzcurve von S':

$$\left.\begin{aligned} x' &= k\,\frac{\cos u\cos(u\cos\vartheta) + \cos\vartheta\sin u\sin(u\cos\vartheta)}{\cos\vartheta\cos u} \\ y' &= k\,\frac{\cos u\sin(u\cos\vartheta) - \cos\vartheta\sin u\cos(u\cos\vartheta)}{\cos\vartheta\cos u} \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

die zweite erhält man aus ihr durch Rotation um den Anfangspunkt der $x'y'$.

Variirt v ins unendliche, so variirt u in der Grenzcurve von 0 bis $-R$. Begrenzt man S durch die Cylinder C_0 und C, d. i. v durch den Wert 0 und einen endlichen Wert, so variirt u von 0 nur bis

Digitized by Google

$$- \operatorname{arc\,tg} \frac{v}{k}$$

Die erzeugenden Tangenten fallen dann zum Teil ausser S' und durch D oder D_u oder durch beide Grenzcurven begrenzt, so dass sie den innern oder äussern Kreis nicht erreichen.

R. Hoppe.

Digitized by Google

XII.

Ueber die Isotimen und Isophasen der Function $f(x) = (x+1)(x-1)(x-2)$

Von

Ulrich Bigler.

Der Schwerpunkt der Wurzeln ($x = -1, 1, 2$) liegt in $x = \frac{2}{3}$. Man wähle denselben als Nullpunkt und setze

$$x = \frac{t+2}{3}$$

Dann ist

$$27f\cdot\left(\frac{t+2}{3}\right) = (t+5)\cdot(t-1)\cdot(t-4) = t^3-21t+20 = F(t).$$

Knoten einer Function sollen diejenigen Punkte des Argumentfeldes genannt werden, welche die Ableitung derselben zu null machen. Ihnen entsprechen auf dem Functionsfelde die Verzweigungspunkte. Pole sind Punkte auf dem t-Felde, für welche die Function $F(t)$ verschwindet. In unserem Falle liegen dieselben in ($t = -5, 1, 2$). Isotimen sind Linien auf dem Argumentfelde, längs welchen die Function $F(t)$ denselben absoluten Wert beibehält; Isophasen sind Linien, längs welchen die Function ihre Phase nicht ändert. Die Kanten der Function $F(t)$ liegen in $\sqrt{7}$ und $-\sqrt{7}$. In $t = \sqrt{7}$ ist

$$F(t) = -2(7\sqrt{7}-10) = -17{,}04$$

Für die Isotime, die zum absoluten Werte

$$2(7\sqrt{7}-10) = 17{,}04$$

gehört, ist es passend

Digitized by Google

$$t = u + \sqrt{7}$$

zu setzen, damit ihr Knoten zum Ursprunge werde. Es ist

$$F(u+\sqrt{7}) = u^3 + 3\sqrt{7}\,u^2 - 2(7\sqrt{7} - 10)$$

Wenn nun

$$u = re^{i\theta}, \quad u_1 = re^{-i\theta}$$

so ist die Gleichung der Isophase, die dem absosuten Werte $2(7\sqrt{7} - 10)$ entspricht, durch die Formel

I. $$(u^3+3\sqrt{7}\,u^2-2(7\sqrt{7}-10))(u_1^3+3\sqrt{7}u_1^2-2(7\sqrt{7}-10)) - 4(7\sqrt{7}-10)^2 = 0$$

dargestellt. Entwickelt man dieselbe und dividirt durch r^2, so erhält man die Gleichung der Grenzscheide in Polarcoordinaten in der Form

I_1. $$r^4+6\sqrt{7}\cos\theta \cdot r^3 + 63 \cdot r^2 - 4(7\sqrt{7} - 10\cos 3\theta \cdot r - 12\sqrt{7} \cdot (7\sqrt{7} - 10)\cos 2\theta = 0$$

Jede Gerade, welche durch den Knoten $\sqrt{7}$ gezogen wird, schneidet demnach die Curve in noch 4 weiteren Punkten. Denkt man sich in obiger Gleichung r sehr klein, so folgt

$$\cos 2\theta = 0$$

also

$$\theta = \frac{\pi}{4}, \quad -\frac{\pi}{4}$$

Die beiden Zweige, die durch den Knoten gehen, stehen also hier senkrecht auf einander und schneiden die Realitätslinie unter Winkeln von 45°. Weil sich ferner die Gleichung nicht ändert, wenn θ durch $-\theta$ ersetzt wird, so wird die Curve durch die Realitätslinie in zwei symmetrische Hälften geteilt. Wo schneidet diese Curve die Realitätslinie ausserhalb des Knotens? Um diese Punkte zu finden, benutze man die Gleichung 1. Weil hier $u = u_1$ ist, so entsteht die Gleichung

$$F(u+\sqrt{7})^2 - (2(7\sqrt{7} - 10))^2 = 0$$

welche sofort die andere

$$(F(u+\sqrt{2})+2(7\sqrt{7}-10) \cdot (F(u+\sqrt{7}) - 2(7\sqrt{7} - 10)) = 0$$

liefert. Der erste Factor, gleich null gesetzt, liefert die Gleichung

$$u^2 \cdot (u+3\sqrt{7}) = 0$$

Digitized by Google

Der Factor u^2 zeigt den Knoten an, und der andere gibt

$$u = -7{,}937; \quad \text{also} \quad t = -5{,}292$$

Dieser Punkt liegt westlich vom Pole -5. Der 2. Factor der Gleichung ist in t ausgedrückt leichter als in u zu behandeln. Derselbe liefert die Gleichung

$$t^3 - 21t + 2 \cdot (20 - 7\sqrt{7} = 0$$

Ist nun

$$t_1 = p + q$$

eine Wurzel dieser Gleichung, so hat man zur Bestimmung von p und q die Bedingungsgleichungen

$$\frac{p^3 + q^3}{2} = -(20 - 7\sqrt{7})$$

$$p \cdot q = 7$$

aus denen sich sofort die andere

$$\left(\frac{p^3 - q^3}{2}\right)^2 = (20 - 7\sqrt{7})^2 - 7^3$$

ableiten lässt. Für die dritten Potenzen von p und q erhält man die Werte

$$p^3 = -(20 - \sqrt{7} + \sqrt{(20 - 7\sqrt{7})^2 - 7^3}$$

$$q^3 = -(20 - 7\sqrt{7}) - \sqrt{(20 - 7\sqrt{7})^2 - 7^3}$$

Setzt man nun

$$\cos\varepsilon = \frac{20 - 7\sqrt{7}}{7\sqrt{7}}$$

so lassen sich die obigen Gleichungen durch die Folgenden ersetzen:

$$\frac{p^3 + q^3}{2} = -7\sqrt{7}\cos\varepsilon$$

$$\frac{p^3 - q^3}{2} = i\,7\sqrt{7}\sin\varepsilon$$

$$p^3 = -7\sqrt{7}\,e^{-i\varepsilon}; \quad q^3 = -7\sqrt{7}e^{i\varepsilon}$$

Für die drei Kubikwurzeln (t_I, t_{II}, t_{III} erhält man schliesslich die Werte

$$t_I = -2\sqrt{7}\cos\frac{\varepsilon}{3}, \quad t_{II} = -2\sqrt{7}\cos\left(\frac{\varepsilon}{3} + 120^0\right)$$

$$t_{III} = -2\sqrt{7}\cos\left(\frac{\varepsilon}{3} - 120^0\right)$$

Sämtliche Wurzeln sind somit in der Gleichung

$$t = -2\sqrt{7}\cos\frac{\varepsilon}{3}$$

enthalten. Der Winkel $\frac{\varepsilon}{3}$ ist durch die Gleichung

$$\cos\varepsilon = \frac{20 - 7\sqrt{7}}{7\sqrt{7}}$$

bestimmt; man findet

$$\frac{\varepsilon}{3} = 28^0\,28'\,3$$

somit

$$t_{,} = -4{,}6515;\quad t_{,,} = 4{,}5103;\quad t_{,,,} = 0{,}1411$$

Die Isotime, die zum absoluten Werte $2\,.\,(7\sqrt{7} - 10)$ gehört, schneidet daher die Realitätslinie in den Punkten

$$4{,}5103;\quad \sqrt{7};\quad 0{,}1411;\quad -4{,}6515;\quad -5{,}2915.$$

Die Curve besteht daher aus zwei getrennten Stücken, die ausserhalb einander liegen. Ein kleines kreisähnliches Stück umgiebt den Pol

$$t = -5$$

und schneidet die Realitätslinie in

$$t = -5{,}2915;\quad -4{,}6515$$

Das andere Stück besteht aus zwei Schleifen, die durch den Knoten $\sqrt{7}$ mit einander verbunden sind. Die östliche umschliesst den Pol 4 und schneidet die Axe in

$$t = 4{,}5103$$

Die westliche umschliesst den Pol 1 und schneidet die Axe in

$$t = 0{,}1411$$

Die Isotime, die zum absoluten Werte $2(7\sqrt{7} + 10)$ gehört und ihren Knoten in

$$t = -\sqrt{7}$$

hat, besitzt die Gleichung

$$F(t)\,.\,F(t_{,}) = 4(7\sqrt{7} + 10)^2 = 0$$

wenn t und t' conjugirte Werte bedeuten. Wählt man hier den Knoten $-\sqrt{7}$ zum Ursprunge mittelst der Substitution

Digitized by Google

$$t = -\sqrt{7} + u$$

so lässt sich die Gleichung dieser Isotime in der Form

2) $(u^3 - 3\sqrt{7} \cdot u^2 + 2(7\sqrt{7}+10))(u_1^3 - 3\sqrt{7}u_1^2 + 2 \cdot (7\sqrt{7}+10))$
$$-4(7\sqrt{7}+10)^2 = 0$$

darstellen. Setzt man

$$u = re^{i\theta}, \quad u_1 = re^{-i\theta}$$

so hat man auch

$2_1)$ $r^4 - 6\sqrt{7}\cos\theta \cdot r^3 + 63 \cdot r^2 + 4(7\sqrt{7}+10)\cos 3\theta \cdot r$
$$-12\sqrt{7}\,(7\sqrt{7}+10)\cos 2\theta = 0$$

als Gleichung der zweiten Grenzscheide in Polarcoordinaten. Da sich auch diese Gleichung nicht ändert, wenn man den Winkel θ durch $-\theta$ ersetzt, so wird die Curve durch die x-Axe in zwei symmetrische Hälften geteilt. Denkt man sich den Leitstrahl r sehr klein; so ist

$$\theta = -\frac{\pi}{4}, \quad \frac{\pi}{4}$$

und die beiden Curvenzweige stehen somit im Knoten senkrecht aufeinander und schneiden hier die Realitätslinie unter Winkeln von 45^0. Um die übrigen Schnittpunkte mit der Realitätslinie zu erhalten, benutze ich die Gleichung 2. Setzt man hier $u = u_1$, so hat man

$$(u^3 - 3\sqrt{7} \cdot u^2 + 2(7\sqrt{7}+10))^2 - 4(7\sqrt{7}+10)^2 = 0$$

und diese Gleichung liefert sofort die andere

$$u^2(u - 3\sqrt{7})(u^3 - 3\sqrt{7}u^2 + 4(7\sqrt{7}+10)) = 0$$

welche nun in die beiden Bedingungsgleichungen

$$u^2(u - 3\sqrt{7}) = 0, \quad u^3 - 3\sqrt{7}\,u^2 + 4(7\sqrt{7}+10)$$

zerfällt. Der Factor u^2 der ersten Gleichung zeigt den Knoten an, und der andere liefert

$$u = 3\sqrt{7} = 7{,}937, \quad \text{also} \quad t = 5{,}292$$

Die zweite Bedingungsgleichung ist in t ausgedrückt leichter als in u zu behandeln. In t ausgedrückt heisst dieselbe

$$t^3 - 3 \cdot 7 \cdot t + 2(7\sqrt{7}+20) = 0$$

Man setze nun

$$t = p + q$$

und erhält

Digitized by Google

$$\frac{p^3+q^3}{2} = -(7\sqrt{7}+20)$$

$$p \cdot q = 7$$

dann ist auch

$$\left(\frac{p^3-q^3}{2}\right)^2 := (7\sqrt{2}+20)^2 - 7^3 = 40(7\sqrt{7}+10)$$

Setzt man nun abkürzend

$$\cos\varepsilon = \frac{7\sqrt{7}+20}{7\sqrt{7}}$$

so ist

$$\frac{p^3+q^3}{2} = -7\sqrt{7}\cos\varepsilon$$

$$\frac{p^3-q^3}{2} = 7\sqrt{7}\sin\varepsilon$$

folglich

$$p^3 = -7\sqrt{7}e^{-\iota}, \quad q^3 = -7\sqrt{7}e^{\iota}$$

somit

$$p+q = -2\sqrt{7}\cos\frac{\varepsilon}{3}$$

Die einzige reelle Wurzel, welche die zweite Bedingungsgleichung liefert, ist annähernd

$$t_1 = -5,7$$

während sich die imaginären Wurzeln durch die Formeln

$$t_{''} = \sqrt{7}\cdot\left(\cos\frac{\varepsilon}{3} - i\sqrt{3}\sin\frac{\varepsilon}{3}\right)$$

$$t_{'''} = \sqrt{7}\cdot\left(\cos\frac{\varepsilon}{3} + i\sqrt{3}\sin\frac{\varepsilon}{3}\right)$$

darstellen lassen. Die Isotime mit dem absoluten Worte $2(7\sqrt{7}+10)$ schneidet daher die Realitätslinie in den Punkten

$$-5,7; \quad -\sqrt{7}; \quad 5,2915$$

Die Curve besteht somit aus zwei Schleifen, die durch den Knoten $-\sqrt{7}$ verbunden sind. Die östliche Schleife umschliesst die Pole 1 und 4 und die aus zwei Schleifen bestehende Curve der vorigen Grenzscheide und schneidet die Realitätslinie in dem Punkte 5, 2915. Die westliche Schleife umgibt den Pol -5 und das kreisähnliche Stück der vorigen Grenzscheide und schneidet die Realitätslinie in dem Punkte $-5,7$. Ich will noch zeigen, dass beide Isotimen die

Digitized by Google

Realitätslinien mit Ausnahme der Knoten senkrecht durchdringen. Die Gleichung der ersten Grenzscheide ist

$$F(t) \cdot F(t_1) - 4(7\sqrt{7} - 10)^2 = 0$$

und somit

$$(t^2 - 7) \cdot F(t_1)\,dt + (t_1^2 - 7) \cdot F(t)\,dt_1 = 0$$

die Differentialgleichung, welche die Richtung der Tangente bestimmt. Diese Gleichung vereinfacht sich in einem Schnittpunkte der Realitätslinie zu

$$(t^2 - 7) \cdot F(t) \cdot d(t + t') = 0$$

und versagt nur, wenn

$$(t^2 - 7) = 0$$

also in dem Knoten

$$t = \sqrt{7}$$

denn durch den andern Knoten und durch die Pole (−5, 1, 4) geht die Curve nicht. In den gesuchten Schnittpunkten muss daher sein

$$d(t + t_1) = 0$$

das heisst, die Tangente steht hier senkrecht auf der Realitätslinie. Für die zweite Grenzscheide zeigt sich dasselbe. Um eine ungefähr richtige Zeichnung dieser beiden Grenzscheiden zu erhalten, sollte man noch die Ordinaten derselben in den Polen (−5, 1, 4) kennen. Zu diesem Zwecke entwickle ich aber die Gleichung 6. Grades in rechtwinkligen Coordinaten nicht, sondern setze

$$t = x + iy, \quad F(t) = X + iY$$

Dann ist

$$F(t_1) = X - iY$$

und die Gleichung der Isotime, die zum absoluten Werte $2(7\sqrt{7} - 10)$ gehört, ist daher

$$X^2 + Y^2 - 4(7\sqrt{7} - 10)^2 = 0$$

X und Y sind ganze Functionen dritten Grades von x und y mit reellen Coefficienten. Setzt man nun

$$t = -5 + iy$$

und benutzt zur Berechnung von $F(-5 + iy)$ die allgemeine Formel

$$F(x + iy) = F(x) + iyF'(x) - \frac{y^2}{2} \cdot F''(x) - \frac{iy^3}{6} \cdot F'''(x) + \text{etc.}$$

wo

Digitized by Google

$$F(x) = x^3 - 21x + 20 \equiv (x+5)(x-1)(x-4)$$
$$F'(x) = 3(x^2 - 7)$$
$$F''(x) = 6x$$
$$F'''(x) = 6$$

so hat man

$$F(-5+iy) = 15y^2 + i(54y - y^3)$$

Wenn man nun allgemein

$$F(-5+iy) = X + iY$$

setzt, so erhält man die beiden Relationen

$$X = 15y^2; \qquad Y = y(54 - y^2)$$

und zur Bestimmung der Ordinate y erhält man schliesslich die Gleichung

$$y^6 + 117y^4 + 51^2y^2 - 4(7\sqrt{7} - 10)^2 = 0$$

Setzt man nun $y^2 = u$, wo unter y die pos. Quadratwurzel aus u verstanden wird, so erhält man zur Bestimmung von u die Gleichung dritten Grades

$$F(u) = u^3 + 117 \cdot u^2 + 54^2 \cdot u - 4(7\sqrt{7} - 10)^2 = 0$$

Um einen Einblick in die Beschaffenheit der drei Wurzeln dieser Gleichung zu erhalten, untersuchen wir die erste Abgeleitete derselben. Es ist

$$\frac{\partial F(u)}{\partial u} = 3 \cdot (u^2 + 78u + 972)$$

und die Wurzeln dieser Gleichung

$$\frac{\partial F(u)}{\partial u} = 0$$

können annähernd durch $-60,1$ und $-17,9$ dargestellt werden. Es kann daher $\frac{\partial F}{\partial u}$ nur dann negativ ausfallen, wenn u zwischen $-60,1$ und $-17,9$ liegt. Für jeden andern reellen Wert von u erhält $\frac{\partial F(u)}{\partial u}$ einen pos. Wert. Nun hat $F(u)$ für

$$u = -N$$

wo N eine sehr grosse, pos. Zahl darstellt, einen neg. Wert, der in tiefster Näherung durch $-N^3$ dargestellt werden kann. Lässt man nun die Variable u von $-N$ an fortwährend wachsen, so nimmt auch

Digitized by Google

die Function stetig zu, und diese Zunahme dauert fort, bis u bei $-60, 1$ angelangt ist, wo die Function ihr Maximum erreicht hat. Nimmt u weiter zu, so fängt die Function an abzunehmen, und diese Abnahme dauert so lange fort, bis u den Wert $-17, 9$ erreicht hat, wo für $F(u)$ ein Minimum eintritt. Lässt man u weiter wachsen, so nimmt $\frac{\partial F}{\partial u}$ zuweilen einen pos. Wert an, und die Function selber ist wieder im Wachsen begriffen, und dieses Wachsen dauert unaufhörlich fort, während u von $-17, 9$ bis zum pos. Unendlichen stetig fortschreitet. Da nun $F(u)$ für

$$u = -N$$

einen neg. Wert hat, für

$$u = -60, 1$$

schon pos. geworden ist, so liegt eine neg. Wurzel der Gl.

$$F(u) = 0$$

zwischen $-N$ und $-60, 1$. Für

$$u = -17, 9$$

ist aber $F(u)$ wieder neg. geworden, und da die $F(u)$ von $-60, 1$ bis $-17, 9$ stetig abnimmt, so muss die zweite neg. Wurzel der Function $F(u)$ zwischen $-60, 1$ und $-17, 9$ liegen. Für $u = 0$ ist $F(u)$ immer noch neg., während die Function für $u = 1$ einen pos. Wert erlangt hat. Die pos Wurzel der Gleichung

$$F(u) = 0$$

liegt daher zwischen 0 und 1. Nur diese ist für unsern Zweck zu benutzen, da bekanntlich die Ordinate y gleich der pos. Quadratwurzel aus derselben ist. Um einen angenäherten Wert derselben zu erhalten, wird es daher erlaubt sein, in der Gleichung

$$F(u) = 0$$

nur den tiefsten Term in u zu berücksichtigen und also

$$u = \frac{4(7\sqrt{7} - 10)^2}{54^2}$$

zu setzen. Aus dieser Gleichung folgt nun

$$y = \frac{2(7\sqrt{7} - 10)}{54}$$

was nicht weit von 0, 3 liegt. Zur angenäherten Bestimmung der Ordinate im Punkte 1 setze man

Digitized by Google

$$t = 1 + iy$$

Dann ist

$$F(1+iy) = -3y^2 - i(18y + y^3)$$

und daher

$$X = -3y^2; \quad Y = -(18y + y^3)$$

Die Gleichung zur Bestimmung von y heisst somit, wenn auch hier $y^2 = u$ gesetzt wird,

$$G(u) = u^3 + 45 \,.\, u^2 + 18^2 \,.\, u - 4(7\sqrt{7} - 10)^2 = 0$$

Weil

$$\frac{\partial G(u)}{\partial u} = 3 \,.\, (u^2 + 30 \,.\, u + 108)$$

ist, und die Wurzeln der Gleichung

$$\frac{\partial G(u)}{\partial u} = 0$$

annähernd durch (−5) und (−25) ausgedrückt werden können, so erkennt man, dass die Function $G(u)$ in dem Intervalle $-N < u < -25$ mit wachsendem u im Wachsen begriffen ist und in der Nähe von −25 ihr Maximum erreicht hat. Da nun aber $G(u)$ für

$$u = -N$$

einen neg. sehr grossen Wert hat und von hier an mit wachsendem u bis in die Gegend von

$$u = -25$$

stetig zunimmt, für

$$u = -25$$

aber einen pos. Wert erreicht hat, so muss zwischen $-N$ und -25 eine neg. Wurzel der Function $G(u)$ liegen. In dem Intervalle $-25 < u < -5$ ist $\frac{\partial G(u)}{\partial u}$ beständig neg. und somit ist $G(u)$ in diesem Intervalle mit wachsendem u im Abnehmen begriffen und hat in der Nähe von

$$u = -5$$

ihr Minimum erreicht. Da dieses Minimum aber neg. ist, so muss auch zwischen

$$u = -25 \quad \text{und} \quad u = -5$$

die zweite neg. Wurzel der Gleichung

$$G(u) = 0$$

liegen. Von

$$u = -5$$

Digitized by Google

an bis zum pos. Unendlichen ist $\frac{\delta G(u)}{\partial u}$ beständig pos., und somit ist auch die Function $G(u)$ in diesem Intervalle mit wachsendem u im Wachsen begriffen, nimmt daher von dem neg. Minimum in der Nähe von $-5 = u$ bis zum pos. Unendlichen stetig zu, wobei natürlich wieder die Realitätenlinie durchschnitten werden muss. Für $u=0$ hat $G(u)$ noch einen neg. Wert, aber für $u = 1$ ist $G(u)$ schon pos. geworden. Die pos. Wurzel liegt daher zwischen 0 und 1. Für die näherungsweise Bestimmung derselben wird es daher erlaubt sein, in der Gleichung

$$G(u) = 0$$

die Terme zweiter und dritter Ordnung fallen zu lassen und

$$u = \frac{4(7\sqrt{7} - 10)^2}{18^2}$$

also

$$y = \frac{2(7\sqrt{7} - 10)}{18} = \frac{15,4}{18} = 0,9$$

anzunehmen. Die Ordinate im Pole 1 liegt daher nicht weit von 0, 9.

Zur Bestimmung der Ordinate im Pole 4 setze man

$$t = 4 + iy$$

Dann ist

$$F(4+iy) = -12y^2 + i(27y - y^3)$$

also

$$X = -12y^2; \quad Y = (27y - y^3)$$

und für y erhält man hier die Gleichung

$$y^6 + 90y^4 + 27^2 y^2 - 4(7\sqrt{7} - 10)^2 = 0$$

Setzt man wieder

$$y^2 = u$$

so gilt für u die Gleichung

$$H(u) = u^3 + 90 \cdot u^2 + 27^2 \cdot u - 4(7\sqrt{7} - 10)^2 = 0$$

Die Wurzeln der Gleichung

$$\frac{\partial H(u)}{\partial u} = 3 \cdot (u^2 + 60 \cdot u + 243)$$

können annähernd durch -5 und -55 dargestellt werden. Somit wird $\frac{\partial H(u)}{\partial u}$ für jeden Wert von u, der kleiner als -55 ist, pos. ausfallen, und die Function $H(u)$ somit von

Digitized by Google

$$u = -N$$

an bis in die Gegend von

$$u = -55$$

mit wachsendem u stetig wachsen, wo dieselbe ein pos Maximum erreicht hat. Da aber für

$$u = -N$$

die Function $H(u)$ neg. sehr gross wird, so muss eine neg. Wurzel der Gleichung

$$H(u) = 0$$

westlich von -55 liegen. Für das Intervall $-55 < u < -5$ hat $\frac{\partial H(u)}{\partial v}$ beständig einen neg. Wert, und daher nimmt mit wachsendem u die Function $H(u)$ von dem pos. Maximum bis zum neg. Minimum in der Nähe von -5 stetig ab. Daher liegt die andere neg. Wurzel zwischen -55 und -5 Durch ähnliche Betrachtungen wie früher erkennt man auch hier, dass die pos. Wurzel der Gleichung

$$H(u) = 0$$

zwischen 0 und 1 liegt. Zur angenäherten Bestimmung ist es daher erlaubt

$$u = \frac{4(7\sqrt{7}-10)^2}{27^2}$$

also

$$y = \frac{2(7\sqrt{7}-10)}{27}$$

zu setzen. Die Ordinate im Pole 4 liegt daher nicht weit von 0,6. Nun sind noch die Ordinaten der Pole $(-5, 1, 4)$, für die zweite Grenzscheide, die zum absoluten Werte $2(7\sqrt{7}+10)$ gehört, angenähert zu bestimmen. Setzt man wieder

$$F(t) = X + iY$$

so gilt hier die Gleichung

$$X^2 + Y^2 - 4(7\sqrt{7}+10)^2 = 0$$

Wenn nun

$$t = -5 + iy \quad \text{und} \quad y^2 = u$$

gesetzt wird, so erhält man zur Bestimmung von u die Gleichung

$$J(u) = u^3 + 117u^2 + 2916u - 3253,\ 2 = 0$$

Von den drei reellen Wurzeln dieser Gleichung sind zwei neg. und nur die dritte hat einen pos. Wert, der zwischen 1 und 2 liegt.

Digitized by Google

Um diese pos. Wurzel näher zu bestimmen, berechne man den Wert von $J(1+\varrho)$, wo ϱ einen pos. Wert bezeichnet, der kleiner als 1 ist. Zur Bestimmung von ϱ dient dann die Gleichung

$$\varrho^3 + 120\varrho^2 + 3153 \cdot \varrho - 219,\ 2 = 0$$

und da ϱ kleiner als 1 ist, so darf man

$$\varrho = \frac{219,\ 2}{3153} = 0,\ 06$$

annehmen. Die pos. Wurzel der Gleichung

$$J(u) = 0$$

liegt daher in der Nähe von 1, 06 und somit ist y angenähert 1, 02. Die Gleichung zur angenäherten Berechnung der Ordinate im Pole 1 ist

$$K(u) = u^3 + 45u^2 + 324u - 3253,\ 2 = 0$$

wenn auch y gleich der pos. Quadratwurzel aus der pos. Wurzel dieser Gleichung ist. Die drei Wurzeln der Gleichung

$$K(u) = 0$$

sind reell und zwar liegt die erste westlich von $-25,\ 83$, die zweite liegt im Intervalle $-25,\ 83$ und $-4,\ 17$ und die pos. Wurzel liegt zwischen 5 und 6. Für $u = 5$ nimmt $K(u)$ angenähert den neg. Wert $-383,\ 2$ an und für $u = 6$ den pos. Wert 526, 8. Um diese pos. Wurzel näher zu bestimmen, berechne man den Wert $K(5+\varrho)$, wo ϱ pos. und kleiner als 1 zu denken ist. Zur angenäherten Berechnung von ϱ dient dann die Gleichung

$$\varrho^3 + 60 \cdot \varrho^2 + 849 \cdot \varrho - 383,\ 2 = 0$$

Dieselbe liefert nun für ϱ in tiefster Näherung den Wert 0, 4; daher liegt die pos. Wurzel der Gleichung

$$K(u) = 0$$

in der Nähe von 5, 4. Für die Ordinate im Pole 4 erhält man daher angenähert den Wert 2, 3.

Zur Bestimmung der Ordinate im Pole 3 erhält man die Gleichung

$$L(u) = u^3 + 90 \cdot u^2 + 729 \cdot u - 3253,\ 2 = 0$$

Diese Gleichung hat zwei neg. und eine pos. Wurzel. Eine neg, Wurzel ist kleiner als $-55,\ 6$ und die andere liegt zwischen $-55,\ 6$ und $-4,\ 4$, während die pos. Wurzel zwischen 3 und 4 liegt. Man berechne daher auch hier den Wert von $L(3+\varrho)$, wo ϱ pos. und kleiner als 1 ist. Weil ϱ der Gleichung

Digitized by Google

$$\varrho^3 + 39\,\varrho^2 + 129{,}6\,.\,\varrho + 229,\,2 = 0$$

genügen muss, so liegt sein angenäherter Wert nicht weit von 0, 1. Die pos. Wurzel der Gleichung

$$L(u) = 0$$

ist daher nicht weit von 3, 1 und daher ist die Ordinate im Pole 4 in tiefster Näherung gleich 1,7.

Es folgt hier noch eine kleine Betrachtung der übrigen Isotimen. Die Isotimen, welche zu absoluten Werten gehören, die kleiner als 17, 04 sind, bestehen aus drei getrennten Curven, die innerhalb der Grenzscheide mit dem absoluten Werte 17, 04 liegen. Die erste Curve umgibt den Pol 4 und liegt ganz innerhalb der östlichen Schleife der östlichen Grenzscheide, die zweite umgibt den Pol 1 und liegt ganz innerhalb der westlichen Schleife der östlichen Grenzscheide; die dritte Curve umgibt den Pol -5 und liegt ganz innerhalb des westlichen, kreisähnlichen Stückes der ersten Grenzscheide. Dieselben dehnen sich von den Polen an, in deren Nähe sie kreisförmig sind, mit zunehmendem absoluten Werte immer mehr aus, nähern sich in ihrer Form mehr und mehr den sie umgebenden Schleifen und fallen schliesslich für den absoluten Wert 17, 04 mit der Grenzscheide zusammen. Die Isotimen, die zu absoluten Werten gehören, die grösser als 17, 04, aber kleiner als 57, 04 sind, bestehen nur noch aus zwei getrennten Stücken, von denen das eine ausserhalb des östlichen Teiles der Isotime 17, 04, aber innerhalb der östlichen Schleife der Grenzscheide liegt. Das andere Stück umgibt die westliche Curve der Grenzscheide 17, 04 und liegt ganz innerhalb der westlichen Schleife der Isotime 57, 04. Beide Curven dieser Isotimen schliessen sich zuerst in ihren Formen an die Grenzscheide 17, 04 an, entfernen sich aber mit wachsendem absoluten Werte immer mehr von derselben und gehen schliesslich für den absoluten Wert 57, 04 in die zweite Grenzscheide über, wo die beiden Zweige zum ersten Male eine zusammenhangende Curve bilden. Die Isotimen, welche zu absoluten Werten gehören, die grösser als 57, 04 sind, bestehen aus einem einzigen Stücke, welches ausserhalb der zweiten Grenzscheide liegt. Dieselben schliessen sich zuerst eng an die Form der zweiten Grenzscheide an, entfernen sich mit zunehmendem absoluten Werte immer mehr von derselben, um schliesslich gegen den Horizont hin in die Kreisform überzugehen.

Wir gehen nun zur Betrachtung der Isophasen über. Setzt man

$$F(t) = re^{it}$$

Digitized by Google

so darf sich längs einer Curve wol r, nicht aber ε ändern. Sind daher t und t_1 zwei conjugirte Werte, so gelten die Gleichungen

$$e^{it} F(t) = r; \quad e^{it} F(t_1) = r$$

und die Gleichung der Isophase nimmt daher folgende Gestalt an:

$$e^{-it} \cdot (t^3 - 21t + 20) - e^{it} \cdot (t_1^3 - 21t_1 + 20) = 0$$

Setzt man nun

$$t = \varrho e^{i\varphi}$$

so ist

$$\sin(3\varphi - \varepsilon) \cdot \varrho^3 - 21 \sin(\varphi - \varepsilon) \cdot \varrho - 20 \sin\varepsilon = 0$$

die Polargleichung der Isophase ε. Für

$$\varepsilon = 0 \quad \text{und} \quad \varepsilon = \pi$$

gibt es nur eine Isophase, nämlich

$$\varrho \cdot (\sin 3\varphi \cdot \varrho^2 - \sin\varphi \cdot 21) = 0$$

Weil

$$\sin 3\varphi = \sin\varphi(3\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)$$

so hat die Gleichung der Isophase ($\varepsilon = 0, \pi$) auch die Form

$$\varrho \sin\varphi(3 \cdot \varrho^2 \cos^2\varphi - \varrho^2 \sin^2\varphi - 21) = 0$$

Führt man hier mittelst der Relation

$$t = \varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi) = x + iy$$

die rechtwinkligen Coordinaten x und y in die Rechnung ein, so hat man

$$y \cdot (3x^2 - y^2 - 21) = 0$$

als Gleichung der Grenzscheide ($\varepsilon = 0, \pi$). Diese zerfällt nun in die beiden andern Gleichungen:

1) $y = 0$

2) $\frac{x^2}{7} - \frac{y^2}{21} = 0$

Die erste Gleichung stellt die x-Axe dar und die zweite eine Hyperbel mit den Halbaxenquadraten 7 und 21. Der östliche Zweig derselben geht durch den Knoten $\sqrt{7}$ und der westliche durch den andern Knoten $-\sqrt{7}$. Das Stück der Realitätslinie vom Pole 4 bis zum Ostpunkte derselben gehört der Isophase null an. Denkt man sich die Variable t von ihrem Stande östlich des Poles 4 in einem pos. Halbkreise auf die westliche Seite von 4 übergeführt, so bewegt sich auch die Function $F(t)$ von einem Punkte der Realitätslinie

Digitized by Google

östlich von 0 in einem kleinen pos. Halbkreise auf die neg. Seite der Realitätslinie und hat hier die Phase π erhalten. Diese Phase behält die Function bei, während sich t von 4 an bis zum Punkte $\sqrt{7}$ hinbewegt, wo dieselbe den Wert $-17, 04$ erlangt hat. Denkt man sich ferner t von einem Punkte der R. L. östlich von $\sqrt{7}$ in einem kleinen pos. Halbkreise um den Knoten $\sqrt{7}$ auf die westliche Seite übergeführt, so beschreibt die Function $F(t)$ von ihrem alten Stande aus einen pos. ganzen Kreis um den Verzweigungspunkt $-17, 04$, kehrt somit auf ihren Anfangspunkt zurück, wo dieselbe wieder mit der Phase π anlangt. Bewegt sich somit t vom Knoten $\sqrt{7}$ an auf der R. L. bis zum Pole 1 hin, so ist die Phase von $F(t)$ fortwährend π und die Function bewegt sich von $-17, 04$ wieder nach null hin. Das Stück der Realitätslinie von 4 bis 1 gehört somit der Isophase π an. Führen wir ferner t von einem Punkte östlich von 1 in einem kleinen pos. Halbkreise auf die westliche Seite hinüber, so bewegt sich die Function $F(t)$ von einem Punkte der R. L. westlich von 0 in einem kleinen pos. Halbkreise um den Ursprung auf die östliche Seite derselben und hat hier wieder die Phase 0 erlangt Diese Phase behält die Function $F(t)$ bei, während sich t von 1 an auf der R. L. bis zum Knoten $-\sqrt{7}$ hinbewegt, wo $F(t)$ den Wert 57, 04 erreicht hat. Das Stück der R. L. von 1 bis $-\sqrt{7}$ gehört daher der Isophase null an. Wenn sich ferner t von seinem Stande östlich des Knotens $-\sqrt{7}$ in einem kleinen pos. Halbkreise auf die westliche Seite hinüber bewegt, so macht $F(t)$ von ihrem Stande westlich des Verzweigungspunktes einen pos. Kreis um 57, 04, um wieder mit der Phase null beim Ausgangspunkte anzulangen. Die Function $F(t)$ behält daher die Phase null bei, wenn t die Strecke von $-\sqrt{7}$ bis -5 zurücklegt, und bewegt sich vom Punkte 57, 04 auf der R. L. nach null zurück. Somit gehört das Stück der R. L von $-\sqrt{7}$ bis -5 der Isophase null an. Wird ferner t in einem kleinen pos. Halbkreise um -5 von einem Punkte östlich von -5 auf die westliche Seite übergeführt, so macht auch $F(t)$ einen pos Halbkreis um null und gelangt wieder auf die westliche Hälfte der R. L., wo sie mit der Phase π anlangt. Diese Phase behält die Function bei, während t die R. L. von -5 an bis zum Westpunkt durchläuft, wo auch $F(t)$ neg. unendlich geworden ist. Die R. L. von -5 bis zum Westpunkte gehört daher der Isophase π an.

Nun sollen auch die beiden Hyperbelzweige auf ihre Isophasen untersucht werden. Wenn sich die Variable t in ihrem Stande östlich des Knotens $\sqrt{7}$ befindet, so liegt auch die Function $F(t)$ mit

Digitized by Google

der Phase π östlich des Verzweigungspunktes $-17, 04$. Bewegt sich nun t in einem kleinen pos. Viertelkreise um $\sqrt{7}$ auf den nördlichen Teil des östlichen Hyperbelzweiges, so macht die Function $F(t)$ einen pos. kleinen Halbkreis um $-17, 04$ und gelangt somit auf die R. L. westlich des Verzweigungspunktes, wo sie wieder die Phase π besitzt. Hätte sich t in einem kleinen neg. Viertelkreise um $\sqrt{7}$ auf den südlichen Teil des östlichen Hyperbelzweiges bewegt, so wäre die Function durch eine negative, halbe Drehung um $-17, 04$ in demselben Punkte der R. L. angelangt, wie vorhin. Der östliche Hyperbelzweig gehört daher der Phase π an. Um auch die Phase des westlichen Hyperbelzweiges zu erkennen, denken wir uns t in seinem Stande östlich des Knotens $-\sqrt{7}$ und $F(t)$ westlich des Verzweigungspunktes $57, 04$. Gelangt nun t mittelst eines kleinen pos. Viertelkreises auf den nördlichen, oder mittelst eines kleinen neg. Viertelkreises auf den südlichen Teil des westlichen Hyperbelzweiges, so beschreibt die Function $F(t)$ entweder einen pos. oder neg. Halbkreis um den Punkt $57, 04$ und gelangt so auf die R. L. östlich des Verzweigungspunktes, wo sie wieder die Phase null besitzt. Der westliche Hyperbelzweig gehört somit der Phase null an. Nach Früherem ist die Gleichung der Hyperbel

$$\frac{x^2}{7} - \frac{y^2}{21} = 1$$

Nun ist allgemein

$$t = x + iy$$

Für den östlichen Zweig der Hyperbel kann man nun

$$x = \sqrt{7}\cos y, \quad y = \sqrt{21}\sin y$$

setzen, was für t den Wert

$$t = \sqrt{7}(\cos\eta + i\sqrt{3}\sin\eta)$$

ergibt. Die neue Variable η kann hier alle pos. und neg. Werte durchlaufen. Weil dann

$$F(t) = -(14\sqrt{7}\cos 3\eta - 20)$$

ist, so erkennt man auch aus dieser Darstellung der Function $F(t)$, dass der östliche Hyperbelzweig zur Phase π gehört. Für den westlichen Zweig der Hyperbel ist es erlaubt

$$x = -\sqrt{7}\cos\eta, \quad y = \sqrt{21}\sin\eta$$

zu setzen, was für t den Wert

$$t = -\sqrt{7}(\cos\eta + i\sqrt{3}\sin\eta)$$

Digitized by Google

ergibt. Berechnet man auch hier den Wert der Function $F(t)$, so findet man

$$F(t) = (14\sqrt{7}\cos 3\eta + 20)$$

Auch dieser Ausdruck für die Function $F(t)$ lässt erkennen, das der westliche Zweig der Hyperbel zur Isophase null gehört. Wenn daher die Function $F(t)$ von null aus die Realitätslinie bis zum Ostpunkte durchlaufen soll, so stehen der Variabeln t drei verschiedene Wege offen.

1) Die Realitätslinie vom Pole 4 aus bis zum Ostpunkte.

2) Die Realitätslinie vom Pole 1 an bis zum Knoten $-\sqrt{7}$ und der nördliche Teil des westlichen Hyperbelzweiges.

3) Die Realitätslinie vom Pole -5 an bis zum Knoten $-\sqrt{7}$ und der südliche Teil des westlichen Hyperbelzweiges.

Für $F(t) = 0$ ist

$$t_{,} = 4, \quad t_{,,} = 1, \quad t_{,,,} = -5$$

Ist $F(t)$ grösser als null, aber kleiner als $2(7\sqrt{7} + 10)$, so sind die drei Wurzeln der Function $F(t)$ immer noch reell, und zwar sind $t_{,}$ und $t_{,,}$ pos., während $t_{,,,}$ einen neg. Wert besitzt. Hat schliesslich $F(t)$ den Wert $2(7\sqrt{7} - 10)$ erreicht, so ist

$$t_{,} = 4,5103; \quad t_{,,} = 0,1411; \quad t_{,,,} = -4,6515$$

Wenn ferner $F(t)$ grösser als $2(7\sqrt{7} - 10)$, aber kleiner $2(7\sqrt{7} + 10)$, so sind die drei Wurzeln immer noch reell; im allgemeinen sind zwei dann negativ und nur eine positiv. Hat $F(t)$ den Wert $2(7\sqrt{7} + 10)$ erreicht, so können die drei Wurzeln annähernd durch folgende Zahlen ausgedrückt werden:

$$t_{,} = 5,292; \quad t_{,,} = -\sqrt{7} \quad t_{,,,} = -\sqrt{7}$$

Hat die Function $F(t)$ den pos. Wert $2(7\sqrt{7} + 10)$ überschritten, so sind die drei Wurzeln nicht mehr alle null; zwei davon sind imaginär und conjugirt und liegen symmetrisch auf dem westlichen Hyperbelzweige; die dritte Wurzel ist positiv und liegt auf der R. L. östlich von 5,292. Die drei Wurzeln können in diesem Falle durch

$$t_{,} = 2\sqrt{7}\cos\eta; \quad t_{,,} = -\sqrt{7}\cos\eta - i\sqrt{3}\sin\eta]$$

$$t_{,,,} = -\sqrt{7}\,(\cos\eta + i\sqrt{3}\sin\eta)\}$$

Digitized by Google

dargestellt werden. Weil nach unserer Annahme die Function vom Punkte $2(7\sqrt{7}+10)$ aus nach dem Ostpunkte der R. L. fortschreitet, so kann der Wert derselben durch

$$F(t) = 2(7\sqrt{7}\cos\eta + 10)$$

dargestellt werden. Dass in diesem Falle die oben für $t_{,,}$ und $t_{,,,}$ angegebenen Werte der Gleichung genügen, ist nach früherem bekannt. Dass aber auch der Wert von $t_{,}$ derselben Gleichung genügt, ist leicht zu zeigen. Wenn endlich $F(t)$ im Ostpunkte der Realitätslinie angelangt ist, so muss die Variable η sehr gross angenommen werden. Setzt man in diesem Falle

$$2\sqrt{7}\cos\eta = N$$

wo N eine pos. sehr grosse Zahl bedeutet, so lassen sich die drei Wurzeln auf folgende Weise darstellen:

$$t_{,} = N; \quad t_{,,} = -N \cdot \frac{1-i\sqrt{3}}{2}; \quad t_{,,,} = -N \cdot \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$$

Die erste liegt im Ostpunkte der Realitätslinie und die beiden andern enthalten die unendlich fernen Punkte des westlichen Hyperbelzweiges. Die Function $F(t)$ lässt sich in diesem Falle durch

$$F(t) = N^3$$

darstellen und die oben angegebenen drei Wurzeln sind daher nichts als die drei Kubikwurzeln aus N^3.

Wenn die Function $F(t)$ von null aus die R. L. bis zum Westpunkte durchlaufen soll, so stehen auch hier der Variabeln t drei verschiedene Wege offen.

1) Die Realitätslinie vom Pole 4 an bis zum Knoten $\sqrt{7}$ und der nördliche Teil des östlichen Hyperbelzweiges.

2) Die Realitätslinie vom Pole 1 an bis zum Knoten $\sqrt{7}$ und der südliche Teil des östlichen Hyperbelzweiges.

3) Die Realitätslinie vom Pole -5 an bis zum Westpunkte.

Wenn der Wert der Function $F(t)$ grösser ist als $-2(7\sqrt{7}-10)$, so sind alle drei Wurzeln reell, von den zwei positiven Wurzeln liegt die eine zwischen $\sqrt{7}$ und 4 und die andere zwischen 1 und $\sqrt{7}$. Die neg. Wurzel liegt zwischen -5, 292 und -5. Wenn $F(t)$ den Wert $-2(7\sqrt{7}-10)$ erreicht hat, so können die drei reellen Wurzeln durch

Digitized by Google

$$t_{,} = \sqrt{7}\,; \quad t_{,,} = \sqrt{7}\,; \quad t_{,,,} = -5,\ 292$$

dargestellt werden. Die beiden pos. Wurzeln haben sich somit zu der einzigen Wurzel $\sqrt{7}$ vereinigt. Wenn der Wert von $F(t)$ kleiner als $-2(7\sqrt{7}-10)$, aber grösser als $-2(7\sqrt{7}+10)$ ist, so sind von den drei Wurzeln zwei imaginär und conjugirt und nur die dritte ist reell und kleiner als $-2\sqrt{7}$. Die imaginären Wurzeln liegen auf dem östlichen Hyperbelzweige und zwar liegt die eine auf dem nördlichen Teile und die andere symmetrisch auf dem südlichen Teile derselben. Wenn die $F(t)$ die Realitätslinie vom Punkte $-2(7\sqrt{7}-10)$ an bis zum Westpunkte durchlaufen soll, so kann ihr Wert durch

$$F(t) = -2(7\sqrt{7}\cos 3\eta - 10)$$

dargestellt werden. In diesem Falle sind nach Früherem

$$t_{,} = \sqrt{7}\,(\cos\eta + i\sqrt{3}\sin\eta)$$
$$t_{,,} = \sqrt{7}\,(\cos\eta - i\sqrt{3}\sin\eta)$$

die beiden imaginären Wurzeln, während die neg. Wurzel durch

$$t_{,,,} = -2\sqrt{7}\cos\eta$$

ausgedrückt werden kann.

Wenn die Function $F(t)$ im Westpunkte der Realitätslinie angelangt ist, so ist die Variable η sehr gross geworden und die drei Wurzeln der Function $F(t)$ lassen sich in diesem Falle durch die Ausdrücke

$$t_{,} = +2\sqrt{7}\cos\eta\,.\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right) = N\,.\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$t_{,,} = +2\sqrt{7}\cos\eta\,.\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right) = N\,.\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$t_{,,,} = -2\sqrt{7}\cos\eta \qquad\qquad = -N$$

wiedergeben. Die reelle Wurzel liegt im Westpunkt der Realitätsl. und die beiden imaginären Wurzeln stellen die Horizontpunkte des östlichen Hyperbelzweiges dar. Die Function $F(t)$ kann hier angenähert durch

$$F(t) = -(2\sqrt{7}\cos\eta)^3 = -N^3$$

dargestellt werden und die obigen Wurzeln sind nichts anderes als die drei Kubikwurzeln aus diesem Ausdrucke.

Digitized by Google

Die Isophasen bestehen im allgemeinen aus drei getrennten Stücken. Das erste Stück geht vom Pole 4 aus und liegt östlich des östlichen Hyperbelzweiges; das zweite Stück geht vom Pole 1 aus und liegt zwischen den beiden Hyperbelzweigen; das dritte Stück geht vom Pole -5 aus und liegt westlich des westlichen Hyperbelzweiges. Nur bei der Isophase null sind das westliche und mittlere Stück durch den Knoten $-\sqrt{7}$ mit einander verbunden und ebenso verbindet der Knoten $\sqrt{7}$ das östliche und mittlere Stück der Isophase π. Alle gehen von den Knoten aus und ziehen sich in gewundenen Curven nach dem Horizonte hin, die Isotimen auf ihrem Wege rechtwinklig durchschneidend.

Wir denken uns das Functionsfeld dreiblätterig. Das erste und zweite Blatt seien durch eine Uebergangslinie vom Punkte

$$-17,04 = -2(7\sqrt{7}-10)$$

bis zum Westpunkte der R. L. mit einander verbunden; das zweite und dritte Blatt denke man sich durch eine Uebergangslinie mit einander verbunden, die vom Punkte

$$2(7\sqrt{7}+10) = 57,04$$

der R. L. bis zum Ostpunkte derselben reicht. Das erste Feld sei zur Aufnahme der ersten Wurzel $t_{,}$, das zweite Feld zur Aufnahme der zweiten $t_{,,}$ und das dritte Feld zur Aufnahme der dritten Wurzel $t_{,,,}$ bestimmt. Da wo t reell ist, hat man

$$dt = \frac{dF}{3\,.\,(t^2-7)}$$

um das Wachsen und Abnehmen von t zu beurteilen. Bewegt sich nun die Function $F(t)$ vom Ostpunkte der R. L. des ersten Blattes in neg. Richtung nach dem Nullpunkte hin, so ist auch die Wurzel $t_{,}$ stetig im Abnehmen begriffen und bewegt sich aus dem Ostpunkte auf der R. L. nach dem Pole 4 hin. Somit ist die östliche Hälfte der R. L. des ersten Blattes das Bild der R. L. vom Pole 4 an bis zum Ostpunkte des Argumentfeldes.

Durchläuft im Fernen $F(t)$ die Realitätslinie von null an bis zum Verzweigungspunkte

$$-2(7\sqrt{7}-10) = -17,04$$

so bewegt sich die Wurzel $t_{,}$ vom Pole 4 an auf der R. L. nach dem Knoten $\sqrt{7}$ hin. Wird ferner die Function durch einen kleinen pos. Halbkreis um den Verzweigungspunkt auf die Nordseite der

Uebergangslinie übergeführt und auf derselben bis zum Westpunkte fortbewegt, so beschreibt $t_{,}$ zuerst einen kleinen positiven Viertelkreis um den Knoten $\sqrt{7}$ und gelangt so auf den nördlichen Teil des östlichen Hyperbelzweiges, um nachher auf diesem Wege den Horizont zu erreichen. Der westliche Teil des R. L. ist somit Bild der R. L. vom Pole 4 bis zum Knoten $\sqrt{7}$ und des nördlichen Teiles des östlichen Hyperbelzweiges Ist ferner der absolute Wert der Function $F(t)$ kleiner als $2(7\sqrt{7}-10)$, so liegt die zugehörige Wurzel $t_{,}$ innerhalb der den Pol 4 umgebenden Schleife der östlichen Isotime 17, 04. Somit ist das Innere des Kreises im ersten Felde; welcher durch den Verzweigungspunkt $-17, 04$ geht, Bild des von der Schleife 4 eingeschlossenen Gebietes des t-Feldes. Ist ferner der absolute Wert von $F(t)$ grösser als $2(7\sqrt{7}-10)$, aber kleiner als $2(7\sqrt{7}+10)$, so liegt die Wurzel $t_{,}$ in dem Gebiete des t-Feldes, das nach Aussen begrenzt wird von der Isotime 57, 04 bis zu den Durchschnittspunkten mit dem östlichen Hyperbelzweige und von dem zwischen diesen Schnittpunkten liegenden Teile derselben Hyperbel, nach innen aber von der Schleife (1) der Isotime 17, 04. Der Kreisring auf dem ersten Felde, gebildet von den Kreisen mit den Radien $2(7\sqrt{7}-10)$ und $2(7\sqrt{7}+10)$, ist somit das Bild des eben bezeichneten Gebietes des t-Feldes. Ist schliesslich der absolute Wert der Function $F(t)$ grösser als $2(7\sqrt{7}+10)$, so liegt die Wurzel $t_{,}$ ausserhalb der Isotime 57- 04, aber innerhalb des östlichen Hyperbelzweiges. Somit ist derjenige Teil des 1. Functionsfeldes, welcher ausserhalb des Kreises vom Radius 57, 04 liegt, Bild desjenigen Gebietes des t-Feldes, welches ausserhalb der Isotime 57, 04, aber innerhalb des östlichen Hyperbelzweiges liegt. Somit ist das ganze 1. Functions-Blatt Bild des vom östlichen Hyperbelzweige eingeschlossenen Gebietes des t-Feldes. Ebenso bildet sich das ganze zweite Functionsblatt durch die Wurzel $t_{,,}$ in dasjenige Gebiet des t-Feldes ab, welches zwischen den beiden Hyperbelzweigen liegt. Das Innere des Kreises vom Radius 17, 04 ist Bild des Inneren der den Pol 1 umgebenden Schleife der Isotime 17, 04; der Kreisring, gebildet von den Kreisen mit den Radien 17, 04 und 54, 04 ist Bild desjenigen Gebietes des t-Feldes, welches ausserhalb der Schleife (1) und des östlichen Hyperbelzweiges, aber innerhalb der Isotime 57, 04 liegt; der Teil endlich des Functionsblattes, welcher ausserhalb des Kreises vom Radius 57, 04 liegt, bildet sich in denjenigen Teil des t-Feldes ab, welcher zwischen den beiden Hyperbelzweigen, aber ausserhalb der Isotime 57, 04 liegt. Ebenso ist klar, dass das dritte Functionsblatt auch die Wurzel $t_{,,,}$ in denjenigen Teil des t-Feldes abgebildet wird, welcher durch den westlichen Hyperbelzweig nach Osten abgegrenzt wird.

Digitized by Google

Uebersicht.

$F(t) = N^3$;			$2(7\sqrt{7}\cos 3\eta+10)$;	57, 04;
1. Blatt. $t_{'} = N$;			$2\sqrt{7}\cos\eta$;	5, 29;
2. Blatt. $t_{''} = \frac{N}{2}(-1+i\sqrt{3})$;			$\sqrt{7}(-\cos\eta+i\sqrt{3}\sin\eta$;	$-2{,}645$;
3. Blatt. $t_{'''} = \frac{N}{2}(-1-i\sqrt{3})$;			$\sqrt{7}(-\cos\eta-i\sqrt{3}\sin\eta$;	-2.645;
$F(t)=17{,}04$;	0;	$-17{,}04$;	$-2(7\sqrt{7}\cos 3\eta-10)$;	$-N^3$;
1. Bl. 4,5133;	4;	2.445;	$\sqrt{7}(\cos\eta+i\sqrt{3}\sin\eta)$;	$\frac{N}{2}(1-i\sqrt{3})$
2. Bl. 0,17411;	1;	2,445;	$\sqrt{7}(\cos\eta-i\sqrt{3}\sin\eta)$	$\frac{N}{2}(1-i\sqrt{3})$
3. Bl. $-4{,}4515$;	-5;	$-5{,}291$;	$-2\sqrt{7}\cos\eta$;	$-N$

Digitized by Google

XIII.

Conforme Abbildung der innern Fläche eines Kreises in die innere Fläche eines regulären Vielecks.

Von

Ulrich Bigler.

Der kürzlich verstorbene, für die math. Wissenschaft hoch verdiente Prof. Schläfli machte mir in einer der letzten Vorlesungen welche ich bei ihm zu hören die Ehre hatte, die Mitteilung, dass sich mittelst der Function $\int_0^{} (1-x^n)^{-\frac{2}{n}} dx$ die innere Fläche eines Kreises in die innere Fläche eines regulären Vielecks conform abbilden lasse, und dass die dabei auftretenden Integrale zur Berechnung von $J(\frac{1}{3})$ und von $S\binom{K}{3}$, $C\binom{K}{3}$, $D\binom{K}{3}$, sowie von $S\binom{L}{3}$, $C\binom{L}{3}$, $D\binom{L}{3}$ verwendet werden können. Ich habe nun diesen Gegenstand seit längerer Zeit verfolgt und will hier die Ergebnisse meiner Arbeit veröffentlichen.

Wenn der Einheitskreis des Zahlenfeldes in n gleiche Teile geteilt wird, so kann man diese Teilungspunkte durch

$$x = e^{\frac{2i\lambda\pi}{n}}$$

Digitized by Google

darstellen, wo λ der Reihe nach die Werte 0, 1, 2, 3, . . . $(n-1)$ durchläuft. Die Function $(1-x^n)$ verschwindet in allen Teilpunkten und wiederholt in allen n Sectoren ihre Werte. Wenn

$$X = e^{i\varphi},\ 0 < \varphi < \frac{2\pi}{n}$$

so ist

$$(1-x^n) = (1-e^{in\varphi}) = e^{i\left(\frac{n\varphi}{2}-\frac{\pi}{2}\right)} \cdot \left(e^{i\frac{n\varphi}{2}} - e^{-i\frac{n\varphi}{2}}\right)$$

$$= e^{i\left(\frac{n\varphi}{2}-\frac{\pi}{2}\right)} \cdot 2i\sin\frac{n\varphi}{2}$$

$$dx = e^{i\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)} d\varphi$$

und man hat

$$(1-x^n)dx = e^{i\left(\frac{n\varphi}{2}\right)} \cdot 2\sin\frac{n\varphi}{2}\, d\varphi$$

als Wegelement. Soll nun aber $(1-x^n)dx$ auf einer Geraden fortschreiten, während x den Einheitskreis vom Punkte 1 bis zum Punkte $e^{\frac{2i\pi}{n}}$ durchläuft, so muss $(1-x^n)$ noch mit $-\frac{2}{n}$ potenzirt werden. Es ist daher

$$(1-x^n)^{-\frac{2}{n}} dx = e^{i\left(\frac{\pi}{n}+\frac{\pi}{2}\right)} \cdot \left(2\sin\frac{n\varphi}{2}\right)^{-\frac{2}{n}} d\varphi$$

ein Wegelement, das sich unter dem Aximute $\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{n}\right)$ fortwährend addirt, also eine Gerade beschreibt, während φ von 0 bis $\frac{2\pi}{n}$ wächst. Es sei nun

$$X = \int_0 (1-x^n)^{-\frac{2}{n}} dx$$

dann ist X eine innerhalb der Kreisfläche endliche und eindeutige Function von x. Wenn

Digitized by Google

$$A = \int_0^1 (1 - x^n)^{-\frac{2}{n}} dx$$

so nimmt X für

$$x = e^{\frac{2i\lambda\pi}{n}}$$

den Wert $e^{\frac{2i\lambda\pi}{n}}$ A an und läuft in gerader Linie von 0 bis zu diesem Punkte, während x den Radius, der vom Centrum nach dem Teilpunkte $e^{\frac{2i\lambda\pi}{n}}$ geht, durchläuft. Wenn

$$x = e^{i(2\lambda+1)\frac{\pi}{n}} \cdot r$$

wo r die positiven Werte von 0 bis 1 durchlaufen soll, so wird

$$X = e^{i(2\lambda+1)\frac{\pi}{n}} \int_0^1 (1+r^n)^{-\frac{2}{n}} dr$$

beschreibt, also eine Gerade bis zum Punkte $e^{i(2\lambda+1)\cdot\frac{\pi}{n}} \cdot B$, wenn

$$B = \int_0^1 (1+r^n)^{-\frac{3}{n}} dr$$

Es sei ferner

$$C = \int_0^{\frac{\pi}{n}} \left(3\sin\frac{n\varphi}{2}\right)^{-\frac{2}{n}} d\varphi = \frac{2}{n} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\sin\chi)^{-\frac{2}{n}} d\chi$$

und somit

Digitized by Google

$$2C = \int_0^{\frac{2\pi}{n}} \left(2\sin\frac{n\varphi}{2}\right)^{-\frac{2}{n}} d\varphi$$

Dann beschreibt X eine Gerade von A bis zum Punkte

$$A + e^{i\left(\frac{\pi}{n}+\frac{\pi}{2}\right)} \cdot 2C,$$

während $x = e^{i\varphi}$ und φ von 0 bis $\frac{2\pi}{n}$ geht. Man hat daher die Relation

I. $$A + e^{i\left(\frac{\pi}{n}+\frac{\pi}{2}\right)} \cdot 2C = e^{\frac{2i\pi}{n}} B$$

Zugleich ist aber auch

II. $$A + e^{i\left(\frac{\pi}{n}+\frac{\pi}{2}\right)} \cdot C = v^{i\left(\frac{\pi}{n}\right)} B$$

Die erste Gleichung gibt

$$C = A\sin\frac{\pi}{n}$$

und die zweite

$$B = A\cos\frac{\pi}{n}$$

somit ist auch

$$B^2 + C^2 = A^2$$

In der Nähe von $x = 1$ ist X in tiefster Näherung gleich

$$A - \frac{n^{1-\frac{2}{n}}}{n-2} \cdot (1-x)^{1-\frac{2}{n}}$$

Wenn ϱ pos. sehr klein,

Digitized by Google

$$x = 1 - \varrho e^{i\varphi}; \quad -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$$

so ist

$$X = A - \frac{(n\varrho)^{1-\frac{2}{n}}}{n-2} \cdot e^{i\left(1-\frac{2}{n}\right)\varphi}$$

Also erfüllt X das Innere eines regulären n-ecks, während x das Innere des Einheitskreises erfüllt. Man lasse x von 0 bis $1-\varrho$ in der Realitätslinie laufen; dann wachse φ von 0 bis π, so dass x um 1 einen rechtläufigen Halbkreis vom Radius ϱ beschreibt, um in $1+\varrho$ die Realitätslinie wieder zu erreichen. Jetzt ist $(1-x^n)^{-\frac{2}{n}}$ in $e^{-\frac{2i\pi}{n}}(x^n-1)^{-\frac{2}{n}}$ übergegangen, wo fortan $(x^n-1)^{-\frac{2}{n}}$ pos. zu verstehen ist, wenn x fortfährt, die Realitätslinie von $1+\varrho$ an zu durchlaufen. Es sei

$$X = A + e^{-i\frac{2\pi}{n}} \int_1^x (x^n-1)^{-\frac{2}{n}} dx$$

Weil das neue Integral pos. bleibt, während x die Realitätslinie von 1 aus in positiver Richtung durchläuft, so beschreibt X eine Gerade, die unter dem Azimute $-\frac{2\pi}{n}$ vom Punkte A ausgeht. Die neue Formel verwandelt daher die ganze ausserhalb des Einheitskreises liegende x-ebene in das Innere eines dem früheren congruenten, regulären n-eckes, das mit ihm die von A bis $e^{-i\frac{2\pi}{n}}A$ reichenden Seite gemein hat. Der Horizont des x-feldes bildet sich in den Mittelpunkt des neuen n-eckes ab.

Will man die Formeln

$$C = A \sin\frac{\pi}{n}, \qquad B = A\cos\frac{\pi}{n}$$

aus den Integralen beweisen, so führe man dieselben auf Euler'sche Integrale zurück. Es ist

Digitized by Google

$$A = \frac{1}{n}\int_0^1 (1-x^n)^{-\frac{2}{n}} x^{\frac{1}{n}-1}\, dx = \frac{1}{n}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\cdot\Gamma\left(1-\frac{2}{n}\right)}{\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)}$$

$$= \frac{1}{n-2^{\frac{2}{n}}}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}$$

Bei B setze man

$$x^n = \frac{1-p}{1+p}$$

dann sinkt p von 1 auf 0 herab, während x von 0 bis 1 wächst. Man findet

$$(+x^n)^{-\frac{2}{n}} x = \frac{(1-p^2)^{\frac{1}{n}}}{2^{\frac{2}{n}}}\,;\quad \frac{dx}{x} = -\frac{2}{n}\cdot\frac{dp}{1-p^2}$$

also ist

$$B = -\frac{1}{n\,.\,2^{\frac{2}{n}}}\int_0^1 (1-p^2)^{\frac{1}{n}-1}\cdot\frac{2p\,dp}{p} = -\frac{1}{n\,.\,2^{\frac{2}{n}}}$$

$$\times\int_0^1 (1-x)^{\frac{1}{n}-1} x^{-\frac{1}{2}}\, dx = \frac{1}{n}\,.\,2^{-\frac{2}{n}}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+n\right)}$$

Im Ausdrucke für

$$C = \frac{2}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\sin\chi)^{-\frac{2}{n}}\, d\chi$$

setze man

Digitized by Google

$$\sin^2\chi = x$$

dann wird

$$C = \frac{1}{n \cdot 2^{\frac{2}{n}}} \cdot \int_0^1 x^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{n}} (1-x)^{-\frac{1}{2}} dx$$

$$= \frac{1}{n \cdot 2^{\frac{2}{n}}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)}$$

und weil bekanntlich

$$\sin\frac{\pi}{n} = \frac{\pi}{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)}, \quad \cos\frac{\pi}{n} = \frac{\pi}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)}$$

so erkennt man aus obiger Darstellung der Integrale A, B, C durch Gammafunction die Richtigkeit der Relationen

$$B = \cos\frac{\pi}{n} \cdot A; \quad C = \sin\frac{\pi}{n} \cdot A$$

Als speciellen Fall nehme ich nun $n = 3$ an. In diesem Falle bildet die Function

$$X = \int_0 (1-x^3)^{-\frac{2}{3}} dx$$

die innere Fläche eines Kreises in die innere Fläche eines regulären Dreieckes ab. Der Radius des umbeschriebenen Kreises wird durch A, der Radius des einbeschriebenen Kreises durch B dargestellt, während sich die halbe Seitenlänge durch C ausdrücken lässt. Hier ist

$$A = \int_0^1 (1-x^3)^{-\frac{2}{3}} dx = \tfrac{1}{3} \int_0^1 (1-x)^{-\frac{2}{3}} x^{-\frac{2}{3}} dx$$

$$= \tfrac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^{\frac{1}{3}}} \cdot \frac{\Gamma(\frac{1}{3})\,\Gamma(\frac{1}{3})}{\Gamma(\frac{2}{3})}$$

und weil

Digitized by Google

$$\Gamma(\tfrac{1}{3}) = \frac{1}{2^{\frac{2}{3}}} \cdot \frac{\Gamma(\frac{1}{6})\,\Gamma(\frac{2}{3})}{\Gamma(\frac{1}{2})}; \quad \Gamma(\tfrac{1}{6}) = 2^{\frac{2}{3}} \frac{\Gamma(\frac{1}{3})\,\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{2}{3})}$$

$$\Gamma(\tfrac{1}{3}) \cdot \Gamma(\tfrac{1}{6}) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

so ist

$$\Gamma(\tfrac{1}{3}) \cdot \Gamma(\tfrac{1}{6}) = \frac{2^{\frac{2}{3}}\sqrt{3}}{2\pi} \cdot \Gamma^3(\tfrac{1}{3}) \cdot \Gamma(\tfrac{1}{2})$$

Daher ist

$$A = \frac{1}{2\pi\sqrt{3}} \cdot \Gamma^3(\tfrac{1}{3})$$

Ebenso findet man

$$B = \frac{1}{4\pi\sqrt{3}} \cdot \Gamma^3(\tfrac{1}{3})$$

und

$$C = \frac{1}{4\pi} \cdot \Gamma^3(\tfrac{1}{3})$$

also ist auch hier

$$B = \tfrac{1}{2} \cdot A; \quad C = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,A$$

Die Integrale A, B, C sollen noch weiter verwandelt werden. Setzt man in

$$A = \tfrac{1}{3}\int_0^1 (1-x)^{-\frac{2}{3}}\, x^{-\frac{2}{3}}\, dx$$

$$x = \frac{p-1}{p+1}$$

so erhält man

Digitized by Google

$$A = \frac{2^{\frac{1}{3}}}{3} \cdot \int_1^{\infty} (p^3-1)^{-\frac{2}{3}} \, dp = \frac{1}{2^{\frac{2}{3}}} \times \int_1^{\infty} \frac{1}{p} \cdot \frac{\partial}{\partial p} (p^2-1)^{\frac{1}{3}} \, dp$$

und dieses Integral geht für

$$p^2 = 1 + t^3$$

in das andere

$$A = \frac{1}{2^{\frac{2}{3}}} \cdot \int_0^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{1+t^3}}$$

über.

Ferner ist

$$B = \int_0^1 (1+x^3)^{-\frac{2}{3}} \, dx$$

und geht mittelst der Substitution

$$x^3 = \frac{1-p}{1+p} \quad \text{in}$$

$$B = \frac{1}{3} 2^{\frac{1}{3}} \cdot \int_0^1 (1-p^2)^{-\frac{2}{3}} \, dp$$

über. Setzt man hier

$$1 - p^2 = t^3$$

so erhält man schliesslich für B die Integralform

Digitized by Google

$$B = \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^3}}$$

Für das dritte Integral C erhalten wir für $n = 3$ die Form

$$C = -\frac{1}{3 \cdot 2^{\frac{3}{2}}} \cdot \int_0^1 x^{-\frac{5}{6}} (1-x)^{-\frac{1}{2}} dx$$

Setzt man hier

$$x = t^3$$

so geht dieses Integral in

$$C = \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}} \cdot \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t(1-t^3)}}$$

über und für

$$t = \frac{1}{u}$$

erhält man auch hier

$$C = \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}} \cdot \int_1^\infty \frac{dt}{\sqrt{t^3-1}}$$

wenn die Variable u wieder durch t ersetzt wird. Die drei Formeln

$$A = \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}} \cdot \int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{1+t^3}}, \quad B = \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}} \cdot \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^3}}$$

$$C = \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}} \cdot \int_1^\infty \frac{dt}{\sqrt{t^3-1}}$$

Digitized by Google

sind zwar ähnlich, aber sie zu combiniren ist schwer. Die Function $\sqrt{t^3+1}$ erfordert ein zweiblätteriges t-feld, wo z. B. eine Uebergangslinie von $-N$ nach -1, die andere gerade von $\frac{1-i\sqrt{3}}{2}$ nach $\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ geht. Bei A beginnt der Weg in 0 des ersten Blattes, wo $\sqrt{t^3+1}$ den Wert 1 hat, geht in

$$t = \tfrac{1}{2}$$

durch die Uebergangslinie in das zweite Blatt, um dann auf der Realitätslinie den Ostpunkt zu erreichen. Man kann nun zwar die Nordhälfte des Horizontes zum Wege addiren; es ergibt so einen Weg, der im ersten Blatte von 0 nach $\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ hingeht, im zweiten Blatte nach 0 zurückkehrt, von hier aus die Realitätslinie bis -1 durchläuft, um auf der Nordseite der Uebergangslinie im 2. Blatte nach dem Westpunkte zu gelangen. Nur der letzte Teil des Integrales (von -1 nach $-N$) kann mit C verglichen werden. Ich beabsichtige nun, die drei Integrale A, B und C in die Normalform der elliptischen Integrale überzuführen. Da der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen bei allen drei Integralen in Bezug auf die Variable t auf den dritten Grad steigt, so soll hier zuerst allgemein die Gleichung

$$(x-a)(x-b)(x-v) = 0$$

wenn ihr entwickeltes Polynom reelle Coefficienten hat, durch eine lineare Substitution von der Form $\frac{\gamma+\delta y}{\alpha+\beta y}$ so verwandelt werden, dass die Wurzeln der neuen in y ausgedrückten Gleichung paarweise einander entgegengesetzt werden. Die Wurzeln a, b und c, die ich mir in diesem Augenblicke reell und positiv denke, sollen auf der Realitätslinie durch die Punkte A, B und C bezeichnet werden und es sei $a > b > c > 0$. Dem Punkte A mit der Abscisse a denke ich mir den Ostpunkt der Realitätslinie als ein zweiter Punkt zugeordnet. Dann bestimmen die beiden Punktepaare (B, C) und (A, ∞) eine Involution, von welcher A der Mittelpunkt ist. Wenn nun (R, R') ein ferneres Punktenpaar ist, das sowol mit $(B; C)$ als auch mit (A, ∞) harmonisch zugeordnet ist, so existirt bekanntlich die Relation

$$\overline{AR}^2 = \overline{AR_1}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{AC}$$

Wird nun die Entfernung des Punktes A von R mit r bezeichnet, so ist daher

Digitized by Google

$$r^2 - (a-b)\,.\,(a-c)$$

und wenn abkürzend

$$p^2 = (a-b), \quad q^2 = (a-c)$$

gesetzt wird, wo p und q im vorliegenden Falle positiv verstanden werden, so kann man auch

$$r = pq$$

setzen, wo somit auch r pos. aufgefasst ist. Wenn nun x die Abscisse eines variablen Punktes P der Realitätslinie bezeichnet, so verwandelt die lineare Substitution

$$y = \frac{\overline{R\,P}}{\overline{R_1\,P}} = \frac{x-a=r}{x-a+r}$$

die Gleichung

$$(x-a)(x-b)(x-c) = 0$$

in eine andere, deren Wurzeln paarweise einander entgegengesetzt sind. Aus obiger Substitution folgt, dass

$$x-a = r\cdot\frac{1+y}{1-y}, \quad x-b = p^2+pq\cdot\frac{1+y}{1-y}$$

$$x-b = \frac{p}{1-y}[(p+q)-(p-q)y],$$

$$x-c = \frac{q}{1-y}[(p+q)+(p-q)y]$$

ist, und somit

$$(x-a)(x-b)(x-c) = \frac{(pq)^2}{(1-y)^4}(1-y^2)[(p+q)^2-(p-q)^2y^2]$$

Weil ferner auch

$$dx = \frac{2pq}{(1-y)^2}dy$$

ist, so erhält man

$$\frac{dx}{\sqrt{(x-a)(x-b)(x-c)}} = \frac{2\,dy}{\sqrt{(1-y^2)((p+q)^2-(p-q)^2y^2)}}$$

Wir haben oben vorausgesetzt, dass die drei Wurzeln a, b, c reell und pos. seien. Aber auch in dem Falle, wo z. B. b und c conjugirt sind, ist nur diese Verwandlung zu gebrauchen. Da a

Digitized by Google

reell, b und c aber conjugirt, so sind auch $(a-b)$ und $(a-c)$ conjugirt, und (p, q) und r können wieder pos. aufgefasst werden und die Substitution hat auch in diesem Falle reelle Form.

Wenden wir nun diese allg. Verwandlungsformeln auf die Integrale A, B und C an. Als Ausgangspunkt diene das Integral A. Weil aber hier die untere Grenze 0 nicht mit der reellen Wurzel der Gleichung

$$t^3+1=0$$

zusammenfällt, dieselbe daher der Ueberführung in die Periode der elliptischen Integrale Schwierigkeiten bereiten würde, so suche man zuerst diese untere Grenze von 0 nach -1, als der reellen Wurzel der Gleichung

$$t^3+1=0$$

zu verschieben, was auf folgende Weise geschehen kann. Es ist

$$A=\frac{1}{2^{\frac{2}{3}}}\cdot\int_0^{\infty}\frac{dt}{\sqrt{t^2+1}}$$

und da auch

$$B=\frac{1}{2^{\frac{2}{3}}}\cdot\int_{-1}^{0}\frac{dt}{\sqrt{t^3+1}}$$

so folgt aus der Relation

$$A=2B$$

dass auch

$$A=2^{\frac{1}{3}}\cdot\int_{-1}^{0}\frac{dt}{\sqrt{t^3+1}}$$

und daher ist

$$2A+A=3A=2^{\frac{1}{3}}\int_{-1}^{\infty}\frac{dt}{\sqrt{t^3+1}}$$

also

$$A=\frac{2^{\frac{1}{3}}}{3}\int_{-1}^{\infty}\frac{dt}{\sqrt{t^3+1}}$$

Digitized by Google

Die Gleichung

$$t^3 + 1 = 0$$

hat nun die Wurzeln $-1,\ e^{i\frac{\pi}{3}},\ e^{-i\frac{\pi}{3}}$

Der Mittelpunkt der Involution hat daher die Abscisse -1 und seine Entfernung von den beiden Doppelpunkten ist daher

$$r = \sqrt{(1+e^{i\frac{\pi}{3}})(1+e^{-i\frac{\pi}{3}})} = \sqrt{3}$$

somit auch

$$pq = \sqrt{3}$$

wenn wieder

$$p^2 = -(1+e^{i\frac{\pi}{3}}), \qquad q^2 = -(1+e^{-\frac{\pi}{3}})$$

gesetzt wird. Ferner ist

$$(p+q)^2 = 2\sqrt{3} - 3 = \sqrt{3}\ .\ (2-\sqrt{3})$$

$$(p-q)^2 = -2\sqrt{3} - 3 = -\sqrt{3}\ .\ (2+\sqrt{3})$$

Da in diesem Falle

$$y = \frac{t+1-\sqrt{3}}{t+1+\sqrt{3}}$$

gesetzt werden kann, und t die Realitätslinie von -1 bis zum Ostpunkte in pos. Richtung durchläuft, so macht y einen Weg, der von -1 durch 0 direct nach 1 geht. Nach der allg. Formel erhält man daher für das Integral A den Ausdruck

$$A = \frac{2^{\frac{4}{3}}}{3^{\frac{4}{5}}} \cdot \int_{-1}^{1} \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)((2-\sqrt{3})+(2+\sqrt{3})y^2}}$$

oder auch

$$A = \frac{2^{\frac{4}{3}}\ .\ \sqrt{2}}{3^{\frac{4}{5}}\ .\ (1+\sqrt{3})} \cdot \int_{-1}^{1} \frac{2y}{\sqrt{(1-y^2)((2-\sqrt{3})^2+y^2)}}$$

Digitized by Google

Die Pole dieses Integrales liegen in 1, -1, $(2-\sqrt{3})e^{t\frac{\pi}{3}}$, $(2-\sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{3}}$ und wegen der Quadratwurzel im Nenner kann man sich die y-ebene 2 blätterig denken, deren Blätter durch zwei Uebergangsl. mit einander verbunden sind. Die eine möge die Punkte 1 und -1 in gerader Richtung verbinden, während die andere die Pole $\left((2-\sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{2}}, (2-\sqrt{3})e^{-i\frac{\pi}{2}}\right)$ durch eine Gerade verbinden soll. Denkt man sich im Integrale A die Variable y durch $-y_{,}$ ersetzt, so kann man sich für $y_{,}$ einen Weg denken, der von 1 bis 0 den Nordrand der Uebergangslinie umfasst, in einem kleinen negativen Halbkreise 0 umgibt, um auf dem Südrande der Uebergangslinie nach -1 zu gelangen. Wenn dann wieder

$$y_{,}^{2} = 1 - y_{,,}^{2}$$

gesetzt wird, so liegen die Pole des $y_{,,}$-feldes in 1, -1, $\frac{2\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}$, $-\frac{2\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}$ und man kann sich auch hier 2 Uebergangslinien denken, welche resp. die Pole $\left(1, \frac{2\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}\right)$ und $\left(-1, -\frac{2\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\right)$ durch gerade Linien verbinden mögen. Dem oben bezeichneten Wege auf dem $y_{,}$-felde entspricht auf dem $y_{,,}$-felde ein Weg, der sich von 0 auf der Realitätslinie des ersten Feldes nach 1 hinzieht, diesen Pol in einem kleinen neg. Halbkreise umgibt, um von hier aus auf der Realitätslinie des zweiten Blattes nach 0 zurückzukehren. Nach Ausführung der oben bezeichneten Substitutionen erhält man

$$A = \frac{2^{\frac{1}{3}}}{3^{\frac{1}{4}}} \cdot \int \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)\left(1-\frac{2+\sqrt{3}}{4}y^2\right)}}$$

(Weg eine rückläufige Schlinge, geworfen von 0 um den Pol 1).

Da aber auf dem Wege von 0 nach 1 hin Punkte der Realitätslinie dy und $\sqrt{1-y^2}$ pos. verstanden sind, so müssen diese Elemente auf dem Rückwege neg. aufgefasst werden. Der Integrand hat daher in zwei entsprechenden Punkten des Hin- und Rückweges denselben

Digitized by Google

Wert, und beide Wege liefern somit für das Integral den Wert K. Man hat somit

$$A = \frac{2^{\frac{4}{3}}}{5^{\frac{4}{3}}} \cdot K$$

wo

$$k^2 = \frac{2+\sqrt{3}}{4}, \quad l^2 = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$$

und

$$k = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}, \quad l = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

Ebenso findet man für denselben Modul

$$B = \frac{2^{\frac{1}{3}}}{5^{\frac{4}{3}}} K, \quad C = \frac{2^{\frac{1}{3}}}{3^{\frac{4}{3}}} K$$

Wenn

$$k^2 = \frac{2-\sqrt{3}}{4}, \quad l^2 = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$$

also

$$k = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}, \quad l = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

angenommen ist, so sollen die Argumente mit einem obern Accente versehen werden.

Betrachtet man in dem zuletzt für A gefundenen Integralausdrucke die Variable y als die elliptische Function S mit dem Argumente x und führt die Substitution

$$S = -i\frac{S'}{C'}$$

aus, so durchläuft die neue Variable S' von 0 aus die Südhälfte der lateralen Axe, kehrt längs des östl. Horizontes nach dem Nordpunkte iN hin, um von hier aus auf der Nordhälfte der lateralen Axe 0 wieder zu erreichen. Weil

$$dS = \frac{dS'}{C'^3}, \quad \sqrt{(1-S^2)} = \frac{1}{C'}$$

Digitized by Google

$$\sqrt{1-\frac{2+\sqrt{3}}{4}\cdot S^2}=\frac{1}{C'}\sqrt{\left(1-\frac{2-\sqrt{3}}{4}S'^2\right)}$$

so ist

$$A=\frac{i\,2^{\frac{1}{3}}}{3^{\frac{5}{4}}}\cdot\int\frac{dS}{\sqrt{(1-S^2)\left(1-\frac{2-\sqrt{3}}{4}S^2\right)}}$$

(Weg von 0 aus die laterale Axe in neg. Richtung.)

Der Einfachheit wegen sind hier die Accente wieder weggelassen worden. Denkt man sich hier S durch $-S$ ersetzt, d. h. kehrt man den Integrationsweg um und lässt S von 0 nach iN laufen, längs des westlichen Horizontes nach $-iN$ und von hier auf der lateralen Axe nach 0 zurück, so läuft das Argument x direct von 0 nach $2L$ und man hat

$$A=\frac{-i\,2^{\frac{4}{3}}}{3^{\frac{5}{4}}}\cdot L'\left(k=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\right)$$

$$k^2=\frac{2-\sqrt{3}}{4},\qquad l^2=\frac{2+\sqrt{3}}{4}$$

$$k=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}},\qquad l=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

Nun soll auch noch das Integral C in die Normalform der elliptischen Integrale übergeführt werden. Weil

$$A=\frac{2C}{\sqrt{3}}$$

so hat man

$$A=\frac{2^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{3}}\cdot\int_1^{\infty}\frac{dt}{\sqrt{(t^3-1)}}$$

Die Wurzeln der Gleichung

$$t^3-1=0$$

Digitized by Google

liegen in 1, $e^{\frac{2i\pi}{3}}$, $e^{-\frac{2i\pi}{3}}$ und daher ist auch hier

$$r = \sqrt{3}$$

daher ist

$$y = \frac{t-1-\sqrt{3}}{t-1+\sqrt{3}}$$

oder

$$t = 1 + \sqrt{3} \cdot \frac{1+y}{1-y}$$

zu setzen. Die neue Variable y macht den Weg von -1 nach 1, während t von 1 aus die Realitätslinie bis zum Ostpunkte durchläuft. Es ist somit

$$A = \frac{2^{\frac{4}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{2}}}{3^{\frac{1}{4}}(\sqrt{3}-1)} \int_{-1}^{+1} \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)((2+\sqrt{3})^2+y^2)}}$$

und die Substitution

$$y^2 = 1 - y_1^2$$

führt auf das Integral

$$A = \frac{2^{\frac{1}{3}}}{3^{\frac{1}{4}}} \cdot \int_{-1}^{+1} \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)\left(1-\frac{2-\sqrt{3}}{4}y^2\right)}}$$

$$= \frac{2^{\frac{4}{3}}}{3^{\frac{1}{4}}} K'\left(k = \frac{(\sqrt{3}-1)}{2\sqrt{2}}\right)$$

$$k^2 = \frac{2-\sqrt{3}}{4}, \quad l^2 = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$$

$$k = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}, \quad l = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

Macht man schliesslich noch in der letzten Integralform für A die Substitution

Digitized by Google

$$y_1 = \frac{-ty}{\sqrt{(1-y^2)}}$$

so erhält man noch

$$A = \frac{-i \cdot 2^{\frac{1}{3}}}{3^{\frac{3}{4}}} \cdot \int \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)\left(1-\frac{2+\sqrt{3}}{4}y^2\right)}}$$

wo die Variable y von 0 aus die ganze laterale Axe in pos. Sinne durchläuft. Das Integral hat somit den Wert $2L$ und es ist daher auch

$$A = \frac{-i \cdot 2^{\frac{4}{3}}}{3^{\frac{3}{4}}} L\left(k = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}\right)$$

$$k^2 = \frac{2+\sqrt{3}}{4}, \qquad l^2 = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$$

$$k = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}, \qquad l = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

Wenn nun das Periodenverhältniss $\frac{L}{K}$ mit z bezeichnet wird, so hat man für

$$k = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

$$\frac{L'}{K'} = z' = i\sqrt{3}$$

und für

$$k = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

$$\frac{L}{K} = z = \frac{i}{\sqrt{3}} = -\frac{1}{z'}$$

daher die Gleichung

$$L \cdot L' + K \cdot K' = 0$$

Digitized by Google

Zur Berechnung des Periodenverhältnisses s wäre es nicht nötig gewesen, noch das Integral C in die Normalform überzuführen; die Berechnung desselben hätte auch auf folgende Weise geschehen können:

Wenn

$$k^2 = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$$

so ist

$$l^2 = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$$

und

$$kl = \tfrac{1}{4}, \quad l + ix = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

Nun gelten aber bekanntlich die Gleichungen

$$\chi^4\left(\frac{z}{2}\right) = \frac{1-\varphi^4(z)}{1+\varphi^4(z)}$$

$$\chi^4\left(\frac{-1+z}{2}\right) = \frac{1-\varphi^4(=1+z)}{1+\varphi^4(-1+z)}$$

ersetzt man in der zweiten $\varphi^4(-1+z)$ durch $e^{-i\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\varphi^4(z)}{\chi^4(z)}$ und wendet die Gleichung

$$\chi^8(z) + \varphi^8(z) = 1$$

an, so erhält man auch

$$\chi^4\left(\frac{-1+z}{2}\right) = (\chi^4(z) + i\varphi^4(z))^2 = (k+il)^2$$

und daher ist

$$\text{a)} \quad \chi^2\left(\frac{-1+z}{2}\right) = k + il = e^{i\frac{\pi}{12}}$$

Da nun aber auch

$$\chi\left(\frac{-1+z}{2}+1\right) = \frac{1}{\chi\left(\frac{-1+z}{2}\right)}$$

so ist

Digitized by Google

b) $$\chi^2\left(\frac{1+z}{2}\right) = e^{-i\frac{\pi}{12}}$$

Aus den Gleichungen a und b folgt nun, dass

$$\chi^8\left(\frac{-1+z}{2}\right)+\chi^8\left(\frac{1+z}{2}\right) = e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{-i\frac{\pi}{3}} = 1$$

ist. Weil nun aber auch

$$\chi^8\left(\frac{1+z}{2}\right)+\varphi^8\left(\frac{1+z}{2}\right) = 1$$

so hat man die Gleichung

$$\chi^8\left(\frac{-1+z}{2}\right) = \varphi^8\left(\frac{1+z}{2}\right)$$

Wendet man nun hier die bekannte Relation

$$\varphi(z) = \chi\left(-\frac{1}{z}\right)$$

an, so hat man schliesslich die Gleichung

$$\chi^8\left(\frac{-1+z}{2}\right) = \chi^8\left(-\frac{2}{1+z}\right)$$

aus welcher auf

$$\chi\left(\frac{-1+z}{2}\right) = \chi\left(-\frac{2}{1+z}\right)$$

geschlossen werden kann und somit existirt in diesem Falle für z die Gleichung

$$\frac{-1+z}{2} = -\frac{2}{1+z}$$

Aus dieser findet man

$$z = i\sqrt{3}$$

Nach Seite 367 ist

$$A = \frac{1}{2\pi\sqrt{3}} \cdot \Gamma^3\left(\tfrac{1}{3}\right)$$

und da andererseits auch

Digitized by Google

$$A = \frac{2^{\frac{4}{3}}}{3^{\frac{1}{4}}} K'$$

ist, so lässt sich $\Gamma(\frac{1}{3})$ durch

$$\Gamma^3(\tfrac{1}{3}) = \frac{2^{\frac{7}{3}}}{3^{\frac{1}{4}}} \cdot \pi K'$$

darstellen. Nun ist aber bekanntlich

$$\sqrt{\frac{2K}{\pi}} = 1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \ldots; \quad q = e^{i\pi z}$$

$$= 1 + 2 \cdot \sum_1^\infty \left(e^{-\pi\sqrt{3}} \right)^{n^2}$$

$$= 1 + 2e^{-\pi\sqrt{3}} + 2e^{-4\pi\sqrt{3}} + 2e^{-9\pi\sqrt{3}} + \ldots$$

also

$$2K' = \pi \left(1 + 2 \cdot \sum_1^\infty q^{n^2} \right)^2, \quad q = e^{-\pi\sqrt{3}}$$

somit

$$\Gamma^3(\tfrac{1}{3}) = \frac{2^{\frac{4}{3}} \cdot \pi^2}{3^{\frac{1}{4}}} \cdot \left(1 + 2 \cdot \sum_1^\infty q^n \right)^2$$

und für $\Gamma(\frac{1}{3})$ erhält man schliesslich die Form

$$\Gamma(\tfrac{1}{3}) = \frac{2^{\frac{4}{9}} \cdot \pi^{\frac{2}{3}}}{3^{\frac{1}{2}}} \cdot \left(1 + 2 \cdot \sum_1^\infty q^{n^2} \right)^{2/3}$$

Ich gehe nun über zur Berechnung der elliptischen Functionen

Digitized by Google

S, C und D der Argumente $\frac{K}{3}$ und $\frac{F}{3}$ und gehe dabei von dem Integrale

$$B = \int_0^1 (1+x^3)^{-2/3} dx$$

aus. Ersetzt man hier zuerst x durch $-x$ und lässt darauf die Substitution

$$x^3 = t$$

folgen, so erhält man

$$B = \tfrac{1}{3} \int_{-1}^{0} (1-t)^{-2/3} . t^{-2/3} dt$$

Ferner ist

$$A = \tfrac{1}{3} \int_0^1 (1-t)^{-2/3} t^{-2/3} dt$$

und da die beiden Integrale

$$\tfrac{1}{3} \int_0^{\frac{1}{2}} (1-t)^{-2/3} t^{-2/3} dt \quad \text{und} \quad \tfrac{1}{3} \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)^{-2/3} t^{-2/3} dt$$

einander gleich sind, was durch die Substitution

$$t = 1 - t_1$$

leicht bewiesen werden kann, so wird das Integral A im Punkte

$$t = \tfrac{1}{2}$$

halbirt und vermöge der Relation

$$2B = A$$

ist ein solches Integral gleich B. Wir haben daher

$$A + B = 3B = \tfrac{1}{3} \int_{-1}^{1} (1-t)^{-2/3} t^{-2/3} dt$$

Digitized by Google

Dieses Integral wird daher in den Punkten 0 und $\frac{1}{2}$ in drei gleiche Teile geteilt. Die Substitution

$$t = \frac{p-1}{p+1}$$

führt dasselbe in

$$3B = \frac{1}{2^{\frac{3}{3}}} \int_0^\infty (p^2-1)^{-2/3}\, dp$$

über mit den Teilungspunkten 1 und 3. Setzt man hier wieder

$$p^2 = 1 + t^3$$

so liefert diese Substitution

$$3B = \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}} \int_{-1}^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{1+t^3}}$$

und die Teilungspunkte liegen in 0 und 2. Um dieses Integral in die Normalform der elliptischen Integrale überzuführen, wende man die aus früherem bekannte Substitution

$$y = \frac{t+1-\sqrt{3}}{t+1+\sqrt{3}}$$

an. Nach derselben hat man daher die Variable t durch

$$\left(-1+\sqrt{3}\,.\,\frac{1+y}{1-y}\right)$$

zu ersetzen und erhält so

$$3B = \frac{1}{2^{\frac{3}{1}}} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{1}{3^{\frac{4}{(1+\sqrt{3})}}} \cdot \int_{-1}^{+1} \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)((2-\sqrt{3})^2+y^2)}}$$

Dis neuen Teilungspunkte liegen nun in $(-2+\sqrt{3})$ und $(2-\sqrt{3})$. Der erste ist neg. und liegt ebenso weit westlich von 0 wie der andere östlich von 0. Denkt man sich die Wegesrichtung umgekehrt, wodurch die Teilungspunkte nach $(2-\sqrt{3})$ und $(-2+\sqrt{3})$ verlegt werden, und

Digitized by Google

$$y = \sqrt{1 - S^2(x)}$$

so erhält man nach Seite 373 und 374

$$3B = \frac{1}{2^{\frac{3}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{4}}} \int \frac{dS}{\sqrt{(1-S^2)\left(1 - \frac{2+\sqrt{3}}{4} \cdot S^2\right)}}$$

mit dem dort näher angegebenen Integrationswege. Da der Wert dieses Integrales $2K$ ist, und der erste Teilungspunkt in $3^{1/4}(\sqrt{3}-1)$ liegt, so ist

$$S\left(\frac{2K}{3}\right) = 3^{\frac{1}{4}}(\sqrt{3} - 1)$$

$$k^2 = \frac{2+\sqrt{3}}{4}, \qquad k = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

Aus diesem Werte für $S\left(\frac{2K}{3}\right)$ lassen sich nun diejenigen für $C\left(\frac{2K}{3}\right)$ und $D\left(\frac{2K}{3}\right)$ leicht ableiten und da der erste Teilungspunkt im ersten Blatte zwischen 0 und 1 liegt, so sind dieselben reell und pos. So erhält man

$$C\left(\frac{2K}{3}\right) = 2 - \sqrt{3}; \quad D\left(\frac{2K}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

Setzt man nun in den bekannten Formeln

$$S(K-x) = \frac{C(x)}{D(x)}, \quad C(K-x) = \frac{lS(x)}{D(x)}$$

$$D(K-x) = \frac{l}{D(x)}$$

für das Argument x den Wert $\frac{2K}{3}$, so erhält man

$$S\left(\frac{K}{3}\right) = \sqrt{3} - 1; \quad C\left(\frac{K}{3}\right) = \frac{2^{1/2} \cdot 3^{1/4}}{2} \cdot (\sqrt{3} - 1)$$

$$D\left(\frac{K}{3}\right) = \tfrac{1}{2} \cdot \sqrt{2}$$

und mittelst der Formeln

Digitized by Google

$$S(2x) = \frac{2S \cdot C \cdot D}{1 - k^2 S^4}, \quad C(2x) = \frac{C^2 - S^2 D^2}{1 - k^2 S^4}$$

$$D(2x) = \frac{D^2 - k^2 S^2 C^2}{1 - k^2 S^4}$$

findet man die oben gefundenen Werte bestätigt.

Wir haben ferner gefunden, dass

$$K\left(k = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}\right) = -iL'\left(k = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\right)$$

ist, und aus dieser Gleichung ergeben sich sofort die Werte für S', C' und D' vom Argument $\frac{2L'}{3}$. Man findet

$$S'\left(\frac{2L}{3}\right) = S\left(i\frac{2K}{3}\right) = i\frac{S\left(\frac{2K}{3}\right)}{C\left(\frac{2K}{3}\right)} = i \cdot 3^{1/4}(\sqrt{3}+1)$$

$$C'\left(\frac{2L}{3}\right) = C\left(i\frac{2K}{3}\right) = \frac{1}{C\left(\frac{2K}{3}\right)} = 2+\sqrt{3};$$

$$D'\left(\frac{2L}{3}\right) = D\left(i\frac{2K}{3}\right) = \frac{D\left(\frac{2K}{3}\right)}{C\left(\frac{2K}{3}\right)} = \tfrac{1}{2}\cdot(\sqrt{3}+1)$$

Mittelst der Gleichungen

$$S(L-x) = -\frac{1}{k(S(x)}, \quad C(L-x) = i\frac{D(x)}{kS)x)}$$

$$D(L-x) = i\frac{C(x)}{S(-)}$$

findet man

$$S'\left(\frac{L}{3}\right) = i\sqrt{2}\cdot 3^{-1/4}; \quad C'\left(\frac{L}{3}\right) = \frac{3^{-1/4}}{2^{1/2}}(\sqrt{3}+1)$$

$$D'\left(\frac{L}{3}\right) = \tfrac{3}{2}^{-1/4}(\sqrt{3}+1)$$

Digitized by Google

Die oben für S', C', D' vom Argumente $\frac{2L}{3}$ gefundenen Werte lassen sich auch aus dem Integralausdrucke ableiten, der auf Seite 384 für $3B$ angegeben wurde, und dessen erster Teilungspunkt in $3^{1/4}(\sqrt{3}-1)$ liegt. Setzt man dort

$$S = i\frac{S_1}{C_1}$$

so resultirt für $3B$ das Integral

$$3B = \frac{-i}{2^{\frac{2}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{4}}} \int \frac{dS}{\sqrt{(1-S^2)\left(1-\frac{2-\sqrt{3}}{4}S^2\right)}}$$

Da in demselben die Variable S von 0 aus die ganze laterale Axe in pos. Richtung durchläuft, so ist der Wert desselben $2L'$ und da der erste Teilungspunkt in $i\,3^{1/4}(\sqrt{3}+1)$ liegt, so hat man sofort

$$S'\left(\frac{2L}{3}\right) = i\,3^{1/4}(\sqrt{3}+1), \quad \text{etc.}$$

Die Werte für S', C' und D' vom Argumente $\frac{2K}{3}$ sollen nun hier mittelst Auflösung einer Gleichung 4. Grades gefunden werden. Bekanntlich ist

$$S(3x) = \frac{S(2x)\,.\,C(x)\,.\,D(x) + C(2x)\,.\,D(2x)\,.\,S(x)}{1-k^2S^2(2x)\,.\,S^2(x)}$$

ich werde fortan das einfache Argument x nicht mehr schreiben. Die mit $(1-k^2S^4)^2$ multiplicirten Zähler und Nenner des vorliegenden Bruches seien mit Z und N bezeichnet. Dann ist

$$\begin{aligned}\frac{Z}{S} &= 2C^2D^2(1-k^2S^4) + (C^2-S^2D^2)(D^2-k^2S^2C^2)\\ &= 2(1-k^2S^4)(1-(1+k^2)S^2+k^2S^4) + (1-2S^2+k^2S^4)\\ &\quad \times (1-2k^2S^2+k^2S^4)\\ &= 3-4(1+k^2)S^2+6k^2S^4-k^4S^8\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}N &= (1-k^2S^4)^2 - 4k^2S^4C^2D^2\\ &= 1-6k^2S^4+4k^2(1+k^2)S^6-3k^4S^8\end{aligned}$$

Wenn

$$S(3x) = a$$

als gegeben

Digitized by Google

$$S(x) = S$$

als unbekannt betrachtet wird, so hat man die Gleichung 9. Grades

$$k^4 S^9 - 3k^4 a S^8 + 4k^2(1+k^2)a S^6 - 6k^2 S^5 - 6k^2 a S^4 + 4(1+k^2)S^3 - 3S + a = 0$$

aufzulösen. Im gegenwärtigen Falle, wo

$$3x = 2L$$

ist $a = 0$; die Wurzel $S = 0$ versteht sich von selbst. In Bezug auf die Unbekannte S^2 hat man also nur die Gleichung 4. Grades

$$k^4 S^8 - 6k^2 S^4 + 4(1+k^2) S^2 - 3 = 0$$

aufzulösen, deren Wurzeln

$$S^2\left(\frac{2L}{3}\right),\quad S^2\left(\frac{2K}{3}\right),\quad S^2\left(\frac{2K+2L}{3}\right),\quad S^2\left(\frac{2K-2L}{3}\right)$$

sind. Die zwei ersten sind reell, die letzten zwei imaginär und conjugirt. Für

$$k^2 = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$$

ist die Wurzel $-2\sqrt{3}\,(2+\sqrt{3})$ schon bekannt Die übrigen sollen nun durch Absonderung der schon bekannten Wurzel gefunden werden. Wenn also

$$k = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}},\quad x = \frac{2K}{3},\ \frac{2L}{3},\ \frac{2K+2L}{3},\ \frac{2K-2L}{3}$$

so sind

$$z = k^2 S^2(x)$$

die 4 Wurzeln der Gleichung

$$z^4 - 6k^2 z^3 + 4k^2(1+k^2)z - 3k^4 = 0$$

die aber für

$$k^2 = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$$

die Gestalt

$$z^4 - \frac{3}{2}(2-\sqrt{3})z^3 + \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot(5\sqrt{3}-8)z - \frac{3}{16}(7-4\sqrt{3}) = 0$$

annimmt. Eine Wurzel

$$z = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Digitized by Google

nämlich $k^2 S^2\left(\frac{2L}{3}\right)$ ist schon bekannt. Dividirt man die linke Seite der Gleichung durch $z+\frac{\sqrt{3}}{2}$, so kommt

$$z^3-\frac{\sqrt{3}}{2}z^2+\frac{3\sqrt{3}}{4}\cdot(2-\sqrt{3})z-\frac{\sqrt{3}}{8}\cdot(2-\sqrt{3})^2=0$$

heraus. Setzt man hier, um den nachhöchsten Term wegzuschaffen,

$$z=\frac{p+1}{2\sqrt{3}}$$

so resultirt die Gleichung

$$p^3=-6(3\sqrt{3}-5)p-2(27\sqrt{3}-46)$$

Wenn nun hier

$$p=q+\delta$$

gesetzt wird, und

$$\varrho=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$$

bedeutet, so lassen sich die 3 Wurzeln dieser Gleichung bekanntlich durch die Ausdrücke $(q+\delta)$; $(q\varrho+\delta\varrho^2)$; $(q\varrho^2+\delta\varrho)$ darstellen. Ferner ist

$$q\delta=-2(3\sqrt{3}-5)$$

$$\frac{q^6+\delta^6}{2}=-(27\sqrt{3}-46)$$

$$\left(\frac{q^6-\delta^6}{2}\right)^2=(27\sqrt{3}-46)^2+8(3\sqrt{3}-5)^3$$
$$=(2-\sqrt{3})^2[(8\sqrt{3}-11)^2+16(11\sqrt{3}-19)]$$
$$=9(2-\sqrt{3})^2$$

daher ist

$$\frac{\delta^6-q^6}{2}=3(2-\sqrt{3})$$

und also

$$\delta^3=(2-\sqrt{3})\cdot 2(7-4\sqrt{3})=2(2-\sqrt{3})^3$$

$$q^3=-8(2-\sqrt{3})(\sqrt{3}-1)=-4(\sqrt{3}-1)^3$$

folglich

$$\delta=(2-\sqrt{3})2^{1/3};\quad q=-(\sqrt{3}-1)2^{2/3}$$

Es ist daher

Digitized by Google

$$k^2 S^2\left(\frac{2K}{3}\right) = \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot (1+(2-\sqrt{3})2^{1/3}-(\sqrt{3}-1)2^{2/3})$$

und wenn man hier beide Seiten mit

$$k^2 = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$$

dividirt, so folgt

$$S^2\left(\frac{2K}{3}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}(2+\sqrt{3}+2^{1/3}-(\sqrt{3}+1)2^{2/3}]$$
$$- \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot ((\sqrt{3}+1)^2 - 2(\sqrt{3}+1)2^{2/3}+2^{4/3})$$

und für $S\left(\frac{2K}{3}\right)$ erhält man schliesslich den Ausdruck

$$S'\left(\frac{2K}{3}\right) = \frac{1}{3^{1/4}}(\sqrt{3}+1-2^{2/3})$$

Obschon ich später von den beiden imaginären Wurzeln keinen Gebrauch machen will, so will ich doch der Vollständigkeit halber diese noch darstellen. Es ist

$$k^2 S^2\left(\frac{2K+2L}{3}\right) = \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot [1+2^{1/3}(2-\sqrt{3})\varrho - 2^{2/3}(\sqrt{3}-1)\varrho^2]$$

und daher

$$S^2\left(\frac{2K+2L}{3}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}[2+\sqrt{3}+\varrho \cdot 2^{1/3} - \varrho^2(\sqrt{3}+1)2^{2/3}]$$
$$= \frac{1}{\sqrt{3}}[(1+\sqrt{3})^2 + \varrho^4 2^{4/3} - 2\varrho^2(\sqrt{3}+1)2^{2/3}]$$

folglich

$$S'\left(\frac{2K+2L}{3}\right) = \frac{1}{3^{1/4} \cdot 2}[2(\sqrt{3}+1)+(1+i\sqrt{3})2^{2/3}]$$

Ebenso ist

$$S'\left(\frac{2K-2L}{3}\right) = \frac{1}{3^{1/4} \cdot 2}[2(\sqrt{3}+1)+(1-i\sqrt{3})2^{2/3}]$$

Es liegt mir nun daran, die Gleichung 4. Grades

$$z^4 - 6k^2z^3 + 4k^2(1+k^2)z - 3k^4 = 0$$

deren Elemente

$$a = 1, \quad b = 0. \quad c = -k^2, \quad d = k^2(1+k^2), \quad e = -3k^4$$

sind, ohne Absonderung der bekannten Wurzel aufzulösen. Die zwei Invarianten sind

$$I = ae - 4bd + 3c^2 = 0$$
$$\Delta = ace + 2bcd - ad^2 - b^2e - c^3 = -k^4 l^4$$

Bedeuten nun α, β, γ, δ die 4 Wurzeln der Gleichung 4. Grades und wird

$$t = \alpha + \beta; \quad t_{'} = \alpha + \gamma: \quad t_{''} = \alpha + \delta$$

gesetzt, so hat man

$$t t_{'} t_{''} = -4k^2(1+k^2)$$

und

$$(t^2 - 4k^2)^3 = (2kl)^4$$

Im vorliegenden Falle ist nun aber

$$k = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}, \quad l = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

also

$$2kl = \tfrac{1}{2}, \quad t t_{'} t_{''} = -\frac{\sqrt{3}}{4}(5\sqrt{3} - 8)$$

und

$$t^2 = 2 - \sqrt{3} + \tfrac{1}{4}2^{2/3}; \quad t_{'}^2 = 2 - \sqrt{3} + \tfrac{1}{4}\varrho\, 2^{2/3}$$

$$t_{''}^2 = 2 - \sqrt{3} + \tfrac{1}{4}\varrho^2 2^{2/3}; \quad \varrho = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$$

Setzt man abkürzend

$$\lambda^3 = 2: \quad \lambda_{'} = \varrho\lambda; \quad \lambda_{''} = \varrho^2\lambda,$$

so lassen sich die Wurzelquadrate t^2 auf folgende Weise darstellen:

$$4t^2 = 4(2 - \sqrt{3}) + \lambda^2$$
$$4t_{'}^2 = 4(2 - \sqrt{3}) + \lambda_{'}^2$$
$$4t_{''}^2 = 4(2 - \sqrt{3}) + \lambda_{''}^2$$

Da nun die Wurzeln α, β, γ, δ durch die Gleichungen

Digitized by Google

$$\alpha = \tfrac{1}{2}(\ \ t+t_{,}+t_{,,}); \quad \beta = \tfrac{1}{2}(+t-t_{,}-t_{,,})$$
$$\gamma = \tfrac{1}{2}(-t+t_{,}-t_{,,}); \quad \delta = \tfrac{1}{2}(-t-t_{,}+t_{,,})$$

bestimmt werden, so entsteht nun die Aufgabe, aus den für die Wurzeln t^2 etc angegebenen Ausdrücken die Quadratwurzel auszuziehen. Wenn allgemein in dem Ausdrucke $(a+b\lambda+c\lambda^2)$ die Elemente a, b und c rationale Functionen einer Quadratwurzel wie $\sqrt{3}$ mit ganzzahligen Coefficienten bezeichnen und wo

$$\lambda^3 = m$$

eine ganze Zahl, die kein Kubus ist, bedeutet, so heisst man das Product

$$(a+b\lambda+c\lambda^2)(a+b\lambda_{,}+c\lambda_{,}^2)(a+b\lambda_{,}+c\lambda_{,,}^2)$$

die Norm jedes der drei Factoren. Hier ist sie

$$a^3+mb^3+m^2c^3-3mabc$$

und da das Product der zwei letzten Factoren

$$a^2-mbc+(mc^2-ab)\lambda+(b^3-ac)\lambda^2$$

ist, so hat man

$$\frac{1}{a+b\lambda+c\lambda^2} = \frac{a^2-mbc+(mc^2-ab)\lambda+(b^2-ac)\lambda^2}{a^3+mb^3+m^2c^3-3mabc}$$

und diese Gleichung dient zur Wegschaffung eines mit der Kubikwurzel behafteten Nenners. Soll nun allgemein aus dem Ausdrucke $(a+b\lambda+c\lambda^2)$ die Quadratwurzel in ähnlicher Form ausgezogen werden können, so muss die Norm sich als Quadrat darstellen lassen; denn die Norm eines Quadrates ist das Quadrat der Norm seiner Wurzeln. Ich will nun hier die frühere Bedeutung der Elemente α, β, γ δ fallen lassen und anders verwenden. Es sei nun

$$(\alpha+\beta\lambda+\gamma\lambda^2)^2 = a+b\lambda+c\lambda^2$$

wo a, b, c gegeben sind und α, β, γ gesucht werden müssen. Dann haben die Unbekannten α, β, γ den drei Bedingungen

$$\begin{aligned} \alpha^2+2m\beta\gamma &= a \\ m\gamma^2+2\alpha\beta &= c \\ \beta^2+2\alpha\gamma &= b \end{aligned}$$

zu genügen und eine vierte Gleichung

$$(\alpha^3+m\beta^3+m\gamma^3-3m\alpha\beta\gamma)^2 = a^3+mb^3+m^2c^3-3mabc$$

Digitized by Google

ist nur eine notwendige Folge derselben. Das System der drei ersten Gleichungen hat

$$2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$$

Lösungen; aber je zwei derselben unterscheiden sich nur wie (α, β, γ), $(-\alpha, -\beta, -\gamma)$. Man kann also die Aufgabe auf eine Gleichung 4. Grades zurückführen. Ich habe es vorteilhaft gefunden, nur homogene Gleichungen anzuwenden und daher das System zunächst auf zwei solche Gleichungen wie

$$a(m\gamma^2 + 2\alpha\beta) - c(\alpha^2 + 2m\beta\gamma) = 0$$
$$a(\beta^2 + 2\alpha\beta) - b(\alpha^2 + 2m\beta\gamma) = 0$$

beschränkt. Die zweite z. B. ist, in Bezug auf γ linear; mittelst ihrer kann man γ aus der ersten Gleichung eliminiren und bekommt eine homogene Gleichung 4. Grades zwischen α und β. Setzt man

$$\frac{\alpha}{\beta} = \varepsilon$$

und hat einen Wert von ε gefunden, der nicht mit der Kubikwurzel λ zusammengesetzt ist, so geben die drei ersten Gleichungen den Wert von α^2, und wenn man über das Vorzeichen der Norm

$$\sqrt{a^3 + mb^3 + m^2c^3 - 3mabc}$$

der gesuchten Quadratwurzel schon verfügt hat, so entscheidet die 4. Gleichung

$$\alpha^3 + m\beta^3 + m^2\gamma^3 - 3m\alpha\beta\gamma = \sqrt{a^3 + mb^3 + m^2c^3 - 3mabc}$$

über das Vorzeichen von α. Die Norm von $4(2 - \sqrt{3}) + \lambda^2$ ist

$$4^3(2 - \sqrt{3})^3 + 4 \cdot 1 = 2^2 \cdot 3 \cdot (64 - 80\sqrt{3} + 75)$$
$$= 2^2 \cdot 3 \cdot (8 - 5\sqrt{3})^2$$

und lässt sich somit als Quadrat von $-2\sqrt{3}(5\sqrt{3} - 8)$ darstellen. Man versuche nun

$$\iota = \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta\lambda + \gamma\lambda^2)$$

wo

$$\lambda^3 = 2$$

zu setzen. Dann ist

$$(\alpha + \beta\lambda + \gamma\lambda^2)^2 = 4(2 - \sqrt{3}) + 2^{2/3}$$

und diese Gleichung gibt für die Unbekannten α, β, γ die Bedingungsgleichungen

Digitized by Google

1) $\alpha^2+4\beta\gamma = 4(2-\sqrt{3})$

2) $\gamma^2+\alpha\beta = 0$

3) $\beta^2+2\alpha\gamma = 1$

4) $\alpha^3+2\beta^3+4\gamma^3-6\alpha\beta\gamma = -2\sqrt{3}\ (5\sqrt{3}-8)$

Vermöge der 2. Gleichung kann man

$$\gamma = \varepsilon\alpha; \quad \beta = -\varepsilon^2\alpha$$

setzen; dann werden die übrigen Gleichungen

$$\alpha^2(1-4\varepsilon^3) = 4(2-\sqrt{3})$$

$$\alpha^2(\varepsilon^4+2\varepsilon) = 1$$

$$\alpha^3(2\varepsilon^6-10\varepsilon^3-1) = 2\sqrt{3}\,(5\sqrt{3}-8)$$

Multiplicirt man die erste von diesen Gleichungen mit $-(2+\sqrt{3})$, die zweite mit 4, addirt und dividirt mit α^3, so gewinnt man die Gleichung

$$4\varepsilon^4+4(2+\sqrt{3})\,\varepsilon^3+8\varepsilon-(2+\sqrt{3}) = 0$$

Die Wurzeln dieser Gleichung sind

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{3}-1}{2}; \quad -\left[\frac{\sqrt{3}+1}{2}(1+\lambda)+\tfrac{1}{2}\lambda^2\right]$$

$$-\left[\frac{\sqrt{3}+1}{2}(1+\lambda_{,})+\tfrac{1}{2}\lambda_{,}^2\right]; \quad -\left[\frac{\sqrt{3}+1}{2}(1+\lambda_{,,})+\tfrac{1}{2}\lambda_{,,}^3\right]$$

Nur

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

ist zu gebrauchen und gibt

$$\alpha^2 = \frac{4}{3}, \quad \alpha^3 = -\frac{8}{3\sqrt{3}}$$

also

$$\alpha = -\frac{2}{\sqrt{3}}, \quad \beta = \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

Digitized by Google

$$\gamma = -\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}$$

Daher ist auch

$$t = \frac{1}{2\sqrt{3}}\left[-2+(2-\sqrt{3})\lambda-(\sqrt{3}-1)\lambda^2\right]$$

$$t_{'} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\left[-2+(2-\sqrt{3})\lambda_{'}-(\sqrt{3}-1)\lambda_{'}^2\right]$$

$$t_{''} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\left[-2+(3-\sqrt{3})\lambda_{''}-(\sqrt{3}-1)\lambda_{''}^2\right]$$

Nun ist bekanntlich

$$k^3 S\left(\frac{2L}{3}\right) = \tfrac{1}{2}(t+t_{'}+t_{''})$$

$$k^3 S^2\left(\frac{2K}{3}\right) = \tfrac{1}{2}(t-t_{'}-t_{''})$$

$$k^3 S^2\left(\frac{2K+2L}{3}\right) = \tfrac{1}{2}(-t+t_{'}-t_{''})$$

$$k^3 S^2\left(\frac{2K-2L}{3}\right) = \tfrac{1}{2}(-t-t_{'}+t_{''})$$

und weil

$$\lambda+\lambda_{'}+\lambda_{''}=0,\quad \lambda^2+\lambda_{'}^2+\lambda_{''}^2=0$$

so hat man

$$k^3 S^2\left(\frac{2L}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

und folglich

$$S^2\left(\frac{2L}{3}\right) = -\sqrt{3}\,(\sqrt{3}+1)^2$$

somit ist

$$S\left(\frac{2L}{3}\right) = i\,.\,3^{1/4}\,(\sqrt{3}+1)$$

was wir schon früher gefunden haben. Man findet ferner

$$k^3 S^2\left(\frac{2K}{3}\right) = \frac{1}{2\sqrt{3}}\left[1+(2-\sqrt{3})2^{1/3}-(\sqrt{3}-1)2^{2/3}\right]$$

Digitized by Google

wird nun auf beiden Seiten mit

$$k^2 = \frac{2 - \sqrt{3}}{4}$$

dividirt, so folgt

$$S^2\left(\frac{2K}{3}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left[(\sqrt{3}+1)^2 - 2(\sqrt{3}+1)2^{2/3} + 2^{4/3}\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{3}+1-2^{2/3}\right)^2$$

und somit ist

$$S'\left(\frac{2K}{3}\right) = \frac{1}{3^{1/4}}\left(\sqrt{3}+1-2^{2/3}\right)$$

Um $C'\left(\frac{2K}{3}\right)$ zu bestimmen, setze man

$$C'^2\left(\frac{2K}{3}\right) = 1 - S'^2\left(\frac{2K}{3}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{3} - (\sqrt{3}+1)z + 2(\sqrt{3}+1)\cdot 2^{2/3} - 2^{4/3}\right)$$

$$= \tfrac{1}{3}\left[(-1)^2 + ((\sqrt{3}+1)2^{1/3})^2 + (-2^{2/3})^2 - 2\cdot 2^{1/3}(\sqrt{3}+1) + 2\cdot 2^{1/3} - 2(\sqrt{3}+1)2^{1/3}\cdot 2^{2/3}\right]$$

$$= \tfrac{1}{3}\left(-1 + (\sqrt{3}+1)\cdot 2^{1/3} - 2^{2/3}\right]^2$$

Zieht man nun die Quadratwurzel aus, so erhält man für $C'\left(\frac{2K}{3}\right)$ den Ausdruck

$$C'\left(\frac{2K}{3}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\left[-1 + (\sqrt{3}+1)2^{1/3} - 2^{2/3}\right]$$

Nun soll auch noch $D\left(\frac{2K}{3}\right)$ berechnet werden. Es ist

$$D^2\left(\frac{2K}{3}\right) = \frac{1}{2\sqrt{3}}\left[2\sqrt{3} - 1 - (2-\sqrt{3})2^{1/3} + (\sqrt{3}-1)2^{2/3}\right]$$

Digitized by Google

$$= \frac{1}{(2\sqrt{3})^2} - [(\sqrt{3}-1)^2 + (2 \cdot 2^{1/3})^2 - (2(\sqrt{3}-1)2 \cdot 2^{1/3}$$

$$- 2(\sqrt{3}-1)2^{2/3} + 2 \cdot (2 \cdot 2^{1/2} \cdot 2^{2/3}]$$

$$= \frac{1}{(2\sqrt{3})^3}[-(\sqrt{3}-1) + 2 \cdot 2^{1/3} + 2^{3/3}]^2$$

und daher

$$D'\left(\frac{2K}{3}\right) = \frac{1}{2\sqrt{3}}[-(\sqrt{3}-1) + 2 \cdot 2^{1/3} + 2^{2/3}]$$

Zur Berechnung von S', C' und D' vom Argumente $\frac{K}{3}$ wende man die bekannten Relationen für $S(K-x)$, $C(K-x)$ und $D(K-x)$ an, wie sie auf Seite 384 angegeben sind, und ersetze in denselben das Argument x durch $\frac{2K}{3}$. Man findet so

$$S'\left(\frac{K}{3}\right) = \frac{2(-1+(\sqrt{3}+1) \cdot 2^{1/3} - 2^{2/3})}{-(\sqrt{3}-1) + 2 \cdot 2^{1/3} + 2^{2/3}}$$

um den irrationalen Nenner wegzuschaffen, halte ich mich an die auf Seite 391 angegebene allgemeine Verwandlungsformel und setze

$$a = -(\sqrt{3}-1); \quad b = 2; \quad c = 1; \quad m = 2$$

dann ist

$$a^3 + mb^3 + m^2c^3 - 3mabc = 6(\sqrt{3}+3)$$

$$a^2 - mbc + (mc^2 - ab)\lambda + (b^2 - ac)\lambda^2$$

$$= -2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} \cdot 2^{1/3} + (3+\sqrt{3}) \cdot 2^{2/3}$$

folglich

$$\frac{1}{-(\sqrt{3}-1) + 2 \cdot 2^{1/3} + 2^{2/3}}$$

$$= \frac{-2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} \cdot 2^{1/3} + (3+\sqrt{3}) \cdot 2^{2/3}}{6(\sqrt{3}+3)}$$

Wird nun dieser Wert in $S'\left(\frac{K}{3}\right)$ substituirt, so erhält man nach mehrfachen Reductionen für $S\left(\frac{K}{3}\right)$ schliesslich den Ausdruck

Digitized by Google

$$S'\left(\begin{matrix}K\\3\end{matrix}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left[(\sqrt{3}+1) - (\sqrt{3}+1)\,2^{1/3} + 2^{2/3}\right.$$

Auch ist

$$C'\left(\begin{matrix}K\\3\end{matrix}\right) = \frac{\sqrt{3}+1}{2^{1/3}\,.\,3^{1/4}}\,.\,(-1+2^{2/3})$$

und

$$D'\left(\begin{matrix}K\\3\end{matrix}\right) = \frac{1}{\sqrt{6}}\left[-1+2^{1/3}+\tfrac{1}{3}(\sqrt{3}+1)\,.\,2^{2/3}\right]$$

Digitized by Google

XIV.

Bezirke der drei Wurzelformen der Gleichung 4. Grades.

Von

R. Hoppe.

Eine Gleichung 4. Grades mit reellen Coefficienten hat keine oder zwei oder vier reelle Wurzeln. Lässt man also alle Coefficienten alle reellen Werte durchlaufen und jede Gleichung durch ein Coefficientenwertsystem vertreten sein, so teilt sich die Gesamtheit aller möglichen Gleichungen in 3 Bezirke, W_0, W_2, W_4, innerhalb deren die 3 genannten Wurzelformen ausschliessend statthaben.

Die ursprünglich gegebene vierfache Mannigfaltigkeit des Coefficientensystems würde offenbar keine übersichtliche Darstellung seiner Bezirke zulassen. Eine vorausgehende lineare Substitution für die Unbekannte reducirt dieselbe auf eine zweifache, indem sie den Coefficienten der 3 Potenz zu null, den der ersten zu 1 macht. Dadurch wird freilich der Fall ausgeschlossen, wo beide zugleich null werden. Doch hat dieser keine Bedeutung, weil hier die Gleichung quadratisch wird. Rücksichtlich seines Angrenzens wollen wir ihn später besonders zuziehen. Wir betrachten demnach

$$x^4 + ax^2 + x + b = 0 \qquad (1)$$

als die allgemeine Gleichung 4. Grades. Ihre Variation lässt sich dann in der Ebene darstellen, indem man a und b als Coordinaten eines Punktes auffasst.

Digitized by Google

Der stetige Uebergang eines conjugirten Wurzelpares in ein reelles u. umgek. ist nun bloss möglich durch das Gleichwerden zweier Wurzeln. Folglich resultirt die allgemeine Gleichung aller Grenzen der 3 Formenbezirke durch Elimination von x zwischen der Gl. (1) und ihrer Derivirten. Die Elimination führt auf die Gleichung

$$EG - F^2 = 0, \quad \text{wo} \tag{2}$$

$$E = \begin{vmatrix} 2a & 3 \\ 6 & 2(4b - a^2) \end{vmatrix}; \quad F = \begin{vmatrix} 2a & 4b \\ 6 & -a \end{vmatrix}$$

$$G = \begin{vmatrix} 3 & 4b \\ 2(4b - a^2) & -a \end{vmatrix}$$

Zur Vereinfachung führen wir jedoch statt der Parameter a, b zwei neue u, v ein, wo

$$a = \frac{3}{2} l \quad 8b = v + 3l^2; \quad l^3 = u - 1 \tag{3}$$

sei. Dann lautet die entwickelte Gl. (2):

$$v^3 + \frac{27}{4}(9 - u)lv + \frac{27}{4}(-27 + 18u + u^2) = 0 \tag{4}$$

und ihre cardanische Auflösung:

$$v = \frac{3}{2}\sqrt[3]{\left\{27 - 18u - u^2 + 8\sqrt{u^3}\right\}} + \frac{3}{2}\sqrt[3]{\left\{27 - 18u - u^2 - 8\sqrt{u^3}\right\}} \tag{5}$$

Diese hat 1 oder 3 reelle Werte, jenachdem u positiv oder negativ ist.

Sie wird durch eine Curve dargestellt, welche aus zwei getrennten Stücken $MNPQR$ und $STUV$ besteht. Die Figur zeigt einen endlichen Teil davon in der Nähe des Anfangs der uv, über die 4 Enden M, R, S, V fortzusetzen ins unendliche.

Das erstere Stück MR; die Linie A, geht vom Axenquadranten $(- +)$ bei N durch diese Axe in den Quadranten $(+ +)$, wo sie bei P die Verticale $u = 1$ berührt und daselbst einen Wendepunkt P hat, überschreitet dann die u Axe in Q und bleibt von da im Quadranten $(+ -)$.

Das letztere Stück SV, die Linie B, geht vom Quadranten $(- +)$ bei T durch die u Axe in den Quadranten $(- -)$, bis sie

Digitized by Google

die v Axe in U trifft. Vom Rückkehrpunkte U an, in umgekehrter Richtung beginnend, bleibt sie im Quadranten $(- -)$.

Die 3 Zweige NM, US, UV sind die Diagramme der 3 Werte v_1, v_2, v_3, welche jedem negativen u entsprechen. Setzt man zu ihrer Bestimmung

$$h = r\cos\varphi = 27 - 18u - u^2; \quad r\sin\varphi = 8\sqrt{-u^3}$$

also

$$r^2 = h^2 - 64u^3; \quad \cos\varphi = \frac{h}{r}$$

so wird

$$v_1 = 3\sqrt[3]{r}\cos\frac{\varphi}{3}; \quad v_2 = 3\sqrt[3]{r}\cos\frac{\varphi - 4\mathrm{R}}{3}; \quad v_3 = 3\sqrt[3]{r}\cos\frac{\varphi + 4\mathrm{R}}{3}$$

Hieraus ist zunächst ersichtlich, dass die 3 Curvenzweige keinen Punkt ausser U gemein haben können. Denn, wäre

$$0 = \cos\frac{\varphi + 4m\mathrm{R}}{3} - \cos\frac{\varphi + 4n\mathrm{R}}{3}$$

$$= 2\sin 2\frac{n-m}{3}\mathrm{R}\sin\left(\frac{\varphi}{3} + 2\frac{m+n}{3}\mathrm{R}\right)$$

und 3 nicht Teiler von $n - m$, so wäre

$$\frac{\varphi}{3} = \left(2k - 4\frac{m+n}{3}\right)\mathrm{R}; \quad \varphi = 2\{3k - 2(m+n)\}\mathrm{R}$$

mithin

$$\sin\varphi = \frac{8}{r}\sqrt{-u^3} = 0 \quad \text{also} \quad u = 0$$

Mit diesem Resultat ist erwiesen, dass die 2 nach beiden Seiten hin unbegrenzten Curven A und B die Ebene in 3 und nicht mehr Bezirke teilen.

In Betreff der erwähnten Punkte N, P, Q, T, U lassen sich leicht folgende nähere Bestimmungen gewinnen.

Gl. (5) ergibt sofort, dass, für $u = 0$, $v = 9$ wird, gültig für A, weil es noch dem von positiver Seite her verschwindenden u genügen muss. Da aber

$$v_1 + v_2 + v_3 = 0$$

ist, so folgt, dass

$$v_1 = 9; \quad v_2 = v_3 = -\frac{9}{2} \tag{6}$$

Hiermit sind die Ordinaten des Schnittpunkts N von A und der

Digitized by Google

v Axe und des Rückkehrpunktes U gefunden. Wir untersuchen indes auch die Winkel, unter denen A und B die v Axe treffen.

Sei

$$u = -\varepsilon \text{ unendlich klein}$$

dann wird bis zu 3. Ordnung

$$h = 27\left(1+\frac{2}{3}\varepsilon-\frac{1}{27}\varepsilon^2\right);\quad r = 27\left(1+\frac{2}{3}\varepsilon-\frac{1}{27}\varepsilon^2+\frac{32}{729}\varepsilon^3\right)$$

$$\cos\varphi = 1-\frac{32}{729}\varepsilon^3;\quad \varphi = \frac{8}{27}\sqrt{\varepsilon^3}$$

$$\cos\frac{\varphi}{3} = 1-\frac{32}{6561}\varepsilon^3;\quad \cos\frac{\varphi \mp 4R}{3} = -\tfrac{1}{2}\left(1\mp\frac{8}{27}\sqrt{\frac{\varepsilon^3}{3}}\right)$$

$$\sqrt[3]{r} = 3\left(1+\frac{2}{9}\varepsilon+\ldots\right)$$

$$v_1 = 9\left(1+\frac{2}{9}\varepsilon+\ldots\right);\quad v_2 = -\left(1+\frac{2}{9}\varepsilon-\frac{8}{27}\sqrt{\frac{\varepsilon^3}{3}}+\ldots\right)$$

$$v_3 = -\frac{9}{2}\left(1+\frac{2}{9}\varepsilon+\frac{8}{27}\sqrt{\frac{\varepsilon^3}{3}}+\ldots\right)$$

Subtrahirt man die Anfangswerte und dividirt durch $u = -\varepsilon$, so erhält man für N und U;

$$\left(\frac{\partial v}{\partial u}\right)_1 = -2;\quad \left(\frac{\partial v}{\partial u}\right)_2 = 1-\frac{4}{3}\sqrt{\frac{\varepsilon}{3}}\quad \left(\frac{\partial v}{\partial u}\right)_3 = 1+\frac{4}{3}\sqrt{\frac{\varepsilon}{3}}$$

wodurch die Tangentialrichtungen der Zweige MN, TU, VU bei ihrem Eintreffen in der v Axe, letztere 2 gleiche nebst ihren unterschiedlichen Variationen bestimmt sind.

Für $u = 1+\varepsilon$ wird nach der Formel

$$v = 3\sqrt[4]{2}\,(1-\sqrt[3]{2\varepsilon})$$

folglich ist in P

$$v = 3\sqrt[3]{2};\quad \frac{\partial v}{\partial u} = -3\sqrt[0]{\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)^2} = -\infty \qquad (7)$$

Demnach geht in P die Curve A vertical nach unten, unmittelbar

Digitized by Google

vor und nachher in gleicher Neigung nach unten, hat also hier einen Wendepunkt.

Die Abscissen der Schnittpunkte der u Axe müssen die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$h = 0$$

sein, weil der von v freie Term von Gl. (4) mit h verschwindet. Demnach ist, bzhw. für T und Q

$$u = -6\sqrt{3} - 9; \quad u = 6\sqrt{3} - 9 \tag{8}$$

Sei also

$$u = -6\sqrt{3} - 9 + \varepsilon = -\varkappa^2 + \varepsilon$$

dann wird

$$h = 12\sqrt{3} \cdot \varepsilon$$

und in 1. Ordnung

$$3 = 8\varkappa^3\left(1 - \frac{3\varepsilon}{2\varkappa^2}\right)$$

$$\cot\varphi = \frac{3\sqrt{3}\cdot\varepsilon}{2\varkappa^3}; \quad \varphi = R - \frac{3\sqrt{3}\cdot\varepsilon}{2\varkappa^3}$$

$$\cos\frac{\varphi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(1 + \frac{\varepsilon}{2\varkappa^3}\right); \quad \cos\frac{\varphi - 4R}{3} = -\frac{\sqrt{3}\cdot\varepsilon}{2\varkappa^3}$$

$$\sqrt[3]{r} = 2\varkappa\left(1 - \frac{\varepsilon}{2\varkappa^2}\right)$$

$$v_1 = 3\sqrt{3}\varkappa; \quad v_2 = -\frac{3\sqrt{3}\sqrt{\varepsilon}}{\varkappa_2}; \quad v_3 = -v_1$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial u}\right)_2 = -\frac{3\sqrt{3}}{\varkappa^2} = -(2 - \sqrt{3}) \text{ (Neigung des Zweiges } TU) \tag{9}$$

Sei ferner

$$u = 6\sqrt{3} - 9 + \varepsilon = \lambda^2 + \varepsilon$$

dann kommt:

$$h = -12\sqrt{3}\cdot\varepsilon$$

$$v = \frac{3}{2}\sqrt[3]{\{8\lambda^3 + 12(\lambda - \sqrt{3})\varepsilon\}} - \frac{3}{2}\sqrt[3]{\{8\lambda^3 + 12(\lambda + \sqrt{3})\varepsilon\}}$$

$$= 3\lambda\left\{\sqrt[3]{\left(1 + \frac{3}{2}\frac{\lambda - \sqrt{3}}{\lambda^2}\varepsilon\right)} - \sqrt[3]{\left(1 + \frac{3}{2}\frac{\lambda + \sqrt{3}}{\lambda^2}\varepsilon\right)}\right\}$$

$$= -\frac{3\sqrt{3}\varepsilon}{\lambda^2} = -(2 + \sqrt{3})\varepsilon$$

Digitized by Google

$$\frac{\partial v}{\partial u} = -(2+\sqrt{3}) \quad \text{(Neigung des Zweiges } QR\text{)} \tag{10}$$

Die 2 Curven teilen nun die unbegrenzte Ebene in 3 Bezirke, einen oberhalb A, einen zwischen A und B und einen innerhalb B. Jeder derselben muss einer besonderen Wurzelform der Gl. (1) entsprechen; es bleibt noch zu entscheiden, welcher? Hierzu genügt ein einziges Beispiel.

Die Gleichung

$$x^4 + x^2 + x + 1 = 0$$

hat offenbar keine reelle Wurzel. Die Coefficienten $a = 1$, $b = 1$ reduciren sich nach den Gl. (3) auf

$$u = \frac{35}{27}, \quad v = \frac{20}{3}$$

Da hier $u > 1$, $v > 3\sqrt[3]{2}$ ist, so liegt der Punkt (uv) oberhalb A; folglich ist oberhalb A der Bezirk W_0, zwischen A und B der Bezirk W_2 und innerhalb B der Bezirk W_4.

Zur Probe wollen wir das Beispiel

$$x^4 - \frac{21}{2}x^2 + x + \frac{21}{2} = (x-3)(x+1)\left(x+1-\frac{3}{\sqrt{2}}\right) \cdot \left(x+1+\frac{3}{\sqrt{2}}\right) = 0$$

mit 4 reellen Wurzeln hinzunehmen. Hier ergibt sich:

$$u = -342; \quad v = -63$$

Zu diesem u gehören auf beiden Zweigen von B die Werte:

$$v_2 = +8{,}087; \quad v_3 = -308{,}07$$

Demnach ist

$$v_2 > v > v_3$$

und der Punkt (uv) fällt in den Bezirk innerhalb B.

Mit Rücksicht auf den übergangenen Ausnahmefall, wo der Coefficient von x null ist, wollen wir noch das finale Verhalten der 4 unbegrenzten Curvenzweige betrachten. Sei also

$$u = \omega = \infty$$

dann wird

$$v = -3\sqrt[3]{\omega^3} \tag{11}$$

Sei ferner

$$u = -\omega$$

dann hat man:

Digitized by Google

$$h = -\omega^3\left(1-\frac{18}{\omega}\right);\quad r = \omega^3\left(1+\frac{14}{\omega}\right)$$

$$\cos\varphi = -\left(1-\frac{32}{\omega}\right);\quad \varphi = 2R - \frac{8}{\sqrt{\omega}}$$

$$\cos\frac{\varphi}{3} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{8}{\sqrt{3\omega}}\right);\quad \cos\frac{\varphi-4R}{3} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{8}{\sqrt{3\omega}}\right)$$

$$\cos\frac{\varphi+4R}{3} = -\left(1-\frac{32}{9\omega}\right);\quad \sqrt[3]{r} = \sqrt[3]{\omega^2}\left(1+\frac{14}{3\omega}\right)$$

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= \frac{3}{2}\sqrt[3]{\omega^2}\left(1+\frac{8}{\sqrt{3\omega}}\right);\quad v_2 = \frac{3}{2}\sqrt[3]{\omega^2}\left(1-\frac{8}{\sqrt{3\omega}}\right) \\ v_3 &= -3\sqrt[3]{\omega^2}\left(1+\frac{10}{9\omega}\right);\quad r_2 - v_3 = 8\sqrt{3}\sqrt[6]{\omega} \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

Geht man nun von der anfänglichen Transformation eines Schritt zurück und nimmt als gegebene Gleichung an

$$z^4 + cz^2 + \varepsilon^3 z + d = 0$$

so geht diese in Gl. (1) über für

$$z = \varepsilon x;\quad c = \varepsilon^2 a;\quad d = \varepsilon^4 b$$

und man hat:

$$u = \frac{8}{27}\frac{c^3}{\varepsilon^6} + 1;\quad v = \frac{4}{3}\frac{6d - c^2}{\varepsilon^4}$$

Bei verschwindendem ε werden u und $v = \infty$ und zwar in dem Verhältniss der dritten und zweiten Potenz, so dass nach den Gl. (11) (12) die Grenzcurven unverändert bleiben. Demnach bleiben selbst in dem unerreichten Falle $\varepsilon = 0$ diese Curven noch immer die Grenzen der 3 Wurzelformen: zwischen M und R gibt es keine, zwischen R und V und zwischen S und M zwei, und zwischen S und V vier reelle Wurzeln.

Digitized by Google

XV.

Die Amsler'schen Flächensätze im Gebiete affin veränderlicher Systeme und auf den Flächen constanter Gauss'scher Krümmung.

Von

Joh. Kleiber

in München.

Herr A. Amsler hat in seiner 1880 veröffentlichten Dissertation „Ueber den Flächeninhalt und das Volumen durch Bewegung erzeugter Curven und Flächen und über mechanische Integrationen" zunächst nur jene Flächenrelationen abgeleitet, welche sich an die Bewegung eines starren Systems im Raume bzhw. der Ebene knüpfen und zwar wol aus dem Grunde, weil selbe vollkommen ausreichend waren seine Polarplanimetertheorie in eleganter und conciser Fassung einzuführen. Es ist mir jedoch nicht bekannt, dass diese interessanten Sätze, welche ja doch aus einer sehr bekannten und allgemeineren Quelle fliessen, eingehender bezüglich ihrer Gültigkeit, besonders hinsichtlich veränderlicher, bewegter Systeme einerseits und der Bewegung auf krummen Gebilden*) andrerseits untersucht worden wären.

Wir wollen im Folgenden den Versuch unternehmen, die angezogene Theorie in diesem Sinne zu erweitern, bzhw. anzudeuten, in welcher Richtung ein Ausbau derselben stattfinden könnte.

*) Vgl. Amsler's Aufsatz: „Ueber mechanische Integrationen" im Kat. der Ausstellung der deutschen Mathematikervereinigung, herausg. von W. Dyck. 1892/93.

Digitized by Google

§ 1.

Das affin veränderliche System in der Ebene.

Wir wollen annehmen, dass sich in einer festen Ebene E drei Punkte Q_1, Q_2, Q_3 in beliebiger Weise und unabhängig von einander bewegen. Sie sollen die Basispunkte in einer affin veränderlichen Ebene E' bilden, deren Verzerrungen also von der Bewegung der Punkte Q_1, Q_2, Q_3 bedingt ist. Um einen allgemeinen Punkt P dieser veränderlichen Ebene E' in unsere Rechnung einzuführen, bezeichnen wir mit

$$x_1, y_1;\quad x_2, y_2;\quad x_3, y_3$$

die jeweiligen Coordinaten von Q_1 bzhw. Q_2 bzhw. Q_3 in der festen Ebene E. Dann ergibt sich nach den Grundsätzen der Affinität

$$P = \varkappa Q_1 + \lambda Q_2 + \mu Q_3$$

wobei

$$1 = \varkappa + \lambda + \mu$$

oder als Coordinaten von Q die Werte:

$$\begin{cases} x = \varkappa x_1 + \lambda x_2 + \mu x_3 \\ y = \varkappa y_1 + \lambda y_2 + \mu y_3 \end{cases}$$

Bekanntermassen kann man hiernach P mechanisch als Schwerpunkt der Basispunkte definiren, sobald in letzteren der Reihe nach Gewichte vom Verhältniss $\varkappa : \lambda : \mu$ angebracht gedacht werden.

Bei veränderlichem System Q_1, Q_2, Q_3 wechselt auch P seinen Ort in E, doch gibt es eine grosse Zahl von Mechanismen, mit den Basispunkten Q_1, Q_2, Q_3, welche gestatten, bei allen Veränderungen von E' den Punkt P, der der Relation

$$P = \varkappa Q_1 + \lambda Q_2 + \mu Q_3$$

genügt, mitzuführen. Dieselben heissen Pantographe und führen in ihrer primitivsten Form auf Sylvester zurück. Wir wollen auf sie gelegentlich zurückkommen.

Man kann nun leicht einsehen, dass, abgesehen von eigentümlichen Specialfällen, die sogenannte übergeschlossene Mechanismen bedingen, die Ebene E' innerhalb der festen Ebene E vollkommen zwangläufig wird, wenn man 5 „allgemeinen" Punkten von E' ihre Bahnen in E vorschreibt. Um dieses zu zeigen, wollen wir jeden der fünf Punkte P_i durch einen zugehörigen Satz von $\varkappa_i$, λ_i, μ_i charakterisiren:

Digitized by Google

$$P_i = \varkappa_i Q_1 + \lambda_i Q_2 + \mu_i Q_3$$

Sei nun

$$F_i = 0$$

die Gleichung derjenigen Curve, welche dem $i$ten Punkt als Bahncurve zugewiesen wurde, so erhält man aus ihr eine Bedingung in Q_1, Q_2, Q_3, wenn man den in

$$F_i = 0$$

vorkommenden Punkt P_i wie oben angegeben in Basispunkten ausdrückt.

$$F_i(\varkappa_i, \lambda_i, \mu_i, Q_1, Q_2, Q_3) = 0$$

In dieser Gleichung treten die 6 Coordinaten der Basispunkte als Veränderliche auf. Nun haben wir fünf solcher Relationen

$$F_i = 0$$

folglich wird die Festlegung einer einzigen Coordinate, z. B. von x_1, sofort auch eine (allerdings nicht eindeutige und nicht lineare) Festlegung aller übrigen ergeben, weiss man doch, dass fünf Gleichungen im allgemeinen fünf Unbekannte bestimmen.

Die Bahn eines sechsten Punktes kann demnach nicht mehr willkürlich in E vorgeschrieben werden.

Wir wollen nun speciell in den folgenden Betrachtungen annehmen, dass jeder der fünf Punkte P_i der veränderlichen Ebene E' in E eine geschlosssene Bahn (ein, oder mehrfach, überkreuzend oder nicht überkreuzend) beschreibe. Eine solche geschlossene Bahn begrenzt im Sinne der analytischen Geometrie je ein Ebenenstück von festem Flächeninhalte, den wir mit dem Buchstaben Φ_i bezeichnen wollen.

Jeder weitere Punkt P der veränderlichen Ebene E' wird dann in E gleichfalls eine — durch die Bewegungen der Punkte P_i gemäss obigen Ableitungen definirte — geschlossene Curve beschreiben. Denn wenn wir annehmen, dass die sämtlichen Punkte P_i nach verschiedenen ganzzahligen, positiven und negativen Umläufen in den ihnen zugewiesenen Bahnen gleichzeitig wieder in ihrer Ausgangsstelle eintreffen, so ist eben auch die ganze Ebene E' wieder in ihrer Anfangslage angekommen. Dies bedingt, dass auch der von ihr affin invariabel mitgeführte Punkt P in seine Ausgangsposition eingerückt ist, d. h. eine geschlossene Bahn durchlaufen hat. Allerdings kann dies Geschlossensein der Bahn auch bloss darin bestehen, dass P auf einem Stück seiner Bahncurve einigemale hin und her-

Digitized by Google

gerückt erscheint, doch wird dies unseren Betrachtungen ihre Gültigkeit nicht nehmen.

Wegen der Abhängigkeit der Bahn des Punktes P von den Bahnen F_i der Punkte P_i könnte die Frage berechtigt erscheinen, ob denn nicht auch eine solche Abhängigkeit des Flächeninhaltes Φ von den Flächen Φ_i statthabe. Zu dem Ende wollen wir Folgendes überlegen.

Wir schreiben nun nicht mehr die Bahnen

$$F_i = 0$$

selbst vor, sondern bloss deren Flächeninhalte. Dies kommt darauf hinaus, dass wir von jeder Curve bloss eine einzige Constante vorgeben. Dann kann man bekanntlich auf vielfach unendliche Weisen mögliche Bahnen

$$F_i = 0$$

bestimmen. Sind Individuen

$$F_i = 0$$

in der Ebene E gewählt, so können sie in dieser noch beliebig verschoben werden, ohne ihre Flächen Φ_i zu ändern. Jede Zusammenstellung möglicher F_i bedingt eine Curve F zu P. Und diese sämtlichen vielfach unendlichen Variationen von F sollten dieselbe Fläche Φ besitzen? Die Wahrscheinlichkeit spricht dagegen, aber auch die Tatsache. Aber — und dies ist das Wesentliche des im Folgenden zu entwickelnden Flächensatzes — es lässt sich zeigen, dass — obwol bei fünf vorgeschriebenen Φ_i die Bahnen der fünf sie umschreibenden Punkte noch über alle Massen willkürlich sind, doch schon die von einem siebenten affinen Punkt von E' relativ zwangläufig beschriebene geschlossene Bahn

$$F = 0$$

einen Flächeninhalt Φ umschliesst, der mit den Flächen Φ_i der sechs ersten Bahnen

$$F_i = 0$$

in homogener linearer Relation steht.

Um diese Behauptung zu erweisen, erteilen wir einem Punkte P des in Bewegung befindlichen Systems E und einem Basispunkt z. B. Q_3 des letzteren die ihnen bei ihrer zwangläufigen Fortbewegung zukommenden, zunächst unendlich klein gedachten Verschiebungen. Dabei gelangen sie in Nachbarlagen P' und Q_3'. Das vom veränderlichen Vector PQ_3 bestrichene Elementarflächenstück, ein Viereck, hat den folgenden Inhalt:

Digitized by Google

$$\Delta = \tfrac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} x_3 & x_3+dx_3 & x+dx & x \\ y_3 & y_3+dy_3 & y+dy & y \end{vmatrix}$$

$$= \tfrac{1}{2} \cdot \left\{ \begin{vmatrix} x_3 & x_3+dx_3 \\ y_3 & y_3+dy_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3+dx_3 & x+dx \\ y_3+dy_3 & y+dy \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x+dx & x \\ y+dy & y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & x_3 \\ y & y_3 \end{vmatrix} \right\}$$

$$= \tfrac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} (x_3-x) & d(x_3+x) \\ (y_3-y) & d(y_3+y) \end{vmatrix}$$

wobei Glieder zweiter Ordnung fortgelassen sind.

Setzen wir hierin die Werte der Coordinaten für x und y ein:

$$\begin{aligned} x &= \varkappa x_1 + \lambda x_2 + \mu x_3 \\ y &= \varkappa y_1 + \lambda y_2 + \mu y_3 \\ 1 &= \varkappa \quad + \lambda \quad + \mu \end{aligned}$$

so ergibt sich weiterhin:

$$= \tfrac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} \varkappa(x_1-x_3)+\lambda(x_2-x_3) & \varkappa d(x_1-x_3)+\lambda d(x_2-x_3)-2dx_3 \\ \varkappa(y_1-y_6)+\lambda(y_2-y_3) & \varkappa d(y_1-y_3)+\lambda d(y_2-y_3)-2dy_3 \end{vmatrix}$$

$$= \tfrac{1}{2}\varkappa^2 \begin{vmatrix} x_1-x_3 & d(x_1-x_3) \\ y_1-y_3 & d(y_1-y_3) \end{vmatrix} + \tfrac{1}{2}\varkappa\lambda \cdot \left[\begin{vmatrix} x_1-x_3 & d(x_2-x_3) \\ y_1-y_3 & d(y_2-y_3) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2-x_3 & d(x_1-x_3) \\ y_2-y_3 & d(y_1-y_3) \end{vmatrix} \right]$$

$$+ \tfrac{1}{2}\lambda^2 \begin{vmatrix} x_2-x_3 & d(x_2-x_3) \\ y_2-y_3 & d(y_2-y_3) \end{vmatrix} - \varkappa \begin{vmatrix} x_1-x_3 & dx_3 \\ y_1-y_3 & dy_3 \end{vmatrix} - \lambda \begin{vmatrix} x_2-x_3 & dx_3 \\ y_2-y_3 & dy_3 \end{vmatrix}$$

$$= v_{11}\varkappa^2 + 1a_{12}\varkappa\lambda + a_{22}\lambda^2 + 2a_{13}\varkappa + 2a_{23}\lambda$$

Wie man sich leicht überzeugt, besteht eine lineare Beziehung zwischen den 6 Coefficienten nicht. Sucht man alle Punkte P in der veränderlichen Ebene E' zusammen, für welche Δ denselben Wert hat, so erhält man in

$$a_{11}\varkappa^2 + 2a_{12}\varkappa\lambda + a_{22}\lambda^2 + 2a_{23}\varkappa + 2a_{13}\lambda - \Delta = 0$$

die Gleichung des fraglichen Ortes, eines Kegelschnitts. Aendert man successive den Wert von Δ, so erhält man neue Kegelschnitte; deren Gesamtheit ein Kegelschnittbüschel mit zwei gemeinsamen Asymptoten vorstellt.

Wir haben zunächst eine unendlich kleine Veränderung der Ebene E' betrachtet; wir wollen nun eine endliche Veränderung ins Auge fassen. Dabei bestreicht der veränderliche Vector PQ_3 ein Feld, dessen Grösse die Summe seiner Elementarteile Δ ist. Hat

Digitized by Google

die Ebene ihren Umlauf nunmehr vollendet, d. h. sind alle Punkte auf ihren geschlossenen Bahnen wieder in ihre Ausgangslage zurückgekehrt, so ist auch der Vector PQ_3 wieder in seiner ersten Stellung. Das von ihm beschriebene „Band" hat den Inhalt: ($\varkappa$, λ sind Constanten)

$$\int \Delta = \varkappa^2 \int a_{11} + 2\varkappa\lambda \int a_{12} + \lambda^2 \int a_{22} + 2\varkappa \int a_{13} + 2\lambda \int a_{23}$$

Der Flächeninhalt des Bandes ist aber überdies gleich der Differenz der Flächen Φ und ${}^2\Psi_3$, welche von den Punkten P und Q_3 umlaufen werden.

Sucht man in E nunmehr alle Punkte P auf, welche Curven von gleichen Flächenräumen umkreisen, so stellt wieder

$$\varkappa^2 \int a^6{}_1 + 2\varkappa\lambda \int a_{12} + \lambda^2 \int a_{22} + 2\varkappa \int a_{13} + 2\lambda \int a_{23} - (\Phi - {}^2\Psi) = 0$$

die Gleichung ihres geometrischen Ortes vor. Dies ist wieder ein Kegelschnitt, wir nennen ihn U. Wird Φ veränderlicher Parameter, so erhalten wir, wie oben, ein Kegelschnittbüschel der U mit zwei gemeinsamen Asymptoten, doch ist dieses in seinen Individuen mit dem zuerst besprochenen im allgemeinen nicht identisch.

Die 6 Integrale $\int a_{ix}$ und ${}^2\Psi$ sind unabhängig von der Wahl der Punkte in E', sie sind Specifica der dem System vorgeschriebenen Bewegung. Legen wir demnach dem Tripel

$$\varkappa,\ \lambda,\ \mu,\ \ldots\ [\varkappa + \lambda + \mu = 1]$$

sieben Werte bei, d. h. wählen wir in E' sieben Punkte

$$P_1,\ P_2,\ P_3,\ P_3,\ P_5,\ P_6,\ P_7$$

so erhalten wir durch Elimination der genannten Specifica eine Relation zwischen den sieben Flächen:

$$\Phi_1,\ \Phi_2,\ \Phi_3,\ \Phi_4,\ \Phi_5,\ \Phi_6,\ \Phi_7$$

welche von den P_i resp. umkreist werden; diese lautet:

Digitized by Google

$$\begin{vmatrix} x_1^2 & x_1\lambda_1 & \lambda_1^2 & x_1 & \lambda_1 & 1 & \Phi_1 \\ x_2^2 & x_2\lambda_2 & \lambda_2^2 & x_2 & \lambda_2 & 1 & \Phi_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_7^2 & x_7\lambda_7 & \lambda_7^2 & x_7 & \lambda_7 & 1 & \Phi_7 \end{vmatrix} = 0$$

Hiermit ist unsere erste Behauptung erwiesen, die erste Flächenrelation festgelegt.

§ 2.

Ableitung eines Fundamentalsatzes.

Wir wollen nunmehr voraussetzen, dass die sechs Punkte

$$P_1,\ P_2,\ P_3,\ P_4,\ P_5,\ P_6$$

auf einem Kegelschnitte $\mathfrak{K}$ liegen; dann liegen sie bekanntermassen auch bei allen Verzerrungen der veränderlichen Ebene E' auf einem solchen. Dies wird der Fall sein, wenn die folgende Bedingung erfüllt ist:

$$\begin{vmatrix} x_1^2 & x_1\lambda_1 & \lambda_1^2 & x_1 & \lambda_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2\lambda_2 & \lambda_2^2 & x_2 & \lambda_2 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_6^2 & x_6\lambda_6 & \lambda_6^2 & x_6 & \lambda_6 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Vom Punkte P_7 wollen wir voraussetzen, er liege nicht auf dem durch die übrigen sechs Punkte bestimmten Kegelschnitte $\mathfrak{K}$. — Gehen wir unter diesen Voraussetzungen an die Auswertung der in § 1. an letzter Stelle entwickelten Determinante, indem wir die Auflösung derselben nach der siebenten Horizontalreihe versuchen, so erkennen wir an erster Stelle, dass der Coefficient der Fläche Φ_7 gleich null ist. Es verschwindet also aus der Flächenrelation diese Grösse, d. h. „im Falle sechs Punkte P_i auf einem Kegelschnitte „liegen, existiert bereits zwischen den von ihnen bei der Bewegung „der veränderlichen Ebene E' umkreisten Flächenstücken Φ_i eine „Relation".

Dies ist um so bemerkenswerter, wenn man sich erinnert, dass fünf von einander unabhängigen Punkten

$$P_1,\ P_2,\ P_3,\ P_4,\ P_5$$

ihre Bahnen ganz beliebig in der festen Ebene E vorgeschrieben werden konnten. Dies kommt darauf hinaus, dass die sämtlichen Grössen

Digitized by Google

$$\begin{array}{l} x_1,\ \lambda_1,\ \mu_1,\ \Phi_1 \\ x_2,\ \lambda_2,\ \mu_2,\ \Phi_2 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_5,\ \lambda_5,\ \mu_5,\ \Phi_5 \end{array}$$

nach Gutdünken wählbar sind. „Zu jeder weiteren Wahl x_6, λ_6, u_6 „auf dem Kegelschnitte $\mathfrak{K}$, gehört dann ein linear berechenbares Φ_6".

Dass die Grösse von Φ_6 doch nicht mehr von dem beliebig wählbaren Punkte P_7 abhangen kann, ist von vornherein klar, doch erkennen wir dies auch aus der Schlussrelation von § 1. Man kann dort, unbeschadet des rechnerischen Wertes der Determinante statt Φ_7 irgend eine Zahl z setzen, ist doch der Coefficient Φ_7 gleich null. Dann sind aber die Grössen der letzten Horizontalreihe lauter linear unabhängige Grössen. Da trotz ihrer Willkürlichkeit die Determinante verschwinden muss, so müssen eben die sämtlichen Minoren der Matrix:

$$\begin{vmatrix} x_1^2 & x_1\lambda_1 & \lambda_1^2 & x_1 & \lambda_1 & 1 & \Phi_1 \\ x_2^2 & x_2\lambda_2 & \lambda_2^3 & x_2 & \lambda_2 & 1 & \Phi_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_6^2 & x_6\lambda_3 & \lambda_6^2 & x_6 & \lambda_6 & 1 & \Phi_6 \end{vmatrix} \equiv 0$$

verschwinden. Dies stellt nach Kronecker im allgemeinen nur zwei Gleichungen vor. Lassen wir die Colonne der Φ_i weg, so verschwindet die bleibende Determinante doch gemäss unseren Voraussetzungen; demnach ist die eine Gleichung bereits erledigt. Die zweite findet sich, wenn man irgend eine andere Colonne weglässt. Da die übrigbleibende Determinante die Grössen Φ_i enthält, so stellt sie die gewünschte Relation der sechs Flächen Φ_i vor.

Wir unterdrücken der Symmetrie halber die Colonne der 1 und erhalten:

$$\begin{vmatrix} x_1^2 & x_1\lambda_1 & \lambda_1^2 & x_1 & \lambda_1 & \Phi_1 \\ x_2^2 & x_2\lambda_2 & \lambda_2^2 & x_2 & \lambda_2 & \Phi_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_6^2 & x_6\lambda_6 & \lambda_6^2 & x_6 & \lambda_6 & \Phi_6 \end{vmatrix} = 0$$

Wäre die Wahl der ersten fünf Punkte zwar beliebig getroffen worden, aber vorgeschrieben worden, dass zwischen den von ihnen umkreisten Flächen Φ_i die Gleichung:

$$\Phi_2 = \Phi_3 = \Phi_4 = \Phi_5 = \Phi_6 = \varepsilon$$

Digitized by Google

bestehe, so wird auch Φ_1 diesen Grössen gleich. Man erkennt dies an der oben abgeleiteten Determinante am besten, wenn man die Colonne der Φ_i durch ε teilt. Dann folgt:

$$\begin{vmatrix} x_1^2 & x_1\lambda_1 & \lambda_1^2 & x_1 & \lambda_1 & \frac{\Phi_1}{\varepsilon} \\ x_2^2 & x_2\lambda_2 & \lambda_2^2 & x_2 & \lambda_2 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_6^2 & x_6\lambda_6 & \lambda_6^2 & x_6 & \lambda_6 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Da dies eine lineare Gleichung für $\frac{\Phi}{\varepsilon}$ ist, existiert hiefür nur ein Wert. Er ist 1, denn dies für $\frac{\Phi}{\varepsilon}$ substituirt, ergibt die nach Voraussetzung verschwindende Determinante.

In diesem Falle kommt dem Kegelschnitte $\mathfrak{K}$ besondere Bedeutung zu. Er ist identisch mit einem der Kegelschnitte U des § 1. Er bildet mit der unendlich fernen Geraden ein Büschel von Kegelschnitten mit zwei gemeinsamen Asymptoten, von denen jeder die Eigenschaft eines Kegelschnittes U besitzt, d. h. dass seine sämtlichen Punkte je Flächen Φ von gleicher Grösse umbahnen. Dass die Kegelschnitte U ein solches Büschel bilden müssen, ist schon deswegen klar, weil irgend zwei derselben sich im Endlichen nicht treffen dürfen, sonst kämen ja dem Schnittpunkt beider verschiedene Flächen Φ zu; mit einem Wort, die U sind die Niveaucurven eines topographischen Systems, das wir nun näher betrachten wollen.

§ 3.

Die Systemfläche *II.*

Wir kehren nun zum allgemeinen Fall zurück, indem wir irgend sechs Punkten P_i 6 mögliche Flächen Φ_i zuordnen. Dann ist jedem Punkte P, den wir uns nunmehr in E' veränderlich denken, eine Fläche Φ gemäss der Gleichung:

$$\begin{vmatrix} x^2 & x\lambda & \lambda^2 & x & \lambda & 1 & \Phi \\ x_1^2 & x_1\lambda_1 & \lambda_1^2 & x_1 & \lambda_1 & 1 & \Phi_1 \\ x_2^2 & x_2\lambda_2 & \lambda_2^2 & x_2 & \lambda_2 & 1 & \Phi_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_6^2 & x_6\lambda_6 & \lambda_6^2 & x_1 & \lambda_6 & 1 & \Phi_6 \end{vmatrix} = 0$$

Digitized by Google

zugeordnet. Um an ihrer Hand die Verteilung der Werte Φ in der Ebene E' zu studieren, denken wir uns über jedem Punkte P der letzteren senkrecht zu E eine Ordinate errichtet, deren Länge gleich der vom Punkte P jeweils umschriebene Fläche Φ sein soll. Dann erfüllen die Endpunkte Q der Ordinaten eine räumliche Oberfläche Π, welche wir als die Systemfläche Π bezeichnen wollen. Wie ein Blick auf die Gleichung lehrt, ist die Ordinate Φ eine quadratische Form der Coordinaten $\varkappa$, λ; die Oberfläche Π ist demnach ein Paraboloid. Solcher unterscheidet man zwei Arten: hyperbolische und elliptische. Ob die eine oder andere Art durch Π vertreten wird, hängt von der Wahl der Grössen Φ ab, die sowol positiv, wie negativ sein können.

Setzt man Φ constant, d. h. sucht man den geometrischen Ort der Punkte P, welche Flächen von der Grösse

$$\Phi = c$$

umkreisen, oder mit anderen Worten den Kegelschnitt U, so liegen die correspondierenden Punkte Q der Systemfläche Π in einer zu E' parallelen Ebene. Es repräsentieren also die Kegelschnitte U die Niveaucurven eines Paraboloids Π.

Wir haben in § 2. die Flächenrelation auf einem beliebigen Kegelschnitte $\mathfrak{K}$ untersucht; diesem Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ von Punkten P entspricht auf der Systemfläche Π eine Curve 4ter Ordnung C_4. Indem wir die letztere specialisiren, erkennen wir, dass auch unter den $\mathfrak{K}$ ausgezeichnete auftreten. Die C_4 kann nämlich in den unendlich entfernten Axenpunkt des Paraboloids und eine ebene C_3 ausarten. Schneiden wir hiernach das Paraboloid Π mit einer Ebene $\mathfrak{E}$ nach einer C_2 und projiciren die letztere orthogonal in E', so erhalten wir darin einen Kegelschnitt von Punkten P, den wir V nennen wollen, und der nach unserer Angabe unter den $\mathfrak{K}$ ausgezeichnet ist.

Nach einem Satze Klein's ist es ein solcher Kegelschnitt bereits dem Aeusseren nach. Der Satz, der übrigens für eine orientierte Fläche leicht rechnerisch zu erweisen ist, besagt, dass ein solcher Kegelschnitt V den Niveaucurven U des Paraboloids ähnlich ist, nur parallel zu diesen verschoben erscheinend. Wir können also sagen:

„Verschiebt man in E' einen der unter sich ähnlichen und ähnlich gelegenen Kegelschnitte U ohne Drehung unter Vergrösserung oder Verkleinerung, so entspricht dem so erhaltenen Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ ein ebener Schnitt des Paraboloids."

Digitized by Google

Für die Punkte eines solchen ebenen Schnittes verwandelt sich die allgemeine Flächengleichung des § 1. in die einfachere:

$$\begin{vmatrix} x_1 & \lambda_1 & 1 & \Phi_1 \\ x_2 & \lambda_2 & 1 & \Phi_2 \\ x_3 & \lambda_3 & 1 & \Phi_3 \\ x_4 & \lambda_4 & 1 & \Phi_4 \end{vmatrix} = 0$$

Hat man also gleich eingangs den zur Verfügung stehenden fünf Punkten P_i solche Flächen zugewiesen, dass die Matrix verschwindet:

$$\begin{vmatrix} x_1 & \lambda_1 & 1 & \Phi_1 \\ x_2 & \lambda_2 & 1 & \Phi_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_5 & \lambda_5 & 1 & \Phi_5 \end{vmatrix} = 0$$

so gilt für jeden sechsten Punkt des von ihnen bestimmten Kegelschnitts, die oben angeschriebene lineare Relation, statt der früher gegebenen quadratischen.

Ist die Systemfläche II ein hyperbolisches Paraboloid, so existieren auf ihm zwei Scharen von Erzeugenden, die in unsere Ebene E' projicirt, da sie noch beim Klein'schen Satze dem zerfallenden Kegelschnitte U ähnlich sein müssen, ein Doppelsystem von parallelen Linien u bilden. Einer solchen Linie u entspricht die einfachste Flächenrelation:

$$\begin{vmatrix} x_1 & 1 & \Phi_1 \\ x_2 & 1 & \Phi_2 \\ x_3 & 1 & \Phi_3 \end{vmatrix} = 0$$

Wählt man nicht eine solch ausgezeichnete Linie u, sondern eine allgemeine Gerade G in E', so entspricht dieser auf der Systemfläche ein ebener Schnitt C_2, folglich gilt für eine solche Gerade G dieselbe lineare Flächenrelation, wie für einen der Kegelschnitte V.

Die Systemfläche II vermittelt hiernach eine Abbildung der Flächenrelationen, welche der Reihe nach zwischen drei, vier, sechs bzhw. sieben Flächen Φ bestehen können.

Ist die Systemfläche II ein elliptisches Paraboloid, so existiert in der Projection seines Scheitels in E ein Punkt P dem ein wahres Minimum bzhw. Maximum an Fläche Φ zukommt; um ihn ordnen sich in ähnlichen und ähnlich gelegenen Ellipsen U die Punkte gleicher Flächen an.

Digitized by Google

§ 4.

Das affin veränderliche System in der Geraden.

Wir haben oben in § 1 zur Ableitung der Flächenrelationen die Integration des vom Vector PQ_3 bestrichenen Bandes der Betrachtung zugrunde gelegt, und schliesslich dieses Band als die Differenz der von seinen Rändern umschlossenen Flächen Φ aufgefasst. Wir können aber auch noch auf eine andere Art zu besagten Relationen kommen, welche manche Erweiterung ohne besondere Mühe zulässt. Wir wollen aber nicht mehr den früher behandelten Fall wiederholen, sondern die neue Integrationsart am Fall des affin veränderlichen Systems in der Geraden vorführen.

Dasselbe sei gegeben durch zwei Basispunkte Q_1 und Q_2, die sich vorerst in der Ebene beliebig und unabhängig von einander bewegen sollen. Ein mit ihnen affin verbundener Punkt P habe die Coordinaten

$$P = \varkappa Q_1 + \lambda Q_2$$

Wie früher kann man auch hier zeigen, dass drei Punkten P_i ihre Bahnen beliebig zugewiesen werden können, und dass jeder weitere Punkt P eine geschlossene Curve beschreibt, wenn dies mit den vorausgehenden der Fall war. Es lässt sich nun hier nachweisen, dass das Fixieren der Flächen Φ_i, welche von den drei in unserer Gewalt stehenden Punkten P_i umlaufen werden, gleichzeitig die Fixierung der Flächen Φ aller von Punkten der Geraden umbahnten Flächenstücken zur Folge hat.

Um den Nachweis hiefür zu erbringen, „wollen wir nunmehr die „Fläche Φ direct unserer Betrachtung unterwerfen". Zu dem Ende nehmen wir vorerst an, die Fläche Φ sei ein Dreieck; wir werden nämlich sogleich erkennen, dass die für dieses Dreieck hergestellte Flächenrelation auch für irgend welche Flächen Φ gilt.

Wir haben uns also die veränderliche Gerade $Q_1 Q_2$ in 3 Lagen der ihr zugehörigen Bewegungsphasen vorzustellen. In diesen gehören den Punkten Q_1, Q_2, P die Coordinaten zu:

$$\begin{array}{lll} x_1', y_1' : & x_2', y_2' : & x', y' \\ x_1'', y_1'' ; & x_2'', y_2'' ; & x'', y'' \\ x_1''', y_1''' ; & x_2''', y_2''' : & x''', y''' \end{array}$$

Der Inhalt des Dreiecks

$$\Phi \equiv P' P'' P'''$$

ergibt sich zu

Digitized by Google

$$\Delta = \tfrac{1}{2}\begin{vmatrix} x' & y' & 1 \\ x'' & y'' & 1 \\ x''' & y''' & 1 \end{vmatrix}$$

Setzt man hierin der Formel

$$P = \varkappa Q_1 + \lambda Q_2$$

gemäss statt der Coordinaten von P jene von Q, so folgt:

$$\Delta = \tfrac{1}{2}\begin{vmatrix} \varkappa x_1' + \lambda x_2' & \varkappa y_1' + \lambda y_2' & 1 \\ \varkappa x_1'' + \lambda x_2'' & \varkappa y_1'' + \lambda y_2'' & 1 \\ \varkappa x_1''' + \lambda x_2''' & \varkappa y_1''' + \lambda y_2''' & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \tfrac{1}{2}\varkappa^2 \cdot |x_1, y_1, 1| + \tfrac{1}{2}\varkappa\lambda\{|x_1, y_2, 1| + |x_2, y_1, 1|\} + \tfrac{1}{2}\lambda^2 \cdot |x_2, y_2, 1|$$

$$= a_{11}\varkappa^2 + 2a_{12}\varkappa\lambda + a_{22}\lambda^2$$

Da Δ eine quadratische Form der Parameter $\varkappa$, λ,, so besteht zwischen den vier Grössen Δ_i, welche vier Punkten P_i der Geraden zugehören die Flächenrelation:

$$\begin{vmatrix} \varkappa_1^2 & \varkappa_1\lambda_1 & \lambda_1^2 & \Delta_1 \\ \varkappa_2^2 & \varkappa_2\lambda_2 & \lambda_2^2 & \Delta_2 \\ \varkappa_3^2 & \varkappa_3\lambda_3 & \lambda_3^2 & \Delta_3 \\ \varkappa_4^2 & \varkappa_4\lambda_4 & \lambda_4^2 & \Delta_4 \end{vmatrix} = 0$$

oder, da $\varkappa + \lambda = 1$ ist, die Gleichung:

$$\begin{vmatrix} \varkappa_1^2 & \varkappa_1 & 1 & \Delta_1 \\ \varkappa_2^2 & \varkappa_2 & 1 & \Delta_2 \\ \varkappa_3^2 & \varkappa_3 & 1 & \Delta_3 \\ \varkappa_4^2 & \varkappa_4 & 1 & \Delta_4 \end{vmatrix} = 0$$

Haben wir bisher vorausgesetzt, die Flächen Φ_i seien Dreiecke, so wollen wir nunmehr annehmen, es seien correspondirende Polygone. Dieselben kann man aber sofort von einem Punkte 0 aus in correspondirende Dreiecke zerlegen. Für jedes Quadrupel solcher gilt der vorstehende Satz. Da aber darin die Coefficienten der Δ_i selbst Constante für unsere Zerlegungen sind: so kann man eine Summation der Relationen eintreten lassen und erhält:

Digitized by Google

$$\sum_i \begin{vmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 & \Delta_1^2 \\ x_2^2 & x_2 & 1 & \Delta_2^2 \\ x_3^2 & x_3 & 1 & \Delta_3^2 \\ x_4^2 & x_4 & 1 & \Delta_4^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 & \Sigma\Delta_1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 & \Sigma\Delta_2 \\ x_3^2 & x_3 & 1 & \Sigma\Delta_3 \\ x_4^2 & x_4 & 1 & \Sigma\Delta_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 & \Phi_1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 & \Phi_2 \\ x_3^2 & x_3 & 1 & \Phi_3 \\ x_4^2 & x_4 & 1 & \Phi_4 \end{vmatrix} = 0$$

Gehen wir noch einen Schritt weiter und setzen wir statt der polygonal begrenzten Φ_i ganz willkürlich begrenzte voraus, so kann auch eine Zerlegung der Ränder von Φ in correspondierende Elemente, also auch der Flächen Φ_i in correspondierende Dreiecke stattfinden. Die Endformel bleibt dieselbe wie oben, nur verwandeln sich die oben benutzten Summen in die entsprechenden Integrale.

Wir wollen nun annehmen, die veränderliche Gerade $\overline{Q_1 Q_2}$ bewege sich im Raume. Hier kann man, wie leicht ersichtlich, vier Punkten derselben Bahnflächen zuweisen. Nehmen wir an, diese Bahnflächen seien geschlossene Oberflächen, welche Teile des dreidimensionalen Raumes begrenzen, deren Rauminhalte mit Φ_i bezeichnet werden mögen.

Bei der Bewegung der 4 Punkte P_i der Geraden auf ihren zugehörigen Oberflächen wollen wir 4 Lagen besonders auszeichnen. Die Coordinaten der Punkte Q_1 Q_2 P seien in diesen bezeichnet mit:

$$\begin{matrix} x & x & x & x & x & x & x & x & x \\ x_1, & y_1, & z_1; & x_2, & y_2, & z_2; & x, & y, & z \end{matrix}$$

Dann ergibt sich für das Tetraeder der Wert

$$\Delta = \frac{1}{2 \cdot 3} \begin{vmatrix} x' & y' & z' & 1 \\ x'' & y'' & z'' & 1 \\ x''' & y''' & z''' & 1 \\ x'''' & y'''' & z'''' & 1 \end{vmatrix}$$

Führt man hierin statt P die Grösse $xQ_1 + \lambda Q_2$ ein, so folgt

$$\Delta = \frac{1}{2 \cdot 3} \begin{vmatrix} xx_1' + \lambda x_2' & xy_1' + \lambda y_2' & xz_1' + \lambda z_2' & 1 \\ xx_1'' + \lambda x_2'' & xy_1'' + \lambda y_2'' & xz'' + \lambda z'' & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2 \cdot 3} (a_{111} x^3 + 3 a_{112} x^2 \lambda + \cdots a_{122} x \lambda^2 + a_{222} \lambda^3)$$

Digitized by Google

Dieser kubischen Form von Δ entsprechend, existiert zwischen fünf Grössen Δ_i die Tetraederrelation $(\varkappa + \lambda = 1)$

$$\begin{vmatrix} x_1^3 & x_1^2 & x_1 & 1 & \Delta' \\ x_2^3 & x_2^2 & x_2 & 1 & \Delta_2 \\ x_3^3 & x_3^2 & x_3 & 1 & \Delta_3 \\ x_4^3 & x_4^2 & x_4 & 1 & \Delta_4 \\ x_5^3 & x_5^2 & x_5 & 1 & \Delta_5 \end{vmatrix} = 0$$

Aus dieser Relation folgt, da auch sie in den Δ_i linear ist und sich also zur Summation eignet, durch Ueberlegungen im Raume, die denen in der Ebene analog sind, für die Kubikinhalte Φ_i der correspondirenden Oberflächen, die von den P_i der variablen Geraden beschrieben werden:

$$\begin{vmatrix} x_1^3 & x_1^2 & x_1 & 1 & \Phi_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_5^3 & x_5^2 & x_5 & 1 & \Phi_5 \end{vmatrix} = 0$$

Nichts hindert uns diese Formel für einen Raum von n Dimensionen zu erweitern. Dort werden die Elementarraumteile, welche dem Dreieck in der Ebene, dem Tetraeder im dreidimensionalen Raume entsprechen, nach derselben Formel

$$\Delta = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n} \cdot \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x & y & z & \ldots & t & 1 & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

gegeben, woraus schliesslich für correspondirende „Körper" des n-dimensionalen Raumes die Relation

$$\text{Det.} \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_i^n & x_i^{n-1} & \ldots & x_i & 1 & \Phi_i & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} = 0$$

folgt. Wir erkennen hieraus, dass auf einer Geraden im allgemeinen n Punkte vorhanden sind, die „Körper" von gleicher Grösse umschreiben.

Digitized by Google

§ 5.

Die ähnlich veränderliche Ebene E'.

Das Problem, die Flächenrelation der ähnlich veränderlichen Ebene aufzustellen, kann im wesentlichen damit identisch erachtet werden, die Flächengleichung für das affin veränderliche System in der Geraden anzugeben, welch letztere Aufgabe bereits im § 4. ihre Erledigung gefunden hat. In der Tat ist ja eine ähnlich veränderliche Ebene E' dann vollkommen bestimmt, wenn eine ihrer Geraden mit dem auf ihr befindlichen Punktsystem gegeben ist.

Um auch äusserlich diesem Zusammenhang Ausdruck zu verleihen, wollen wir eine Coordinatisierung der Punkte P in E' in folgender Weise einführen:

Wir nehmen an, dass die Festlegung der Punkte in der festen Ebene E erfolge wie in der Gauss'schen Ebene dadurch, dass man jedem Punkt Q eine complexe Zahl $x+iy$ zuordnet. Der Formel

$$P = \varkappa Q_1 + \lambda Q_2$$
$$1 = \varkappa + \lambda$$

entspricht dann für reelle Werte $\varkappa$, λ die Punktreihe der Geraden $Q_1 Q_2$ in bekannter Weise. Wählt man aber $\varkappa$, λ complex, was eine zweifach unendliche Mannigfaltigkeit implicirt, so erhält man jenen Punkt P in der mit $Q_1 Q_2$ verbundenen Ebene E', welcher mit den Basispunkten Q_1 und Q_2 ein Dreieck von der festen Form

$$\varkappa + \lambda - 1 = 0$$

(d. h. die Grössen $\varkappa$, λ, -1 zu einem Linienzug aneinander gereiht) gibt. Wie demnach auch Q_1 und Q_2 sich in E bewegen mögen, immer bildet P mit ihnen ein Dreieck von derselben Gestalt, sonach ein ähnlich veränderliches Dreieck.

Zur weiteren Behandlung definieren wir eine Operation δ, welche eine complexe Grösse in ihre conjugirte verwandeln soll, so dass z. B.

$$Q = x + iy = re^{i\varphi}$$
$$\delta Q = x - iy = re^{-i\varphi}$$

Die Operation δ kann mit den gewöhnlichen Rechnungsoperationen vertauscht werden und dient im Wesentlichen dazu, manche Reductionen kürzer zu fassen, so ist z. B.

Digitized by Google

$$\begin{cases} r^2 = Q\delta Q \\ e^{i2\varphi} = \dfrac{Q}{\delta Q} \end{cases}$$

Wie wir bereits gesehen haben, genügt es, die Flächenrelation für ein Dreieck des bewegten Punktes P aufzustellen, um die allgemeine zugleich zu erhalten. Haben zu dem Ende die Punkte Q_1, Q_2, P in drei zugehörigen Lagen von E' in der festen E die Positionen

$$\begin{matrix} Q_1' & Q_2' & P' \\ Q_1'' & Q_2'' & P'' \\ Q_1''' & Q_2''' & P' \end{matrix}$$

so ergibt sich für den Flächeninhalt des Dreiecks zunächst:

$$\Delta = -\begin{vmatrix} P' & \delta P' & 1 \\ P'' & \delta P'' & 1 \\ P''' & \delta P''' & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{1}{4i}\begin{vmatrix} (\varkappa Q_1' + \lambda Q_2') & \delta(\varkappa Q_1' + \lambda Q_2') & 1 \\ (\varkappa Q_1'' + \lambda Q_2'') & \delta(\varkappa Q_1'' + \lambda Q_2'') & 1 \\ (\varkappa Q_1''' + \lambda Q_2''') & \delta(\varkappa Q_1''' + \lambda_2 Q_2) & 1 \end{vmatrix}$$

Die Auswertung und Ordnung nach $\varkappa$, λ liefert:

$$-4i\Delta = \varkappa\delta\varkappa(Q_1'\delta Q_1'1) + \lambda\delta\lambda(Q_1'\delta Q_2'1) + \lambda\delta\varkappa(Q_2'\delta Q_1'1) + \lambda\delta\lambda(Q_2'\delta Q_2'1)$$

Zu dieser Gleichung kommt noch folgende

$$\varkappa + \lambda = 1$$

bzhw.

$$(\varkappa + \lambda)\delta(\varkappa + \lambda) = 1$$

oder

$$\varkappa\delta\varkappa + \varkappa\delta\lambda + \lambda\delta\varkappa + \lambda\delta\lambda = 1$$

Um zur Flächenrelation zu kommen, betrachten wir die fünf Dreiecke Δ_ϱ, welche fünf Punkten P_ϱ der ähnlich veränderlichen Ebene E' zukommen. Aus den ihnen zugehörigen Werten können die Coefficienten

$$\varkappa\delta\varkappa \quad \varkappa\delta\lambda \quad \lambda\delta\varkappa \quad \varkappa\delta\lambda$$

eliminirt werden; dann ergibt sich die gesuchte Dreiecksrelation:

$$\begin{vmatrix} \varkappa_1\delta\varkappa_1 & \varkappa_1\delta\lambda_1 & \lambda_1\delta\varkappa_1 & \lambda_1\delta\lambda_1 & \Delta_1 \\ \varkappa_2\delta\varkappa_2 & \varkappa_2\delta\lambda_2 & \lambda_2\delta\varkappa_2 & \lambda_2\delta\lambda_2 & \Delta_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varkappa_5\delta\varkappa_5 & \varkappa_5\delta\lambda_0 & \lambda_5\delta\alpha_5 & \lambda_0\delta\lambda_4 & \Delta_5 \end{vmatrix} = 0.$$

Digitized by Google

Vermöge der zwischen $\varkappa$ und λ bestehenden Identität kann man diese Determinante auch schreiben:

$$\text{Det.} \mid \varkappa\delta\varkappa \quad \varkappa \quad \delta\varkappa \quad 1 \quad \Delta \mid = 0$$

Setzt man statt der Dreiecke Δ die allgemeineren Flächen Φ, so bleibt die Gleichung ebenfalls richtig und stellt die Flächenrelation der ähnlich veränderlichen Ebene vor.

Zur Discussion der Flächenformel bemerken wir folgendes: Sind A und O zwei Punkte in der Gauss'schen Ebene, so findet sich ihre Entfernung r nach der eingangs erwähnten Formel:

$$\begin{aligned} r^2 &= \overline{OA} \,.\, \delta\overline{OA} \\ &= A\delta A - A\delta O - O\delta A + O\delta O \end{aligned}$$

Sind A, B, C, D vier Punkte des Kreises vom Radius r, der O zum Mittelpunkte besitzt, so können wir 4 solcher Gleichungen aufstellen, aus denen die Specifica des Kreises

$$O\delta O - r^2, \quad O, \quad \delta O, \quad 1$$

eliminirt werden können. Die hiebei erzielte neue Gleichung:

$$\begin{vmatrix} A\delta A & A & \delta A & 1 \\ B\delta B & B & \delta B & 1 \\ C\delta C & C & \delta C & 1 \\ D\delta D & D & \delta D & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ist die Bedingung dafür, dass die vier Punkte A, B, C, D auf einem Kreise liegen.

Wir wollen nun annehmen, dass von den zur Ableitung der Flächenformel

$$\text{Det.} \mid \varkappa_i\delta\varkappa_i \quad \varkappa_i \quad \delta\varkappa_i \quad 1 \quad \Phi_i \mid = 0$$

benutzten fünf Punkten P_i vier auf einem Kreise liegen, z. B. P_1, P_2, P_3, P_4. Dann gilt doch die Beziehung

$$\text{Det.} \mid P_i\delta P_i \quad P_i \quad \delta P_i \quad 1 \mid = 0$$

Liegen die vier Punkte auf einem Kreise, so liegen sie bekanntermassen bei allen Aenderungen der ähnlich veränderlichen Ebene je auf Kreisen. Nehmen wir an, wir bringen durch eine solche Veränderung Q_2 mit dem Coordinatenanfangspunkt, Q_3 mit dem Einheitspunkt zur Deckung, dann fallen die Punkte P_i zusammen mit

$$P_i \equiv \varkappa_i$$

Digitized by Google

d. h., wenn P_1, P_2, P_3, P_4 auf einem Kreise liegen, verschwindet die Determinante

$$\begin{vmatrix} x_1\delta x_1 & x_1 & \delta x_1 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_4\delta x_4 & x_4 & \delta x_4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Diese ist aber in der Flächenrelation der ähnlich veränderlichen Ebene der Coefficient von Φ_5. Da hiernach aus derselben Φ_5 verschwindet, so existiert bereits zwischen vier Punkten eines Kreises der ähnlich veränderlichen Ebene eine Flächenbeziehung. Diese wird wie im allgemeinen Falle des § 2. erhalten und lautet:

$$\begin{vmatrix} x_1 & \delta x_1 & 1 & \Phi_1 \\ x_2 & \delta x_2 & 1 & \Phi_2 \\ x_3 & \delta x_3 & 1 & \Phi_3 \\ x_4 & \delta x_4 & 1 & \Phi_4 \end{vmatrix} = 0$$

Wird hierin

$$\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi_3 = \varepsilon$$

so zeigt man wie früher, dass auch

$$\Phi_4 = \varepsilon$$

wird, dass für die ähnlich veränderliche Ebene E' die Orte von Punkten gleicher Flächen Kreise sind.

Im weiteren Verfolg des Gedankengangs von § 2. erkennen wir, dass die von uns als Systemfläche bezeichnete, zur Abbildung der Flächenrelationen benutzte Oberfläche Π hier ein Rotationsparaboloid wird. Jedem Kreise der P_1, P_2 P_3, P_4 entspricht auf Π nach dem Klein'schen Satze ein ebener Schnitt, was sich mit dem Umstande deckt, dass die Flächenrelation nur eine lineare Verbindung von x und δx vorstellt.

In unserem Falle ist auch ein Punkt vorhanden, welcher eine Fläche von geringstem Inhalt umschreibt; um ihn ordnen sich in concentrischen Kreisen die Punkte gleicher Flächen Φ.

§ 6.

Die starre Ebene F' bewege sich in der festen Ebene E.

Die Resultate, die wir im Vorhergehenden für die Bewegung einer ähnlich veränderlichen Ebene E' in der festen Ebene E ge-

funden haben, bleiben bestehen, wenn wir voraussetzen, dass die Ebene E' starr sei. Dabei erhalten wir dann den von Amsler betrachteten Specialfall, den wir hier nur kurz streifen wollen.

Wir heben da besonders den in § 5. gefundenen Satz hervor:

„Die Systemfläche Π ist im Fall einer ähnlich ver-
„änderlichen Ebene E' ein Rotationsparaboloid."

Er gilt auch für unseren Fall. Um hier dieses Rotationsparaboloid Π näher zu untersuchen, brauchen wir blos die Flächenrelation längs einer Geraden von E' zu studieren.

In diese Gerade denken wir die Grundpunkte Q_1 und Q_3 gelegt, so dass $\lambda = 0$ wird, dann geht die in § 1. entwickelte Formel für das Bandelement:

$$\Delta = a_{11}\varkappa^2 + 2a_{12}\varkappa\lambda + a_{22}\lambda_2 + 2a_{13}\varkappa + 2a_{23}\lambda$$

über in:

$$\Delta = a_{11}\varkappa^2 + 2a_{13}\varkappa$$

oder in Werten der a_{ik}:

$$\Delta = \frac{\varkappa^2}{2}\begin{vmatrix} x_1 - x_3 & d(x_1 - x_3) \\ y_1 - y_3 & d(y_1 - y_3) \end{vmatrix} - \varkappa \begin{vmatrix} x_1 - x_3 & dx_3 \\ y_1 - y_3 & dy_3 \end{vmatrix}$$

Schreibt man deren Strecke $\overline{O_3 O_1}$ die Länge r und die Richtung φ zu, so kann man den ersten Ausdruck in Δ also geben:

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_3 & d(x_1 - x_3) \\ \eta_1 - y_3 & d(y_1 - y_3) \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} r\cos\varphi & dr.\cos\varphi - r\sin\varphi\, d\varphi \\ r\sin\varphi & dr.\sin\varphi + r\cos\varphi\, d\varphi \end{vmatrix} = r^2 d\varphi$$

Schreibt man ferner der Fortschreitungsrichtung von Q_3 die Länge ds und die Richtung ψ zu, so verwandelt sich der zweite Teil von Δ, wie folgt:

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_3 & dx_3 \\ y_1 - y_3 & dy_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} r\cos\varphi & ds.\cos\psi \\ r\sin\varphi & ds.\sin\psi \end{vmatrix} = r \,.\, ds \,.\, \sin(\psi - \varphi)$$

Führt man diese Werte in Δ ein, so erhält man schliesslich die Formel:

$$\Delta = \varkappa^2 \left(\frac{r^2}{2}\, d\varphi\right) - \varkappa \,.\, r \,.\, ds \,.\, \sin(\psi - \varphi)$$

Die Integration der Elemente Δ ergibt für das von uns früher erwähnte Band:

$$\Phi_1 - \Psi_1 = \varkappa_2 \int \frac{r^2}{2}\, d\varphi - \varkappa \,.\, r \int ds \,.\, \sin(\psi - \varphi)$$

Digitized by Google

Sehen wir zunächst davon ab, dass die Integrale speciellen Relationen genügen, so gilt doch wenigstens:

$$\text{Det.} \mid \Phi \; x^2 \; x \; 1 \mid = 0$$

was anzeigt, dass unsere Systemfläche Π jedenfalls im allgemeinen ein elliptisches Paraboloid ist.

Gehen wir nun auf die Integrale näher ein. Das erste stellt den Inhalt einer Kreisfläche vom Radius r dar, so oft mal genommen, als der Vector $\overline{Q_3 Q_1}$ volle Umdrehungen in der festen Ebene E' beschreibt. Wird die letztere Zahl mit ε bezeichnet, so ist:

$$\int \frac{r^2}{2} d\varphi = \varepsilon(r^2\pi)$$

Setzen wir ε als von null verschieden voraus, so lautet die zugehörige Flächenrelation nunmehr

$$\text{Det.} \mid \Phi_i - \varepsilon x_i^2 r_i^2 \pi \; x_i \; 1 \mid = 0$$

oder

$$\text{Det.} \mid \Phi_i \; x_i \; 1 \mid - \varepsilon\pi r^2 \mid x_i^2 \; x_i \; 1 \mid = 0$$

Da x^2 nicht verschwindet, so hat die Erkenntniss der Auswertbarkeit des ersten Integrales im allgemeinen Falle keine weitere Folge für die Systemfläche Π, welche sohin ein Rotationsparaboloid bleibt.

Ist aber $\varepsilon = 0$, d. h. kehrt der Vector $\overline{Q_3 Q_1}$ bei der Bewegung der starren Ebene E' schliesslich ohne Umkreisungen in seine Ausgangsposition zurück, oder wird die Summe seiner positiven Umkreisungen gleich der Summe seiner negativen, so fällt in der zuletzt entwickelten Gleichung der zweite Teil fort, und die Flächengleichung

$$\text{Det.} \mid \Phi_i \; x_i \; 1 \mid = 0$$

wird in φ und x linear, d. h. der Schnitt der über der Geraden $Q_3 Q_1$ errichteten Lotebene mit der Systemfläche ist eine reelle Gerade.

Da das Verschwinden von ε nicht an einer speciellen Geraden haftet, werden doch durch dasselbe auch die Umdrehungen der starren Ebene E' gemessen, so gehören auch jeder andern Geraden in E' ausser $Q_3 Q_1$ lineare Flächenrelationen zu, denen Gerade auf der Systemfläche entsprechen. Dies ist bei dem elliptischen Charakter der Systemfläche nur möglich, wenn selbe in eine Ebene ausartet. Wir gewinnen hiernach den Satz:

Digitized by Google

„Bewegt sich eine starre Ebene E' in einer festen „Ebene so, dass die Zahl ihrer positiven Umdrehungen „gleich der Zahl ihrer im negativen Sinne vollführten Um- „drehungen ist, so ist die Systemfläche Π, welche den „Punkten P von E' in den Ordinaten Φ die umschriebe- „nen Flächenräume zuordnet, eine Ebene".

Bekanntlich kann die Ebene als ein Rotationsparaboloid mit $\varkappa$ ferner Axe aufgefasst werden, so dass sich der Specialfall dem allgemeinen unterordnet.

Verschwindet oder specialisirt sich das zweite Integral in der Formel

$$\Phi_1 - \Psi = \varkappa^2 \int_2^{r^2} d\varphi - \varkappa r \int_{\bar{}}^{\bar{}} ds \sin(\psi - \varphi)$$

so hat dies auf den Charakter der Systemfläche Π keinen Einfluss da der besprochene Term bloss die erste Potenz von $\varkappa$ enthält.

Nehmen wir z. B. an, die Gerade $Q_3 Q_1$ und mit ihr die Ebene E' rotiere um einen Punkt Q_3, dann ist erstlich

$$\Psi = 0$$

(Inhalt der von Q_3 umschriebenen Fläche), ferner der Wert des zweiten Integrales null (ds Bogenelement der von Q_3 beschriebenen Curve) folglich lautet für diesen scheinbar einfachsten Fall die Flächenrelation:

$$\Phi = \varepsilon r^2 \pi \varkappa^2$$

Diese in Φ lineare, in $\varkappa$ quadratische Gleichung besagt, dass die Systemfläche π dadurch entsteht, dass die Parabel

$$\Phi = \varepsilon r^2 \pi \varkappa^2$$

mit der Geraden um den Pol Q_3 rotiert. Wir haben es also — genau wie im allgemeinsten Falle — mit einem Rotationsparaboloide zu tun, das nur dadurch ausgezeichnet ist, dass sein Scheitel mit Q_3, seine Scheitelebene mit E zusammenfällt.

Zugleich ersehen wir, dass jeder anderen Zahl ε von Umdrehungen der beweglichen starren Ebene E' gegen die feste Ebene E ein anderes Rotationsparaboloid d. h. eine andere Systemfläche Π zukommt, die für $\varepsilon = 0$ in eine Ebene ausartet, wie es sein muss.

Digitized by Google

§ 7.

Bewegung einer geodätischen Strecke auf Flächen constanter Krümmung.

Wir wollen uns hiermit dem zweiten Teil unserer Betrachtungen zuwenden. Bevor wir jedoch auf unsere eigentliche Aufgabe des Näheren eingehen, werden wir, um sie vorzubereiten, zunächst die Integration eines gewissen Flächenkreises ausführen.

Zu dem Ende denken wir uns durch einen Punkt O einer Fläche constanter Gauss'scher Krümmung zwei unendlich benachbarte geodätische Linien von der Länge u gezogen, die bei O einen Winkel dv mit einander bilden. Zwischen diesen liegt ein Flächenstreifen von der Grösse:

$$dE = \int_0^u m \, du \, dv$$

wobei m den Wert:

$$\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2}$$

vorstellt. Da nun allgemein für das durch den Pol O charakterisierte Polarcoordinatensystem, dessen Radienvectoren durch kürzeste Linien gebildet werden, die Gleichung

$$\varkappa = -\frac{1}{m} \cdot \frac{\partial^2 m}{\partial u^2}$$

besteht; worin $\varkappa$ das Gaus'sche Krümmungsmass vorstellt, so kann man die obige Formel für dE wie folgt umformen:

$$dF = \int_0^u -\frac{1}{\varkappa} \cdot \frac{\partial^2 m}{\partial u^2} \cdot du \cdot dv$$

Für diese Integration ist $\varkappa$ eine Constante, da wir es mit einer Fläche von constanter Krümmung zu tun haben; ebenso ist v als Constante zu behandeln, da es sich blos um Integration eines Flächenstreifens handelt, für den dies der Fall ist. Unter Berücksichsigung des weiteren Umstandes, dass $\frac{\partial m}{\partial u}$ für $u = 0$ gleich der Einheit wird, ergibt die Auswertung des angeschriebenen Integrals:

$$dF = \frac{1}{\varkappa} \cdot dv \cdot \left[1 - \frac{\partial m}{\partial u}\right]$$

Digitized by Google

Der Wert von dF ist aber für unseren Zweck noch weiter umzuformen, so dass er als explicite Function der Grösse u erscheint. Dies gelingt, indem die durch

$$\varkappa = -\frac{1}{m} \cdot \frac{\partial^2 m}{\partial u^2}$$

gegebene lineare Differentialgleichung in unserem Fall (constantes $\varkappa$ und constantes v) integrirbar wird. Um diese Integration auszuführen, unterscheiden wir, da wir von der Möglichkeit $\varkappa = 0$ als bereits erledigt absehen, die zwei Unterabteilungen, je nachdem $\varkappa$ positiv bzhw. negativ ist.

1) $\varkappa$ ist positiv.

Die Lösung der linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit constanten Coefficienten,

$$\frac{\partial^2 m}{\partial u^2} + m\varkappa = 0$$

liefert unter der obigen Voraussetzung, wie bekannt:

$$m = \frac{A}{\sqrt{\varkappa}} \cos(\sqrt{\varkappa}u) - \frac{B}{\sqrt{\varkappa}} \sin(\sqrt{\varkappa}u)$$

Hieraus folgt durch Differentiation:

$$\frac{\partial m}{\partial u} = -A \sin(\sqrt{\varkappa}u) - B \cos(\sqrt{\varkappa}u)$$

Führt man diesen Wert in den Ausdruck für dF ein, so ergibt sich die früher gewünschte Umformung:

$$dF = \frac{1}{\varkappa} \cdot dv \cdot [1 + A \sin(\sqrt{\varkappa}u) + B \cos(\sqrt{\varkappa}u)]$$

2) $\varkappa$ ist negativ.

Die Differentialgleichung wird unter dieser Annahme

$$\frac{\partial^2 m}{\partial u^2} - m\varkappa = 0, \quad \varkappa \text{ absolut}$$

und ihre Lösung

$$m = \frac{A}{\sqrt{\varkappa}} e^{-\sqrt{\varkappa}u} - \frac{B}{\sqrt{\varkappa}} e^{+\sqrt{\varkappa}u}$$

die Differentiation ergibt:

Digitized by Google

image
not
available

$$\Delta_i - \Delta_0 = a_1 \sin(\sqrt{\varkappa}\, u_i) + a_2 \cos(\sqrt{\varkappa}\, u_i - 1)$$

wobei

$$a_1 = \{A \cos(\sqrt{\varkappa}\, u) - B \sin(\sqrt{\varkappa}\, u)\} \frac{1}{\varkappa} \cdot dv$$

$$A_9 = \{A \sin(\sqrt{\varkappa}\, u) + B \cos(\sqrt{\varkappa}\, u)\} \frac{1}{\varkappa} \cdot dv$$

gesetzt wurde, Die Integration der Bandelemente liefert:

$$\Phi_i - \Phi_0 = \int (\Delta_i - \Delta_0) = \sin(\sqrt{\varkappa}\, u_i) \int a_1 + (\cos(\sqrt{\varkappa}\, u_i) - 1) \int a_2$$

Die Integralfälle sind Specifica der Bewegung. Sie zu eliminieren, erteilen wir dem u_i vier verschiedene Werte, d. h. zeichnen auf der geodätischen Strecke neben P_0 noch vier weitere Punkte $P_1 P_2 P_3 F_4$ aus, denen die Entfernungen u_1, u_2, u_3 bzhw. u_4 von P_0 zukommen Als Elminationsresultat erhalten wir dann:

$$\begin{vmatrix} \Phi_1 & 1 & \sin(\sqrt{\varkappa}\, u_1) & \cos(\sqrt{\varkappa}\, u_1) \\ \Phi_2 & 1 & \sin(\sqrt{\varkappa}\, u_2) & \cos(\sqrt{\varkappa}\, u_2) \\ \Phi_3 & 1 & \sin(\sqrt{\varkappa}\, u_3) & \cos(\sqrt{\varkappa}\, u_3) \\ \Phi_4 & 1 & \sin(\sqrt{\varkappa}\, u_4) & \cos(\sqrt{\varkappa}\, u_4) \end{vmatrix} = 0$$

Diese Gleichung stellt die Flächenrelation auf positiv gekrümmten Flächen vor. Man ersieht, dass alle Punkte der bewegten geodätischen Strecke, von denen je aufeinander folgende den Abstand

$$\varepsilon = \frac{2\pi}{\sqrt{\varkappa}}$$

besitzen, gleiche Flächen Φ umkreisen.

2) $\varkappa$ mit dem negativen Zeichen:

$$\Delta_i = -\frac{1}{\varkappa} \cdot dv \; [1 + e^{-\sqrt{\varkappa}\, u_i} \{Ae^{-\sqrt{\varkappa}\, u_i}\} + e^{+\sqrt{\varkappa}\, u_i} \{Be^{+\sqrt{\varkappa}\, u_i}\}]$$

Digitized by Google

image
not
available

$$\sqrt{\varkappa} = \frac{1}{R}$$

wenn R den Radius der Kugel bedeutet, ferner ist u die Bogenlänge auf einem sogenannten grössten Kreise der Kugel

$$\sqrt{\varkappa}\, u = \frac{u}{R} = \tilde{\omega}$$

ist dann der zu dem vorhin erwähnten Bogen gehörige Centriwinkel. Unter Einführung dieser in der Trigonometrie gebräuchlichen Bezeichnung verwandelt sich die für Flächen constanter positiver Krümmung gegebene Flächenrelation in die folgende:

$$\text{Det.} \mid \sin\tilde{\omega}_i \quad \cos\tilde{\omega}_i \quad 1 \quad \Phi_i \mid = 0$$

Werden die Centriwinkel über alle Grenzen klein, so kann man für $\sin\tilde{\omega}$ und $\cos\tilde{\omega}$ die ersten Glieder der ihnen entsprechenden Reihen setzen und erhält

$$\text{Det.} \mid \tilde{\omega}_i \quad \tilde{\omega}_i^2 \quad 1 \quad \Phi_i \mid = 0$$

Lässt man gleichzeitig den Kugelradius über alle Grenzen wachsen, so erhält man hieraus die früher abgeleitete Formel für die Ebene:

$$\text{Det.} \mid \varkappa^2 \quad \varkappa \quad 1 \quad \Phi_i \mid = 0$$

§ 8.

Pantagraphe.

Wie wir in der Einleitung des § 1. bemerkten, gibt es Apparate, welche gestatten den Punkt P, welcher der Gleichung

$$P = \varkappa Q_1 + \lambda Q_2 + \mu Q_3$$

genügt, zu construiren. Sie führen nach Sylvester den Namen Pantagraphe. Die allgemeine Theorie dieser Pantagraphe hat der Verfasser in einem Aufsatze in der Zeitschrift für Mathematik und Physik von Dr. O. Schlömilch ausführlich dargelegt. Hier soll es sich bloss darum handeln einen der möglichen Apparate, der P construiert, anzugeben.

Zu dem Ende formen wir den Ausdruck von P in folgender Weise um:

$$\begin{aligned} P &= \varkappa Q_1 + \lambda Q_2 + \mu Q_3 \\ &= [\varkappa Q_1 + (1+\lambda) Q_2 + \mu Q_3] - Q_2 \end{aligned}$$

Da nun

image
not
available

Apparates, können nunmehr die Basispunkte $Q_1 Q_2 Q_3$ unabhängig von einander verschoben werden. Hiernach genügt der Apparat den Bedingungen des § 1.

Wie man bemerkt haben wird, wurde der Basispunkt Q_2 bei der Umformung des Ausdruckes

$$P = \varkappa Q_1 + \lambda Q_2 + \mu Q_3$$

ausgezeichnet. Wir wollen nunmehr einen Apparat erwähnen, bei dem eine solche Bevorzugung nicht stattfindet.

Es seien (vergl. Fig. 3.) $\mathfrak{A}Q_1$, $\mathfrak{A}Q_2$, $\mathfrak{A}Q_3$ drei in $\mathfrak{A}$ gelenkig verbundene Stäbe mit den Teilpunkten x, y, z. Construirt man nun das der Addition

$$\mathfrak{A}x + \mathfrak{A}y + \mathfrak{A}z$$

entsprechende ebene Parallelepiped, so ist der dem $\mathfrak{A}$ gegenüberliegende Resultantenpunkt A desselben ein invariabler der variablen Ebene $Q_1 Q_2 Q_3$, wenn x, y, z in folgender Weise gewählt werden:

$$\begin{aligned} x &= \varkappa Q_1 + (1 - \varkappa)\mathfrak{A} \\ y &= \lambda Q_2 + (1 - \lambda)\mathfrak{A} \\ z &= \mu Q_3 + (1 - \mu)\mathfrak{A} \end{aligned}$$

denn dann ist

$$\begin{aligned} A &= x + y + z - 2\mathfrak{A} \\ &= \varkappa Q_1 + \lambda Q_2 + \mu Q_3 \end{aligned}$$

Der Apparat hat aber nicht die in § 1 geforderte Beweglichkeit. Es würde ihm also eine andere, speciellere Flächenrelation zukommen, als die dort abgeleitete. Um dies zu vermeiden, könnte man statt des Stabes $\mathfrak{A}Q_1$ (oder statt aller Stäbe $\mathfrak{A}Q_i$) je einen Sylvesterschen Storchschnabel zur Anwendung bringen, welcher den verlangten Teilpunkt x (bzhw. y, z) liefert und die Beweglichkeit der Punkte Q_i erhöht.

Um einen Punkt P in der ähnlich veränderlichen Ebene des § 5. zu fixieren, benutzen wir wol am einfachsten den Sylvesterschen Plagiograph. Derselbe geht aus dem oben beschriebenen Storchschnabel dadurch hervor, dass man die dort erwähnten Teilpunkte x und y nicht direct auf den Stäben, sondern als Spitzen ähnlicher Dreiecke über diesen Stäben annimmt (Fig. 4.). Denn wie dort ergibt sich:

$$\begin{aligned} x &= \varrho Q + \sigma\mathfrak{A}, \quad \varrho + \sigma = 1 \\ y &= \varrho\mathfrak{A} + \sigma Q' \end{aligned}$$

Digitized by Google

image
not
available

XVI.

Miscellen.

1.

Gleichseitig hyperbolischer Schnitt der Fläche zweiten Grades.

§ 1. Einige Bemerkungen, wenn sie auch nur Bekanntes enthalten, mögen der Stellung der Aufgabe vorausgehen.

Die Gleichung

$$ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+\mu=0 \tag{1}$$

drückt bei variirendem μ eine Schar ähnlicher Kegelschnitte aus. Denn verschiebt man die Figur durch Substitution $x+\alpha$, $y+\beta$ für x, y und bestimmt α, β durch die Gleichungen

$$a\alpha+b\beta+d=0;\quad b\alpha+c\beta+e=0$$

so geht Gl. (1), wenn nicht

$$a:b=b:c$$

ist, über in

$$ax^2+bxy+cy^2+M+\mu=0 \tag{2}$$

Setzt man hier $\varkappa x$, $\varkappa y$ für x, y, wo

$$\varkappa^2=\frac{M+\mu}{M+\mu_1}$$

so geht Gl. (2) über in

$$ax^2+2bxy+cy^2+M+\mu_1=0 \tag{3}$$

Digitized by Google

image
not
available

abhängigen Term, ζ nur in diesem und in den linearen Termen enthält, und drückt den Schnitt der beliebigen Ebene und des Hyperboloids aus. Ist dann der Schnitt für irgend ein μ und irgend ein ζ eine gleichseitige Hyperbel, so ist er es nach obigem Satze für jedes μ und jedes ζ.

§ 2. Vermöge der vorstehenden Betrachtungen reducirt sich die Aufgabe: „Ein gegebenes Hyperboloid durch eine Ebene in einer gleichseitigen Hyperbel zu schneiden" — auf die: „Zwei auf einander senkrechte Seiten eines gegebenen Kegels zu finden".

Sei nämlich das Hyperboloid in der Form (4) gegeben, O der Mittelpunkt, OG, OG_1 zwei Seiten des Asymptotenkegels $\mu = 0$, Winkel GOG_1 ein rechter; dann genügen alle der Ebene GOG_1 parallelen Ebenen der Aufgabe.

Zwei Seiten des Kegels $\mu = 0$ erhält man, indem man in den Gl. (5) $\zeta = 0$ und erst $\eta = 0$, dann $\xi = 0$ setzt; dann wird bzhw.

$$x = a\xi; \quad y = b\xi; \quad z = c\xi$$
$$x = a_1\eta; \quad y = b_1\eta; \quad z = c_1\eta$$

und nach Einführung in Gl. (4) bzhw.

$$\left.\begin{aligned} m\left(\frac{a}{c}\right)^2 + n\left(\frac{b}{c}\right)^2 &= 1 \\ m\left(\frac{a_1}{c_1}\right)^2 + n\,\frac{b_1}{c_1}\left(\frac{b_1}{c_1}\right)^2 &- 1 \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Aufgabe ist

$$\frac{a}{c}\,\frac{a_1}{c_1} + \frac{b}{c}\,\frac{b_1}{c_1} + 1 = 0 \tag{7}$$

Die Gl. (6) lassen sich für positive m, n erfüllen durch

$$\left.\begin{aligned} \frac{a}{c} &= \frac{\cos\vartheta}{\sqrt{m}}; \quad \frac{b}{c} = \frac{\sin\vartheta}{\sqrt{n}} \\ \frac{a_1}{c_1} &= \frac{\cos\vartheta_1}{\sqrt{m}}; \quad \frac{b_1}{c_1} = \frac{\sin\vartheta_1}{\sqrt{n}} \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

und Gl. (7) wird

$$\frac{\cos\vartheta\cos\vartheta_1}{m} + \frac{\sin\vartheta\sin\vartheta_1}{n} + 1 = 0$$

Ihre Auflösung ergibt:

Digitized by Google

image
not
available

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{m} = m'; \quad \frac{n}{m} = -n'; \quad \mu = -m\mu' \\ x = x'; \quad y = y': \quad z = x' \end{array}\right\} \qquad (10)$$

Dann geht Gl. (4) über in

$$-m'x'^2 - n'y'^2 + z'^2 = \mu'$$

wo m' und n' positiv sind. Dann kann man die gefundenen Formeln auf Gl. (9) anwenden und mittelst der inversen Substitutionen (10) auf die anfängliche Beziehung zurückkehren.

§ 3. Da ein Ellipsoid und elliptisches Paraboloid von keiner Ebene in einer Hyperbel geschnitten werden kann, so bleibt nur noch das hyperbolische Paraboloid zu untersuchen, welches durch die Gleichung

$$-mx^2 + ny^2 + 2\nu z = 0$$

dargestellt sein mag, bei variirendem ν sich ähnlich bleibt und für $\nu = 0$ in das Ebenenpar

$$x = \pm y\sqrt{\frac{u}{m}}$$

degenerirt. Parallele Ebenen schneiden jene ähnlichen Paraboloide in ähnlichen Hyperbeln und jenes Ebenenpar in dem gemeinsamen Asymptotenpar; alle Schnittpunkte sind gleichseitige Hyperbeln, wenn ein Asymptotenpar einen rechten Winkel bildet. Einzige Aufgabe ist demnach, auf 2 gegebene Ebenen die Schenkel eines rechten Winkels zu legen.

Seien also

$$\frac{x}{\sqrt{n}} = \frac{y}{\sqrt{m}} = \frac{z}{p} \quad \text{und}$$

$$\frac{x}{\sqrt{n}} = -\frac{y}{\sqrt{m}} = \frac{z}{q}$$

bzhw. die Gleichungen der Schenkel auf erster und zweiter Ebene; dann ist Bedingung des rechten Winkels zwischen ihnen:

$$n - m + pq = 0$$

mithin die Gleichungen des zweiten Schenkels:

$$\frac{x}{\sqrt{n}} = -\frac{y}{\sqrt{m}} = \frac{pz}{m-n}$$

und die Gleichung aller Ebenen, welche das Paraboloid in gleichseitigen Hyperbeln schneiden:

Digitized by Google

image
not
available

Zwischen den Gliedern der Horizontalreihen dieses Systems besteht die Differenz 9. — Alle Glieder einer jeweiligen dieser Horizontalreihen haben die gleiche, zu der betreffenden Reihe gehörige, in Bezug auf den Modul 9 reducirte Quersumme. Die in Bezug auf den Modul 9 reducirten Quersummen sind die Zahlen 1 bis 9. Multiplicirt man zwei der Reihe 1 bis 9 angehörige Zahlen miteinander, so ist die nach dem Modul 9 reducirte Quersumme des Products stets eine der Zahlen 1 bis 9. — Scheidet man aus den obigen Reihen diejenigen aus, welche nur Zahlen enthalten, die durch die Primzahl 3 teilbar sind, so bleiben die folgenden Reihen bestehen:

1, 10, 19, . . .
2, 11, 20, . . .
4, 13, 22, . . .
5, 14, 23, . . .
7, 16, 25, . . .

Multiplicirt man die Quersummen der Zahlen dieser Reihen, nämlich 1, 2, 4, 5, 7, 8 zu je zwei mit einander, so erhält man die folgenden Producte:

$1 . 1 = 1$

$1 . 2 = 2 \quad 2 . 2 = 4$

$1 . 4 = 4 \quad 2 . 4 = 8 \quad 4 . 4 = 16 \equiv 7$

$1 . 5 = 5 \quad 2 . 5 = 10 \equiv 1 \quad 4 . 5 = 20 \equiv 2 \quad 5 . 5 = 25 \equiv 7$

$1 . 7 = 7 \quad 2 . 7 = 14 \equiv 5 \quad 4 . 7 = 28 \equiv 1 \quad 5 . 7 = 35 \equiv 8$

$7 . 7 = 49 \equiv 4$

$1 . 8 = 8 \quad 2 . 8 = 16 \equiv 7 \quad 4 . 8 = 32 \equiv 5 \quad 5 . 8 = 40 \equiv 4$

$7 . 8 = 56 \equiv 2 \quad 8 . 8 = 64 \equiv 1$

Hieraus ergiebt sich die folgende Tabelle für die reducirten Quersummen der nicht durch 3 teilbaren, aus zwei Factoren zusammengesetzten Zahlen und ihrer Factoren:

Quersumme der Zahlen	Quersumme der Factoren:
1	1 u. 1 . 2 u. 5 . 4 u. 7 . 8 u. 8
2	1 u. 2 . 4 u. 5 . 7 u. 8
4	1 u. 4 . 2 u. 2 . 5 u. 8 . 7 u. 7
5	1 u, 5 . 2 u. 7 . 4 u. 8
7	1 u. 7 . 2 u. 8 . 4 u. 4 . 5 u. 5
8	1 u 7 . 2 u. 4 . 5 u. 7

Für die Prüfung einer Zahl, die nicht den Factor 3 enthält, auf ihre Teilbarkeit oder Primitivität ergiebt sich aus den obigen

Digitized by Google

image
not
available

$$U^2 = 2^2.$$

$$2^2,\ 4^2,\ 6^2,\ 8^2,\ 10^2,\ \ldots$$
$$3^2,\ 5^2,\ 7^2,\ 9^2,\ 11^2,\ \ldots$$

Die Zahlen der ersten Reihe geben bei Division durch 2^2 den Rest 0. Die Zahlen der zweiten Reihe geben bei Division durch 2^2 alle den Rest 1 und die Quotienten sind 2, 6, 12, 20, . . . Die Reihe der Determinanten der Gleichung $T^2 - D2^2$ ergiebt sich somit aus der Formel x^2+3x+2.

$$U^2 = 3^2.$$

$$3^2,\ 6^2,\ 9^2,\ 12^2,\ 15^2,\ \ldots$$
$$4^2,\ 7^2,\ 10^2,\ 13^2,\ 16^2,\ \ldots$$
$$5^2,\ 8^2,\ 11^2,\ 14^2,\ 17^2,\ \ldots$$

Die Zahlen der ersten Reihe geben bei Division durch 3^2 den Rest 0. Die Periode der Reste, welche die Zahlen der zweiten Reihe bei der Division durch 3^2 zurücklassen, ist 7, 4, 1 und die Periode der Reste der Zahlen der 3ten Reihe ist 7, 1, 4. Der Rest 1 muss also immer nach einem Zwischenraum von 3 Zahlen wieder zur Erscheinung kommen. Die Determinanten der Gleichung

$$T^2 - D3^2 = 1$$

ergeben sich somit aus den Formeln $9x^2+20x+11$ und $9x^2+16x+7$.

Wir können mit dieser Bestimmung der Determinanten der Gleichung

$$T^2 - DU^2 = 1 \quad \text{resp. der Gleichung} \quad T^2 - DU^2 = m^2$$

weiter fortfahren und in ähnlicher Weise auch aus den 3ten, 4ten, . . . $x$ten Potenzen der Zahlen der nat. Zahlenreihe diejenigen absondern, welche bei Division durch ein U^x die Zahl 1^x resp. die Zahl m^x zurücklassen. In unseren Aufsätzen über die Auflösung der Pell'schen Gleichung

$$T^2 - DU^2 = 1$$

und über die Auflösung der Gleichung

$$T^2 - DU^2 = m^2$$

haben wir aber schon Lösungsformeln aufgestellt, aus denen man für diese Gleichungen die betreffenden Determinanten entnehmen kann. Diese Lösungsformeln sind die folgenden:

Digitized by Google

image
not
available

und so die Rechnung vereinfachen. Eine bequeme Abkürzung der Rechnung ist auch die, dass man nur die zweistellige Endung eines jeweiligen Gliedes feststellt und diejenigen Glieder, deren zweistellige Endung eine Quadratzalendung ist, einer weiteren Prüfung unterzieht. Es sei z. B. die Congruenz $x^2 \equiv 22 \pmod{97}$ zu lösen. $22 + 1 \cdot 97 = 119$. Die zweistellige Endung dieser Zahl ist $19 \cdot 97 = 100 - 3$. Statt der stetigen Hinzuzählung von 97 kann man hier ein stetiges Abziehen von 3 vornehmen. So erhält man

19, 16, 13, 10, 07, 04, 01, 98, 95, 92, 89, . . .

Von diesen zweistelligen Endungen sind nur die Endungen 16, 04, 01 und 89 Endungen von Quadratzahlen und es findet sich, dass die Quadratzahl mit der Endung 89, also $1089 \equiv 22 \pmod{97}$ ist.

2.

Verteilt man die Zahlen 1 bis $p-1$ in eine Doppelreihe in der Weise, dass zwei untereinander stehende Zahlen zusammen gleich p sind, so haben die 2ten Potenzen je zweier untereinander stehenden Zahlen nach dem Modul p bekanntlich den gleichen Rest. Es müssen also, wenn die Congruenz $x^2 \equiv a \pmod{p}$ in ganzen Zahlen auflösbar ist, in der bezeichneten Doppelreihe auch zwei unter einander stehende Zahlen vorhanden sein, die zur 2ten Potenz erhoben in Bezug auf den Modul p den Rest a geben. Die eine dieser Zahlen ist gleich $\frac{p-1}{2} - k$ und die andere gleich $\frac{p+1}{2} + k$. Hat man also den Wert von k gefunden, so ist die Congruenz als gelöst zu betrachten. — Die Differenz zwischen den Potenzen $\left(\frac{p-1}{2}\right)^2$ und $\left(\frac{p-1}{2}+1\right)^2$ ist stets gleich p. Da nun die Differenzen zwischen den 2ten Potenzen der auf einander folgenden Zahlen der natürlichen Zahlenreihe auf einander folgende ungerade Zahlen sind, so sind die Differenzen zwischen den Zahlen $\left(\frac{p-1}{2}\right)^2$ und $\left(\frac{p-1}{2}+1\right)^2$, $\left(\frac{p-1}{2}+1\right)^2$ und $\left(\frac{p-1}{2}+2\right)^2$ . . . gleich p, $p+2$, $p+4$, . . . Lassen wir nun in der Zahlenreihe p, $p+2$, $p+4$, . . . die Modulzahl p fort, so bleibt die Reihe 2, 4, 6, . . . , d. i. die Reihe der geraden Zahlen stehen. Bildet man zu dieser Reihe das allgemeine Glied der Summenreihe, so hat man

1) $$s^2 + 3s + 2$$

Der Wert dieser Summenreihe muss nun nach Hinzunahme des

Digitized by Google

image
not
available

$\frac{367-1}{2} - 40$ und $\frac{367+1}{2} + 40$, d. i. 143 und 224 sind Wurzeln der gegebenen Congruenz.

3.

Die unter 2. beschriebene Methode ist sehr bequem und führt immer dann rasch zum Ziele, wenn die beiden Glieder mit dem Rest a nicht allzuweit von $\frac{p-1}{2}$ entfernt sind und nicht etwa zu Anfang der Doppelreihe stehen. Zweckmässig wendet man die in 1. und 2. beschriebenen Methoden zusammen an und sucht also von beiden Seiten zu dem Rest a zu gelangen.

Oldenburg i. Gr. G. Speckmann.

Digitized by Google

image
not
available

dieses Jahrhunderts eine Vereinzelung der Arbeiten in verschiedenen wissenschaftlichen Journalen, welche der Entwicklung der Wissenschaft nicht immer dienlich war. Konnte doch dadurch der Anreiz entstehen, noch nicht abgeschlossene Arbeiten unfertig zu publiciren oder für solche Abhandlungen, gegen die sich die Redactionen ablehnend verhielten, und für die dem Inhalte nach in den bezeichneten Journalen kein Platz war, eine neue Heimstätte zu suchen. Allerdings bedingte auch die ganze Entwickelung der einzelnen Wissenschaften eine Erweiterung der Publicationen; vielfach traten verwandte Zweige der einzelnen Disciplinen mit den bis dahin abgeschlossenen andern Wissenschaften in nahe Beziehung, und die Industrie, welche an der Hand der Wissenschaften einen so bedeutenden Aufschwung genommen hatte, wirkte wiederum auf dieselben fördernd und erweiternd, so dass auch die technischen Seiten der Wissenschaft berücksichtigt werden mussten. So wuchs die Production in den einzelnen Wissenschaften so bedeutend, dass Journale, die früher mehrere Wissenschaften vertraten (Annalen der Physik und Chemie von Poggendorff) mehr und mehr sich auf die Arbeiten einer Wissenschaft beschränken mussten. Schon vor der Gründung der Fortschritte der Physik hatte Berzelius in seinen Jahresberichten ein Vorbild für solche Uebersichten gegeben, und heutzutage haben sich dieselben als so notwendig erwiesen, dass nicht nur in den exacten Wissenschaften einschliesslich der Mathematik, sondern auch in den humanistischen Wissenschaften (Philologie, Geschichte) solche Berichte unter den Namen Jahrbuch, Revue, Bibliothek u. s. w. bestehen. Ist doch der Umfang der Wissenschaften so gewachsen, dass jetzt sogar für einzelne Zweige derselben Wissenschaft besondere Jahresberichte eingerichtet werden, wie in der Chemie (Fortschritte der reinen Chemie, der chemischen Technologie u. s. w.) Andere Unternehmungen, die den Uebelständen, die durch Zersplitterung der Litteratur herbeigeführt werden, abhelfen sollten, haben sich nicht als praktisch erwiesen. Die Encyklopädien, Wörterbücher, Repertorien veralten oft schon während des Erscheinens, wogegen die auf wissenschaftlichen Grundlagen geordneten Jahresübersichten immer wieder gestatten, die gesamte Litteratur der Einzelwissenschaften zu überblicken. Freilich verlangt die Herstellung der Jahresberichte, wenn sie vollständig sein sollen, grosse Opfer an Arbeit gegen geringe äussere Entschädigung. Sie bieten weder für dan Verleger noch für den Mitarbeiter eine Quelle des Vorteils dar. Die **Fortschritte der Physik** erschienen zuerst bei **G. Reimer** in Berlin und sind bis zum Jahrgange 1887 einschliesslich bei dieser Firma geblieben. Es war durch innere und äussere Gründe das Erscheinen der Bände verzögert, so dass die neue Verlagsfirma „**Vieweg u. Sohn**“ nun als ihre Hauptaufgabe ansieht, ein

Digitized by Google

image
not
available

15b. Circularpolarisation. 15c. Krystalloptik, Doppelbrechung. 16. Chemische Wirkungen des Lichtes 17. Physiologische Optik. 17a. Der dioptrische Apparat des Auges. 17b. Die Licht- und Farbenempfindungen. 17c. Psychische Verarbeitung der Gesichtseindrücke. 18. Optische Apparate. IV. Wärmelehre. 19a. Allgemeine Wärmetheorie. Erster Hauptsatz. 19b. Zweiter Hauptsatz. Anwendung beider Hauptsätze auf thermische Vorgänge. 19c. Kinetische Theorie der Materie. 19d. Technische Anwendungen. 20. Thermometrie und Ausdehnung. 21. Quellen der Wärme. 22. Aenderung des Aggregatzustandes. 22a. Schmelzen, Erstarren. 22b. Sieden und Sublimiren, Condensation. 23. Calorimetrie, specifische und latente Wärme. 44. Verbreitung der Wärme. 24a. Wärmeleitung. 24b. Wärmestrahlung. V. Elektricitätslehre. 25. Allgemeine Theorie der Elektricität und des Magnetismus. 26. Quellen der Elektricität. 27. Elektrostatik. 28. Batterieentladung. 29. Galvanische Ketten. 30. Galvanische Mess- und Hülfsinstrumente. 31. Theorie der Kette. 32. Elektrochemie. 33. Thermoëlektricität und reversible Wärmewirkungen des Stromes. 34. Irreversible Wärmewirkungen des Stromes. 35. Elektrisches Leuchten. 36. Magnetismus. 37. Elektromagnetismus nebst Wirkungen des Magnetismus auf den Strom. 38. Elektrodynamik, Induction. 39. Anwendungen der Elektricität. 39a. Lehrbücher und Zusammenfassendes. 39b. Instrumente und deren technische Anwendung. 39c. Leitungen. 39d. Batterien und Accumulatoren; Elektrolyse. 39e. Dynamomaschinen und Kraftübertragung, Wechselstrommaschinen, Transformatoren. 39f. Telephon und Mikrophon. 39g. Telegraphie, Uhren, Signalwesen. 39h. Beleuchtung. 39i. Verschiedenes. Anhang. 40. Vermischte Constanten. VI. **Kosmische Physik.** 1. Astrophysik. A. Allgemeines und zusammenfassende Arbeiten. B. Planeten und Trabanten. C. Fixsterne und Nebel. D. Sonne E. Kometen. F. Sternschnuppen und Meteorsteine G. Zodiakallicht. 2. Meteorologie. A. Allgemeines. B. Eigenschaften der Atmosphäre. C. Lufttemperatur. D. Luftdruck, E. Winde und Stürme. F. Wasserdampf. G. Niederschläge. H. Atmosphärische Elektricität. J. Atmosphärische Optik. K. Synoptische, L. dynamische, M. praktische, N. kosmische Meteorologie. O. Apparate. P. Klimatologie. 3. Geophysik. A. Allgemeines. B. Theorie der Erdbildung. C. Gestalt, Dichte, Attraction. D. Erdtemperatur. E. Vulcanische Erscheinungen. F. Erdbeben. G. Erdmagnetismus und Polarlichter. H. Niveauveränderungen. J Orographie. K. Erdoberfläche. L. Küsten. M. Ozeanographie. N. Stehende und fliessende Gewässer. O. Gletscher.

Hiernach hat gegen früher die Benennung und Begrenzung der

Digitized by Google

image
not
available

sind. Noch mehr erleichtert wird die Auffindung dadurch werden, dass die frühere Verlagshandlung ein vollständiges Namensverzeichniss der Bände 1865 bis 1887 herausgibt, das sich dem früheren Namenregister für die ersten 20 Jahrgänge (herausgegeben von Barentin) anschliesst. — Die Anordnung der Bände ist eine so übersichtliche, dass es sehr leicht ist, sowol der Sache wie dem Verfasser nach sich zurecht zu finden. In keinem Lande haben sich die Jahresberichte so entwickelt wie in Deutschland, und wenn in der jüngeren Generation in dem nicht ganz unberechtigten Streben nach unmittelbarem Erfolg die historische Seite der Wissenschaften mehr und mehr unberücksichtigt bleibt, und der historische Sinn mehr und mehr schwindet, so vermögen gerade die Fortschritte der Wissenschaften ein Gegengewicht zu geben. Wer jene studirt, wird finden, wie viele Anknüpfungspunkte schon gegeben sind, und wie mancher Gedankengang und manche Tatsachen, die als neu mitgeteilt werden, schon früher gedacht und ausgeführt sind. Da das Werk einen internationalen Charakter trägt, d. h. so viel als möglich alle Litteratur berücksichtigt, sollte es auch in die Bibliotheken und den Privatbesitz in anderen Ländern Eingang finden. Es können diese Litteraturberichte, auch wenn die Herausgabe von einer angesehenen wissenschaftlichen Gesellschaft moralisch unterstützt wird, sich doch nur halten, wenn alle Kreise, die für die Entwicklung der Wissenschaften Interesse haben, das schwierige Unternehmen unterstützen. Die Bibliotheken an Schulen und Instituten sind dazu in erster Reihe neben denen der wissenschaftlichen Gesellschaften berufen. Jetzt, wo das schnellere Erscheinen der Fortschritte gesichert ist, ohne dass dabei der Vollständigkeit des Berichts Eintrag geschieht, wird die wissenschaftliche Welt das Unternehmen um so mehr fördern und unterstützen müssen.

Zum Schluss braucht wol kaum noch hervorgehoben zu werden, dass auch die mathematische Physik ihre volle Berücksichtigung findet. Die mathematischen Entwickelungen können natürlich nicht vollständig wiedergegeben werden, auch mussten die betreffenden Abhandlungen den einzelnen Abschnitten sich einreihen, doch ist es bei der übersichtlichen Anordnung leicht dieselben herauszufinden. Die äussere Ausstattung des Werkes ist vortrefflich, wie man es bei den Werken der bekannten Firma gewohnt ist, die kein Opfer gescheut hat, um dem neuen Arbeitsplan für die Fortschritte der Physik entgegen zukommen. In kürzester Frist wird, wie erwähnt, der Jahrgang 1893, Bd. 49 vollendet sein, und auch der Jahrgang 1889, Bd. 45 ist soweit gefördert, dass er noch in diesem Jahre erscheinen kann, so dass dann regelmässig ein neuer Jahrgang, 1894 im Jahre 1896 gleichzeitig mit 1890, zum Abschluss

Digitized by Google

image
not
available

Astronomische Chronologie. Ein Hülfsbuch für Historiker, Archäologen und Astronomen. Von Dr. Walter F. Wislicenus, a. o. Professor an der Universität Strassburg. Leipzig 1895. B. G. Teubner. 163 S.

Das Buch soll für den Historiker und Archäologen ein Führer sein, der ihn auf die vorhandenen Hülfswerke hinweist und ihm den Gebrauch derselben in einer für ihn leicht verständlichen Weise erklärt. Der erste Teil entwickelt elementar die Anfangsgründe mit Eingehen auf analytische Bestimmung, der zweite lehrt die Methoden der Berechnung mit Anwendung der vorhandenen Hülfsmittel.

H.

The life-romance of an algebraist. By George Winslow Pierce. Boston, J. G. Cupples.

Was auf dem Titel Lebensroman eines Algebraikers genannt wird, ist keine Erzählung, sondern stellt sich dar als eine Sammlung verschiedenartiger Schriftstücke, die vielleicht für künftige biographische Verwendung wertvoll sein können, die aber in der Gestalt, wie sie hier mitgeteilt werden, zum Teil ohne Anfang und Ende, ohne Erklärung und sachliche Beziehung, schwerlich zum Zweck der Veröffentlichung geschrieben sind. Nur ein Blatt macht Angaben über das Leben des von amerikanischen Mathematikern öfters mit Auszeichnung genannten Verfassers, Sohnes von Johann Winslow und Lydia Anna Pierce; geboren in Boston den 24. März 1841. Er besuchte die Harvard Law School, war kurze Zeit Lehrer der Mathematik, bekleidete von da an ein Staatsamt, machte viele Reisen in Europa (wo er den Montblanc bestiegen hat) und in Amerika. Das Buch enthält zum grössten Teil Dichtungen in Versen und in Prosa, voll von Gemüt und Zartheit, aber in unstet schweifender Phantasie zu immer neuen Gegenständen eilend. Auch enthält es eine mathematische Arbeit oder einen Teil einer solchen. Diese beschäftigt sich mit der Lösung der algebraischen Gleichungen $n$ten Grades. Ziel und Resultat hat Ref. darin nicht entdeckt.

H.

Hermann Grassmann's gesammelte mathematische und physikalische Werke. Auf Veranlassung der mathematisch-physikalischen Classe der Kgl. Sächsischen Gesellschaft und unter Mitwirkung der Herren Jacob Lüroth, Eduard Study, Justus Grassmann, Hermann Grassmann der Jüngere, Georg Scheffers herausgegeben von Friedrich Engel. Ersten Bandes erster Teil. Die

Digitized by Google

image
not
available

Das Buch hat 2 Hauptteile: der Bürger Carnot und der Gelehrte Carnot. Der erste beschreibt seine Taten und Schicksale im Dienste aller succedirenden Regirungen Frankreichs, voll von Anfeindungen, aus denen er stets mit Ehren hervorgieng. Auf diese vortrefflich geschriebene Lebensgeschichte, mit der zugleich die politische Geschichte, in unzähligen Punkten darin verflochten, enthüllt und sein Charakter documentirt wird, müssen wir hier verweisen. Er ist geboren den 13. Mai 1753 in Nolay und gestorben den 2. October 1823 in Magdeburg. Im zweiten Teile werden Carnot's Leistungen für die Wissenschaft recht eingehend ans Licht gestellt. Seine Hauptwerke sind: 1) Die Geometrie der Lage. 2) Ueber die Relation, welche zwischen den Entfernungen beliebiger 5 Punkte im Raume besteht, 3) Ueber die Theorie der Transversalen.

H.

Julii Firmici Materni matheseos libri VIII. Primus recensuit Carolus Sitti. Pars I. Libri I—IV. Leipzig, 1894. B. G. Teubner. 246 S.

Das Vorliegende ist ein Band der Bibliotheca scriptorum Graecorum et Romanorum Teubneriana. Die Bezeichnung des Buches auf dem Titel wird durch seinen Inhalt nicht bestätigt. Man findet darin keine Mathematik, sondern nur astrologische Lehren, die der Zeit oder dem Geiste des Verfassers zuzuschreiben sind. Vom Leben des Verfassers ist nur seiner eigenen Aussage zu entnehmen, dass er in Sicilien geboren ist und gewohnt hat, die Zeit bleibt unbekannt.

H.

Monge der Begründer der darstellenden Geometrie als Wissenschaft. Eine mathematisch historische Studie von Professor Ferdinand Jos. Obenrauch. Brünn 1895. Selbstverlag. (Auch enthalten im Jahresbericht der Landes-Oberrealschule in Brünn für das Schuljahr 1892—93.) 32 S.

Gaspard Monge, Sohn des Kaufmanns Jacques Monge ist den 10. Mai 1745 in Beaune geboren. Sein Werk „Géométrie descriptive“ ist erst 1795 erschienen, obwol Monge die darstellende Geometrie bereits seit 30 Jahren als Wissenschaft gelehrt hatte. Die gegenwärtige Schrift bindet sich indes weder an die Person des Autors noch an den genannten Wissenschaftszweig, sondern verbreitet sich, nicht gerade zum Vorteil des Einblicks in den Entwickelungsgang, auch über viele andere Autoren und andere Disciplinen.

H.

Digitized by Google

image
not
available

bereitungsseminar Schönthal ein, studirte Medicin in Tübingen, starb den 22. März 1878. Sein Bild und das seines Hauses sind beigegeben. H.

Abhandlung über die Kräfte der Elektricität bei der Muskelbewegung von Aloisius Galvani. 1791. Herausgegeben von A. J. Oettingen. Mit 21 Figuren und vier Tafeln. Leipzig 1894. Wilhelm Engelmann. 76 S.

Der Verfasser gibt ausführlichen Bericht von seinen sehr vielfach variirten Versuchen zuerst über die Wirkungen der Maschinenelektricität, dann der atmosphärischen Elektricität, dann der tierischen Elektricität auf Muskeln und Nerven von Fröschen und zieht im letzten Teile Schlüsse aus den Ergebnissen. Luigi Galvani ist (den Anmerkungen zufolge) den 9. September 1737 in Bologna geboren. Seit 1762 war er Docent der Medicin, seit 1775 Professor der praktischen Anatomie an der Universität Bologna, dann Professor der Anatomie und Gynäkologie am Istituto di Bologna. Er war verheiratet mit der Tochter seines Lehrers, des Professors Gallazzi. H.

Die Intensität der erdmagnetischen Kraft auf absolutes Maass zurückgeführt. Von Carl Friedrich Gauss. Herausgegeben von E. Dorn. Leipzig 1894. Wilhelm Engelmann. 62 S. (Die vorige und diese Schrift Nr. 52 und 53 in „Ostwald's Klassiker der exacten Wissenschaften".)

Die Ermittelung der Intensität der erdmagnetischen Kraft durch Oscillation von Magnetnadeln ist darum sehr complicirt, weil die Verteilung des Magnetismus in der Nadel nicht nur unbekannt, sondern auch veränderlich ist. Gauss überwindet diese Schwierigkeit dadurch, dass er eine zweite Nadel zugleich oscilliren lässt, beide horizontal, und aus der Wirkung der ersten auf diese ihren Zustand berechnet. Der Gang der Rechnung wird dargelegt.

H.

Digitized by Google

image
not
available

Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften. Nr. 54–59 Leipzig, W. Engelmann. Kart. 54. Anmerkungen u. Zusätze zur Entwerfung der Land- und Himmelscharten. Von J. H. Lambert. (1772.) Hrsg. v. A. Wangerin. M. 1. 60. — 55. Ueber Kartenprojection. Abhandlungen v. Lagrange (1779) u. Gauss (1822). Hrsg. v. A. Wangerin. M. 1. 60. — 56. Die Gesetze der Ueberkaltung u. Gefrierpunkterniedrigung. 2 Abhandlgn. v. Sir Charles Blagden, (1788.) Hrsg. von A. J. Oettingen. — 80. — 57. Abhandlungen üb. Thermometrie v. Fahrenheit, Réaumur, Celsius (1724. 1730—1733, 1742). Hrsg. von A. J. v. Oettingen. M. 2. 40. — 58. Chemische Abhandlung v. der Luft u. dem Feuer v. Carl Wilh. Scheele. (1777.) Hrsg. v. W. Ostwald. M. 1. 80. — 59. Otto v. Guericke's neue „Magdeburgische" Versuche üb. den leeren Raum. (1672.) Aus dem Lat. übers. u. m. Anmerkgn. hrsg. v. Frdr. Danneman. M. 2. —.

Wislicenus, Walt. F., astronomische Chronologie. Ein Hülfsbuch für Historiker, Archaeologen u. Astronomen. Leipzig, B. G. Teubner. Geb. 5 Mk.

Methode und Principien.

Crookes, Will., strahlende Materie u. der 4. Agregatzustand Vortrag. Deutsch v. Heinrich Gretschel. 4. Aufl. Leipzig, Quandt. & Händel. 1 Mk 50 Pf.

Drude, P., Die Theorie der Physik. Antrittsvorlesung. Leipzig, S. Hirzel. 80 Pf.

Mann, Frdr., die logische Grundoperation der Mathematik. Ein Repetitionsmittel für obere Gymnasial- u. Realschulklassen. Leipzig, A. Deichert Nchf. 80 Pf.

Merkel, Eugen, Methodische u. praktische Anleitung zum Denkrechnen. I. Abtlg. Das Normalrechnen. München, M. Kellerer. Kart. 50 Pf.

Muthesius, Karl, über die Stellung des Rechenunterrichts im Lehrplan der Volksschule. Ein Beitrag zur Methodik dieses Unterrichtsgegenstandes und zugleich zur Kritik der Zillerschen Konzentrationsidee. Leipzig, Sigismund & Volkening. 1 Mk. 50 Pf.

Lehrbücher.

Bork, Heinr., mathematische Hauptsätze für Gymnasien. Methodisch zusammengestellt. Pensum für das Untergymnasium (bis zur Abschlussprüfg.). Leipzig, Dürr'sche B. Geb. 1 Mk. 90 Pf.

Hilfsbuch für den geometr. Unterricht in den oberen Klassen der Mittelschule. Hermannstadt, W. Krafft. 80 Pf.

Digitized by Google

image
not
available

Lehrbuch der Arithmetik u. Algebra f. die oberen Klassen der Mittelschulen. 3. Aufl. Wien, C. Gerold's Sohn. 1 Mk. 80 Mk.

Schmehl, Chr., Rechenbuch f. höhere Lehranstalten. 2 Tle. 2. Aufl. Giessen, E. Roth. 3 Mk.; geb. 3 Mk. 60 Pf.

Schürmann, F. u. F. Windmöller, Rechenbuch für gewerbliche und kaufmännische Fortbildungsschulen. Auflösungen zum 2. Tl. Essen, G. D. Baedeker. 50 Pf.

Tabellen.

Jordan, W., mathematische u. geodätische Hülfstafeln. 9. Aufl. Hannover, Helwing's Vlg. 1 Mk.

Reyher, J. G., Hülfs-Tabellen zur Berechnung der Zinsen, von 10000 Mark Kapital herab bis zu 1 Pfennig auf die Zeit von 5 Jahren bis zu 1 Tage, nach den Sätzen von $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, 1, $1\frac{1}{2}$, 2, $2\frac{1}{2}$, 3, $3\frac{1}{3}$, $3\frac{1}{2}$, 4, $4\frac{1}{2}$, 5, $5\frac{1}{2}$, 6 u. 10 Procenten. 7. Aufl. Crossen a./O., R. Zeidler. 3 Mk.

Arithmetik, Algebra und reine Analysis.

Ahrens, J. F., Buchstabenrechnung u. Algebra f. gewerbliche Fortbildungs- u. Fachschulen, Handwerkerschulen, sowie zum Selbstunterricht. 1.—3. Hft. Kiel, Lipsius & Tischer. Kart. 1 Mk. 80 Pf.

Bôcher, Maxime, über die Reihenentwickelungen der Potentialtheorie. Leipzig, B. G. Teubner. 8 Mk.

Cwojdzinski, Tadeusz, Anwendung der Fuchs'schen Theorie auf die Differentialgleichung der Gauss'schen hypergeometrischen Reihe. Brody, F. West. 1 Mk.

Grassmann, Rob., die Folgelehre oder Funktionenlehre streng wissenschaftlich in strenger Formelentwickelung. Nebst Formelbuch. Stettin, R. Grassmann. 3 Mk. 50 Pf.

Haas, Aug., Lehrbuch der Differentialrechnung. 3. Tl.: Anwendung der Differentialrechnung auf die ebenen Kurven. Bearb. nach System Kleyer. Stuttgart, J. Maier. 7 Mk.

Henke, Rich., üb. die Methode der kleinsten Quadrate. 2. Aufl. Leipzig, B. G. Teubner. 2 Mk.

Mertens, F., über die Aequivalenz der reducirten binären quadratischen Formen von positiver Determinante. Wien, F. Tempsky. 30 Pf.

— über den quadratischen Reciprocitätssatz und die Summen von Gauss. Ebd. 40 Pf.

Digitized by Google

image
not
available

Wrobel, E., Leitfaden der Stereometrie, nebst einer grossen Anzahl von Uebungsaufgaben. Zum Gebrauche an höh. Lehranstalten bearb. 2. Aufl. Rostock, W. Werther's Verl.. 1 Mk. 40 Pf.; geb. 1 Mk. 75 Pf.

Trigonometrie.

Graf, J. H., Einleitung in die Theorie der Gammafunktionen u. der Euler'schen Integrale. Bern, K. J. Wyss. 1 Mk. 60 Pf.

Koláček, Frz., über die analytische Darstellung des Huygens'schen Princips. Prag, F. Rivnáč. 40 Pf.

Praktische Geometrie, Geodäsie.

Brathuhn, O., Lehrbuch der praktischen Markscheidekunst unter Berücksicht. d. allgemeinen Vermessungskunde. 2. Aufl. Leipzig, Veit & Co. 10 Mk.

Gross, H., die einfacheren Operationen der praktischen Geometrie. Leeitfaden für den Unterricht an techn. Lehranstalten etc. 4. Aufl. Stuttgart, K. Wittwer. 2 Mk.; kart. 2 Mk. 20 Pf.

Jordan, W., Handbuch der Vermessungskunde. 1. Band. Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate. 4. Aufl. 1. Lfg. Stuttgart, J. B. Metzler. 6 Mk. 60 Pf.

Landes-Triangulation, die kgl. preussischn. Hauptdreiecke. 6. Tl.: A. Die Hannoversch-Sächsische Dreieckskette. B. Das Basisnetz Göttingen. C. Das Sächsische Dreiecksnetz. Berlin, Mittler & Sohn. Kart. 12 Mk.

Láska, W., Lehrbuch der Vermessungskunde. Stuttgart, J. Maier. 10 Mk.

Nivellements der trigonometrischen Abtheilg. der Landesaufnahme. 8. (Schluss-) Bd. Berlin, Mittler & Sohn. Kart. 10 Mk.

Schlieben, W. E. A. v., vollständiges Hand- u. Lehrbuch der gesammten Landmesskunst mit besond. Berücksichtig. d. pr. Vermess.-Vorschr.: Kat. Anw. VIII u. IX v. 25. Okt. 1881. Neu bearb. u. hersg. v. W. Caville. 9. Afl. 1. Bd.: Vorstudien und Instrumentenkunde. 1. Hft. Halberstadt, Ernst'sche B. 2 Mk.

Technik.

Biscan, Wilh., Konstruktionen f. den prakt. Elektrotechniker, nach ausgeführten Maschinen, Apparaten, Vorrichtungen etc. 2. Lfg. Leipzig, O. Leiner. 1 Mk. 50 Pf.

Digitized by Google

image
not
available

Bauer, Louis A., Beiträge zur Kenntniss des Wesens der Säcular-Variation des Erdmagnetismus. Berlin, Mayer & Müller. 3 Mk.

Beobachtungen aus dem magnetischen Observatorium der kaiserl. Marine in Wilhelmshaven. Ausgeführt i. Auftrag des Reichs-Marine-Amts unter Leitung von C. Börgen, hersg. von dem kaiserl. Observatorium zu Wilhelmshaven. 3 Thl. Stündliche Variations-Beobachtungen während der J. 1886, 87, 88. Berlin, E. S. Mittler & Sohn. 2 Mk. 50 Pf.

Drach, C. Alhard v., die zu Marburg im mathematisch-physikalischen Institut befindliche Globusuhr Wilhelms IV. v. Hessen als Kunstwerk und astronomisches Instrument, beschrieben und besprochen. Marburg, N. G. Elwert. 3 Mk. 60 Pf.

Falb, Rud., über Erdbeben. Ein populärer Vortrag. Wien, A. Hartleben. 3 Mk.; geb. 4 Mk.

— kritische Tage, Sintfluth und Eiszeit. Ein populärer Vortrag. Ebd. 3 Mk.; geb. 4 Mk.

Hann, J., die tägliche Periode der Windstärke auf dem Sonnblickgipfel u. auf Berggipfeln überhaupt. Wien, F. Tempsky. 1 Mk. 20 Pf.

Haerdtb, Frh. v., zur Frage der Perihelsbewegung des Planeten Mars. Ebd. 30 Pf.

Jäger, H., Wetter- und Mondkalender für 1895. Stuttgart, W. Kohlhammer. 30 Pf.

Jahrbuch der meteorologischen Beobachtungen der Wetterwarte der Magdeburgischen Zeitung. Hrsg. v. A. W. Grützmacher. XII. Bd. XIII. Jahrg. 1893. Magdeburg, Faber'sche B. Kart. 6 Mk.

Jahrbuch, deutsches meteorologisches, f. 1893. Beobachtungssystem des Königr. Sachsen. Bericht üb. die Thätigkeit im kgl. sächs meteorolog. Institut auf d. J. 1893. Hrsg. von Paul Schreiber. II. Hälfte oder III. Abth. des Jahrbuches des kgl. sächsischen meteorolog. Institutes. XI. Jahrg. 1893. Chemnitz. M. Bülz. 10 Mk.

— dasselbe. Meteorologische Beobachtungen in Württemberg. Mitteilungen der mit dem kgl. statist. Landesamt verbundenen meteorolog. Centralstation. Bearb. v. Mack u. L. Meyer. Stuttgart, Metzler's Vlg. 3 Mk.

Kalender, Astronomischer, f. 1895. Berechnet für den Meridian und die Polhöhe von Wien. Hrsg. v. d. k. k. Sternwarte. Wien, C. Gerold's Sohn. Kart. 2 Mk.

Karstens, Karl, e. neue Berechnung der mittleren Tiefen der Oceane, nebst e. vergleich. Kritik der verschied. Berechnungsmethoden. Kiel, Lipsius & Tischer. 2 Mk.

Karte, bewegliche, des Sternhimmels. (Von Messer.) Kreis-

Digitized by Google

image
not
available

Jahrbuch f. 1894. Beobachtungssyt. des Königr. Preussen u. benachbarter Staaten 1. Hft. Berlin, A. Asher & Co. 2 Mk 50 Pf.

— dasselbe. Ergebnisse der magnet. Beobachtungen in Potsdam in d. J. 1890 u. 91. Ebd. 10 Mk.

Physik.

Abendroth, William, Leitfaden der Physik mit Einschluss der einfachen Lehren der mathematischen Geographie nach der Lehr- u. Prüfungsordnung v. 1893 für Gymnasien. 1. Band. Kursus der Unter- u. Obersekunda. 2. Aufl. Leipzig, Hirzel. 3 Mk. 60 Pf.; geb. 4 Mk.

Annalen der Physik u. Chemie. Hrsg. v. G. u. E. Wiedemann. Neue Folge 53., der ganzen Folge 289. Bd. 5. Hft. od. Jahrg. 1894, 13. Hft. Leipzig, J. A. Barth. 5 Mk.

Eder, J. M. u. E. Valenta, üb. das Spectrum des Kaliums, Natriums u. Cadmiums bei verschiedenen Temperaturen. Wien, F. Tempsky. 1 Mk.

— über die verschiedenen Spektren des Quecksilbers. Aus dem photochemischen Laboratorium der k. k. Lehr- u. Versuchsanstalt für Photographie u. Reproductionsverfahren in Wien. Ebd. 2 Mk. 20 Pf.

Götz, Hans, Lehrbuch der Physik. Zum Gebrauch an Realschulen u. verwandten Lehranstalten. 2. Aufl. München, G. Franz. 3 Mk. 60 Pf.; geb. 4 Mk.

Groth, P., physikalische Krystallographie u. Einleitung in die krystallographische Kenntniss der wichtigeren Substanzen. 3. Aufl. Leipzig, W. Engelmann. 18 Mk.

Handbuch der Physik. 23. u. 24. Lfg. Breslau, E. Trewendt. 7 Mk. 20 Pf.

Jüllig, Max, üb. die Gestalt der Kraftlinien eines magnetischen Drehfeldes. Wien, F. Tempsky. 1 Mk.

Kayser, H., Lehrbuch der Physik für Studirende. 2. Aufl. Stuttgart, F. Enke. 11 Mk.

Klimpert, Rich., Wiederholungs- und Uebungsbuch zum Studium der allgem. Physik u. elementaren Mechanik. Eine Sammlung von 3000 Prüfungsfragen u. Aufgaben, nebst Antworten und Lösungen. Für Lehrer und Studirende an höh. Unterrichtsanstalten. Dresden, G. Kühtmann. 8 Mk.; geb. 9 Mk.

Klemenčič, Ign., über die circulare Magnetisirung von Eisendrähten. Wien, F. Tempsky. 70 Pf.

Koláček, Frz., die ponderomotorischen Wirkungen eines variablen Magnetfeldes auf geschlossene Stromleiter und ihre Ver-

Digitized by Google

image
not
available

lund. IV. Perturbations par les planètes Vénus, la Terre, Mars, Jupiter et Saturne de 1819 jusqu'à 1848. 8 Mk. 50 Pf. — 8. Dasselbe. V. Perturbations par Mercure de 1819 jusqu'à 1891. 2 Mk 50 Pf. — 10. Positions apparentes des taches solaires photographiées à Poulkovo par B. Hasselberg dans les années 1881—1888 Déduites par A. Bélopolsky et M. Morine. 6 Mk. 25 Pf.

Sitzungsberichte, Münchener. Mathemat. Class. 1894. 2. u. 3. Hft. München, Franz' Vlg. 2 Mk. 40 Pf.

— Wiener. Math.-naturw. Classe. Wien, F. Tempsky. Abth. I. 103. Bd. 6. u. 7. Hft. 4 Mk. Abth. II^a. 6. u. 7. Hft. 7 Mk. 90 Pf. Abth. II^b. 6. u. 7. Hft. 2 Mk. 60 Pf. Abth. III. 5.—7. Hft. 1 Mk. 20 Pf.

C. A. Koch's Verlagsbuchhandlung (H. Ehlers & Co.)
Leipzig u. Dresden.

Mathematische Aufgaben

zum Gebrauche
in den
obersten Klassen höherer Lehranstalten.
Aus den
bei Reifeprüfungen
an preussischen Gymnasien und Realgymnasien
gestellten Aufgaben ausgewählt
und
mit Hinzufügung der Ergebnisse (II. Teil)
zu einem Uebungsbuche vereint
von
Prof. H. C. E. Martus,
Direktor des Sophien-Gymnasiums in Berlin.

I. Teil: **Aufgaben.** 9. Auflage. Preis geh. 3 Mk. 60 Pf.
II. Teil: **Ergebnisse.** 7. Auflage. Preis geh. 4 Mk. 80 Pf.

Astronomische Geographie.

Ein Lehrbuch angewandter Mathematik

von
Prof. H. C. E. Martus,
Direktor des Sophien-Realgymnasiums in Berlin.

Grosse Ausgabe. 2. Auflage. Mit 100 Figuren im Texte. Geh. Preis 7 Mk. 50 Pf.
Dass. **Schul-Ausgabe.** Mit 80 Figuren im Texte. Geh. Preis 2 Mk. 60 Pf.

Digitized by Google

image
not
available

Digitized by Google

image
not
available

Die Schrift entfaltet einen ansehnlichen Reichtum an Transformationen von rationalen Ausdrücken in eben nicht weitem Gebiete der Form. H.

Di una expressione analitica atta a rappresentare il numero dei numeri primi compresi in un determinato intervallo. Nota di F. Levi Civita. Roma 1895. Salvucci.

Ausgehend von der Lambert'schen Reihe, in welcher bekanntlich der Coefficient 2 des Termes $2x^n$ die Primzahl n anzeigt, wird zuerst die Reihensumme nach Multiplication mit einem complexen Factor im vollen Intervall integrirt und schliesslich durch eine Reihe von $\beta - \alpha$ Termen, welche die genannten Integrale enthalten, die Anzahl der zwischen α und β liegenden Primzahlen ausgedrückt. H.

Ueber die Methode der kleinsten Quadrate. Von Prof. Dr. Richard Henke, Oberlehrer am Annen-Realgymnasium zu Dresden. Zweite, unveränderte Auflage. Nebst Zusätzen. Leipzig 1894. B. G. Teubner. 77 S.

Die Schrift teilt sich in folgende Abschnitte: Darstellung und Kritik der verschiedenen Begründungsweisen der Methode der kleinsten Quadrate. Uebergang zu einer allgemeineren Auffassung derselben. Versuch der Begründung in verallgemeinerter Auffassung und Anwendungen. Die Zusätze in 2. Auflage sind überschrieben: Die Methode der kleinsten Quadrate und das Gauss'sche Fehlergesetz. Weitere litterarische Bemerkungen über Begründung und Bedeutung jener Methode. Die ersten 2 Abschnitte sind historisch, der zweite berichtet über Arbeiten, welche der Aufgabe geometrische und mechanische Bedeutung geben. Die Kritik, welche im Ganzen vorwaltender Gesichtspunkt ist, ist wegen ungenauer, unvollständiger Rede kaum verständlich. Der Sachverhalt in dieser Beziehung wird im Anfang des 3. Abschnitts dargelegt. Die Aufgaben, auf welche die Methode der kleinsten Quadrate angewandt wird, entlehnen ihren Zweck und Antrieb einem unklaren Wunsch und Bedürfniss des Praktikers, ein System von Fehlern so klein als möglich zu machen. Soll eine mathematische Untersuchung dem abhelfen, so muss sie eine exacte Frage zuerst stellen, von deren Lösung sich annehmen lässt, dass sie das Bedürfniss der Praxis factisch, wenn auch nicht logisch befriedigt. Statt der Mehrheit von Fehlern wird eine bestimmte Function aller gesetzt und das Minimum von dieser neuen gesucht. Dass die Wahl dieser Function zunächst willkürlich ist,

Digitized by Google

image
not
available

lichem Gebiete bisher gerichtet waren, sondern hat vielmehr allgemeine Sätze zum Gegenstande, welche aus den Differentialgleichungen auf die Existenz und Eigenschaften der dadurch bestimmten Functionen Folgerungen ziehen. Die 8 Hauptabschnitte des Buches nach historischer Einleitung sind: allgemeine Grundlagen der Theorie; formale Theorien; Theorie der Fundamentalgleichung; die singularen Stellen, an denen sich die Integrale bestimmt verhalten; Differentialgleichungen der Fuchs'schen Classe; die Entwickelung der Integrale innerhalb eines Kreisrings; allgemeingültige Darstellungen der Integrale von Differentialgleichungen mit rationalen Coefficienten; die Berechnung der Fundamentalsubstitutionen für eine Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten. H.

Integration der allgemeinen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung. Von Professor Dr. August Weiler. Sonderabdruck aus Schlömilch Zeitschr. f. M. und Ph. XXXIX. H. 6. p. 355–375

Das genannte Problem war bereits von Jacobi gelöst und die Lösung in seinen Vorlesungen vorgetragen, als der Verfasser seine Lösung 1863 in Bd. VIII. zum ersten mal veröffentlichte, welche sich von jener durch die neue Grundlage und dadurch unterschied, dass sie eine geringere Anzahl von Integrationen erforderte. Erst infolge davon zeigte Clebsch in Crelle J. Bd. LXV., dass auch auf Jacobi's Grundlage eine gleiche Reduction der Anzahl der Integrationen erreichbar sei Doch blieb für Weiler's Methode noch immer der Vorzug der Einfachheit. Inzwischen sind noch manche Schriften darüber erschienen und einige Ausstellungen an dieser Methode gemacht worden, in deren Berücksichtigung der Verfasser eine zweite und gegenwärtig die dritte Bearbeitung publicirt hat. H.

Einleitung in die Theorie der Gammafunction und der Eulerschen Integrale. Von Dr. phil. J. H. Graf, Professor der Mathematik an der Universität Bern. Bern 1895. K. J. Wyss. 50 S.

Nach Vorwort soll das Buch die Materie nicht erschöpfend behandeln, sondern nur den Studirenden die Theorie der Hauptsache nach vorführen. Das erstere versteht sich von selbst: von Erschöpfung des Lehrstoffs kann offenbar nicht die Rede sein. Aber wie kann der Verfasser sagen, dass er die Hauptsache der Theorie lehre, wenn er doch das Bestehen der 3 Relationen zwischen den Functionswerten in geschlossener Form, nämlich die Werte von

Digitized by Google

image
not
available

und Integration erster Ordnung nach einer Unabhängigen) zahlreiche Anwendungen folgen lässt und dann nach dem zweiten Teile (betreffend höhere Ordnung und mehrere Unabhängige) die entsprechenden Anwendungen hinzugibt. Diese Anwendungen sind nicht blosse Uebungen, sondern führen den Studirenden in Theorien und Wissenschaftszweige ein, welche als Zweck des Studiums der hier vorgetragenen neuen Rechnungsweisen erscheinen; darin spricht sich der Gesichtspunkt aus, der Studirende solle mit dem grossen Wissensgebiet, welches sich ihm in der Functionslehre erschliesst, recht frühzeitig bekannt werden. Von der Lehrmethode spricht der Verfasser im Vorwort nicht. In der Tat ist diese auch nicht wesentlich verschieden von der ehemals gewöhnlichen, welche auf exacte Principien der Infinitesimalrechnung verzichtete. Aber dem heutigen Standpunkt entspricht sie nicht. Vom einfach und streng deductiven Lehrgang, den der Verfasser überhaupt nicht zu kennen scheint, ist darin keine Spur; denn schon in der Einleitung und von da an weiter wird die Bezeichnung „unendlich" ohne Definition und ohne Bezugnahme auf eine etwa bekannte Definition viel gebraucht. Die Abfassung ist mehr dazu eingerichtet, den Studirenden in den Stand zu setzen die gebräuchlichen Rechnungs- und Schlussweisen nachzuahmen, als ihn zu befähigen, sich von deren Bündigkeit und den exacten Bedingungen Rechenschaft zu geben, während sie mit vielem Fleiss und Eingehen auf specielle Betrachtung dafür sorgt die Meinung zu erwecken, an der Richtigkeit sei nicht zu zweifeln. Diese ungenügende Auffassung der specifischen Grundlagen der höhern Mathematik wird nun durch das vorliegende Lehrbuch leider in ein sehr ausgedehntes Wissensgebiet hineingetragen. Auch kann sich die gegenwärtige Lehrweise nicht damit rechtfertigen, dass sie, wenn auch noch unvollkommen, doch den Anfängern leichter zugänglich sei; denn die exacte Methode ist einfacher und mindestens ebenso elementar.

Hoppe.

Einführung in die mathematische Behandlung der Naturwissenschaften. Kurzgefasstes Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung mit besonderer Berücksichtigung der Chemie. Von W. Nernst, o. ö. Professor d. physikal. Chemie a. d. Univers. Göttingen, und A. Schönflies, o. ö. Professor der Mathematik a. d. Universität Göttingen. Mit 61 im Text befindlichen Figuren. München und Leipzig 1895. Dr. E. Wolff. 309 S.

Wie schon früher bei den Maschinen-Technikern der Nutzen des Studiums der höhern, überhaupt der idealen Mathematik mehr und mehr zur Einsicht gelangt ist, so beginnt jetzt auch, infolge der

Digitized by Google

image
not
available

gebrachte im Beispiel wol kaum notdürftig einleuchtet, und in der Verallgemeinerung als ganz unbewiesen auftritt. Diese Bedingung bestimmt den variabeln Teil als unendlich klein. An derselben Stelle konnte also leicht diese Eigenschaft erklärt und die Notwendigkeit des Begriffs gezeigt werden. Ferner war bei erster Einführung der analytischen Rechenform nicht verhehlt worden, dass hiermit der Uebergang zu einem wesentlich neuen Verfahren gefordert werde motivirt zwar nur durch den Gewinn an Einfachheit. Der eigentliche Grund ist freilich ein zwingender: die Erscheinung ist, nicht ideell, durch die Sinne gegeben, ihre Ursachen sind und bleiben stets ideell, folglich muss die Causalforschung von der empirischen Behandlung zur ideellen Rechnung übergehen. Genug, die Verfasser haben, wo die Einsicht dadurch bedingt war, es für zulässig erachtet, von den Studirenden das Abgehen von ihrer Gewohnheit erklärtermassen zu fordern. Bei Einführung des Begriffs unendlich kleiner Grössen liegt derselbe Fall vor. Zur Einsicht der genauen Gleichheit des gefundenen Grenzwerts ist das approximative Verfahren offenbar ganz nutzlos: der kleine Fehler ist nicht besser als der grosse, er bringt den Geist der Wahrheit nicht näher. Hier muss man zu einem andern Räsonnement übergehen, nämlich zu dem bekannten indirecten Schluss aus der Ungleichheit auf die Gleichheit *). Dieser ist ganz elementar, verständlich für den Anfänger der Mathematik, nur einmal vollzogen ausreichend für die ganze Infinitesimalrechnung. Es stand also nicht das geringste entgegen, im Punkte des Infinitesimalbegriffs ebenso exact zu verfahren, wie es grundsätzlich im übrigen geschehen war. Die Verfasser hätten mit viel weniger Umständen die vorgetragenen Lehren evident machen können, als sie gebraucht haben sie mit Umgehung des Infinitesimalbegriffs plausibel darzustellen. Im 8. Capitel scheint ihnen selbst denn doch diese Umständlichkeit um einer unehrlichen Täuschung willen lästig geworden zu sein. Denn in der Lehre von den unendlichen Reihen tritt das nicht exacte Zuwerkegehen ohne Scheu in seiner Blösse auf. Die Summe einer unendlichen Reihe ist ein unerklärter Gegenstand. Dass man darunter einen Grenzwert versteht, wird verschwiegen. Vom Reste wird nichts gesagt. Für die Convergenz einer Reihe mit abwechselnden Vorzeichen wird ein bekanntermassen unrichtiger Satz aufgestellt, nach welchem z. B. die Reihe $\frac{(-1)^n n}{2n-1}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ convergiren würde. Auch wird die Convergenz unendlicher Reihen unrichtig definirt. Es ist nicht

*) Folgt aus der Ungleichheit $x \gtrless y$ die Ungleichheit $a \gtrless a$, so ist $x=y$.

Digitized by Google

image
not
available

fessor am Gymnasium in Königsberg i. d. Neumark. Sonderausgabe aus Leitfaden der Elementar-Mathematik (Teil II.) von den Prof. Dr. H. Lieber und F. von Lühmann. Berlin 1893. Leonhard Simion. 31 S.

Die Schrift ist ein Anhang, welcher die genannten zwei Gebiete mit in den Kreis der elementar zu behandelnden Aufgaben zieht. Der erste Teil erstreckt sich auf die Binomialreihe, die Exponentialreihe, die logarithmische, die Sinus- und Cosinus-Reihe, sämtlich für reelle Argumente. Von der Reihe wird ausgegangen, ihre Convergenz untersucht, dann die Summation vollzogen, was bei der Binomialreihe eine längere Rechnung erfordert. Im zweiten Teile wird erst allgemein die Bedingung des Maximums und Minimums analytisch geometrisch hergeleitet. Dieser führt auf einen Bruch, dessen Zähler und Nenner verschwinden müssen, ist daher elementar lösbar, durch eine primitive Gleichung, wenn der gemeinsame verschwindende Factor von Zähler und Nenner herausgezogen werden kann, was bei algebraischen (einschliesslich irrationalen) Functionen immer der Fall ist. Demgemäss werden viele mannigfaltige, grösstenteils geometrische Aufgaben gestellt und gelöst. H.

Die Dekade und die Ziffernschrift. —

Die Schnellrechenkunst. 1. Heft. Die Addition und die Subtraction.

Von Hermann Pauly. Danzig 1892. Selbstverlag. 8 + 16 S.

Die letztere Schrift nimmt einigemal Bezug auf die erstere. Diese hat 2 Gegenstände: erst sucht sie die Gestalt der indischen Ziffern durch Zusammensetzung aus Strichen und Bogen zu erklären und zu interpretiren; dann entwickelt sie als durchaus neue Gedanken die Ansicht, dass die von allen Nationen angenommene Grundzahl 10 für das Zahlensystem einen ideellen Grund habe, nämlich als Summe der 4 ersten Zahlen, welche wieder durch paarweise Addition aus 1 und 2, und 2 aus 1 + 1 entstehen. Die Zahl enthalte also alle möglichen Synthesen und vertrete mithin die Allheit der grundlegenden Zahlen. In diesem Sinne wird sie die natürliche Grundzahl genannt, und daraus gefolgert, dass auch ihre Annahme zuerst in diesem Sinne erfolgt, das Abzählen an den Fingern erst nachher dazu gekommen sei. Die Neuheit des Gedankens wird wol niemand bezweifeln. Gegen die Ansicht des Verfassers seien nur ein paar Einwände vorgebracht. 1) Zur Zahl 10 gelangt er durch 3 successive Synthesen, aber nach ungleichem Princip: in den 2 ersten werden 2 Elemente mit Wiederholung combinirt, in der dritten 4 Elemente

image
not
available

Om slutna konvexa konturer. Af H. Petrini. Stockholm 1893. Bihang til k. Sv. Ak. Handl. 58 S.

Der Verfasser knüpft an zwei von Crofton gefundenen Sätze an, welche einen überraschenden Erfolg seiner eigentümlichen Methode an den Tag legen, indem einfache Resultate betreffend allgemeine Curven durch einfache Betrachtungen gewonnen worden sind, die durch analytische Untersuchung schwerlich entdeckt worden wären, und deren analytischer Beweis factisch erst nachträglich geliefert worden ist. Er sieht in diesem Umstande mit Recht nicht (wie Poinsot im analogen Falle) einen Grund die analytische Methode zu verachten, sondern, allein die dargebotene Vermehrung der Entdeckungsmittel im Auge, zunächst die Aufforderung zu der Frage: Lässt sich überhaupt das Gebiet der Untersuchungen, in welchen die Crofton'sche Methode von Anwendung und Erfolg ist, begrenzen? Der Versuch dazu wird dann unter Voraussetzung, dass es sich, wie in den Crofton'schen Sätzen, um Auswertung von Integralen über eine von allgemeinen Curven begrenzte Ebene handelt, in folgenden 4 Schritten in Angriff genommen. Erst werden Differentialformeln für geometrische Grössen hergeleitet, dann Reductionsformeln für Integrale der Form

$$\int F(\omega t_1 t_2)\, \partial\omega$$

wo t_1, t_2 zwei Tangenten sind, die unter dem Winkel ω zusammentreffen. Dann wird hieran der Fall behandelt, wo der Tangentenschnittpunkt entweder unendlich fern oder auf einer Curve $\omega = \text{const}$ liegt, dann Doppelintegrale entweder über die äussere Ebene oder über den Ring zwischen der gegebenen Curve und der Curve $\omega = \text{const}$

H.

Digitized by Google

image
not
available

Lehrbücher.

Haller v. Hallerstein, F., Lehrbuch d. Elementar-Mathematik. Nach dem Lehrplane für das kgl. preuss. Kadettencorps bearb. v. Bruno Hülsen. 3. Tl. Pensum der Sekunda. 3. Aufl. Berlin, Nauck & Co. Geb. 4 Mk. 40 Pf.

Holzmüller, Gust., method. Lehrbuch der Elementar-Mathematik. 3. Tl. Lehr- u. Uebungsstoff zur freien Auswahl für die Prima realist. Vollanstalten u. höherer Fachschulen, nebst Vorbereitgn. auf die Hochschul-Mathematik. Leipzig, B G. Teubner. Geb. 2 Mk. 80 Pf.

Sickenberger, Adf., Leitf. d. elementaren Mathematik. 1. Tl. Algebra. 3. Aufl. München, Th. Ackermann. 1 Mk. 20 Pf; kart. 1 Mk. 35 Pf.

— dass. 3. Tl. Stereometrie-Trigonometrie. 2. Aufl. Ebd. 1 Mk. 20 Pf.; kart. 1 Mk. 35 Pf.

Sammlungen.

Bock, Otto u. Rich. Schulze, geometrische Konstruktions- u. Rechenaufgaben für Volks- u. Fortbildungsschulen. Leipzig, E. Wunderlich. 40 Pf.

Braune, A., Rechenbuch für Stadtschulen in 7 Heften. Unter gleichmässiger Berücksichtig. des Kopf- u. Tafelrechnens bearb. Ausg. B., 6. u. 7. Hft. Halle, H. Schroedel. 75 Pf.

— dass. Auflösungen für die Hand des Lehrers. 5.—7. Hft. Ebd. 1 Mk. 50 Pf

Brenner, Ant., 300 algebraische Aufgaben zur Lösung mittels einfacher Schlüsse, zunächst für Lehrerbildungs-Anstalten bearb. 5. Aufl. Freising, F. P. Datterer. 50 Pf.; Resultate 20 Pf.

Dorn's Aufgaben für mündliches u. schriftliches Rechnen. Neu bearb. v. A. Elsner u. R. Sendler. Breslau, H. Handel. Ausg. A. (in 6 Hftn.). Resultate zum 4. Hft. 2. Aufl. 50 Pf. — Ausg. B. (in 4 Hftn.) 2. Hft. 4. Aufl. 15 Pf., Ausg. B. Resultate z. 2. u. 3. Hft. 2. Aufl. 50 Pf.

Hartmann, Berth. u. Jul. Ruhsam, Rechenbuch für deutsche Stadt- u. Landschulen. Ausg. A. 6 Hefte. Frankfurt a./M., Kesselring'sche Hofb. 1 Mk. 65 Pf.

Heiland, F. u. K. Muthesius, Rechenbuch für Volksschulen. Ausg. für Lehrer. 1. u. 2. Hft. Weimar, H. Böhlau. 4 Mk.

Heilermann, H., Sammlung geometrischer Aufgaben. 1. Tl. Aufgaben, die ohne Anwendung der Lehre von der Proportionalität der Linien gelöst werden können. 6. Aufl. Essen, G. D. Baedeker. 80 Pf.

Digitized by Google

image
not
available

7. Schuljahr. (Ausg. f. Bezirksschulen.) Ausg. B. für Lehrer. 3. Aufl. Aarau, H. R. Sauerländer & Co. 1 Mk. 60 Pf.

Tabellen.

Hrabák, Jos., practische Hilfstabellen für logarithmische u. andere Zahlenrechnungen. 3. Ausg. Leipzig, B. G. Teubner. Geb. 3 Mk.

Schrön, Ludw., Logarithmen, Taf. III. Interpolationstafel zur Berechnung der Proportionaltheile, zunächst für seine 7stell. Logarithmen, dann auch zum allgemeinen Gebrauch. 22. Aufl. Braunschweig, Vieweg & Sohn. 1 Mk. 80 Pf.

Arithmetik, Algebra und reine Analysis.

Autenheimer, Frdr., Elementarbuch der Differential- und Integralrechnung mit zahlreichen Anwendungen aus der Analysis, Geometrie, Mechanik, Physik etc., für höhere Schulen u. den Selbstunterricht bearb. 4. Aufl. Weimar, B. F. Voigt. 9 Mk.

Fischer, Ed., Reihenentwicklungen mit Hülfe arithmetischer Progressionen höherer Ordnung. Beitrag zum mathemat. Unterrichte an höheren Lehranstalten. Berlin, R. Gärtner. 1 Mk.

Glaser, Steph., über einige nach Binominalkoeffizienten fortschreitende Reihen. Ebd. 1 Mk.

Hermite, Ch., remarque sur les nombres de Bernoulli et les nombres d'Euler. Prag, F. Rivnáč. 10 Pf.

Jaumann, G., Inconstanz des Funkenpotentials. Wien, F. Tempsky. 90 Pf.

Lie, Sophus, Untersuchungen über unendliche continuirliche Gruppen. Leipzig, S. Hirzel. 5 Mk.

Lübsen, H. B, ausführliches Lehrbuch der Analysis, zum Selbstunterricht mit Rücksicht auf die Zwecke des prakt. Lebens bearb. 9. Aufl. Leipzig, F. Brandstetter. 3 Mk. 60 Pf.

Marggraff, Bernh., primitive Gruppen, welche eine transitive Gruppe geringeren Grades enthalten. Berlin, R. Gärtner. 1 Mk.

Neumann, Ign., Durchführung v. Zinseszinsen-, Renten- u. Amortisationsrechnungen auf gewöhnlichem Rechnungswege durch ganz neue Anwendung der Zahlen aus den Zinseszinsen-Tabellen. 2. Aufl. Wien, C. Gerold's Sohn. 4 Mk.

Puchberger, Eman., eine allgemeinere Integration der Differentialgleichungen. 2. Hft. Ebd. 1 Mk. 60 Pf.

Schafheitlin, Paul, über die Produkte der Lösungen homogener linearer Differential-Gleichungen. Berlin, R. Gärtner. 1 Mk.

Schlotterbeck, B., Knacknüsse für Freunde des Rechnens. Langensalza, Schulbuchhlg. 1 Mk. 50 Pf.

Digitized by Google

image
not
available

Sendler, R., Raumlehre für Präparandenanstalten. 2. Aufl. Breslau, H. Handel. 1 Mk. 20 Pf.; geb. 1 Mk. 40 Pf. Resultate 15 Pf.

Vries, Jan de, über die Curven 5. Ordng. mit 4 Doppelpunkten. Wien, F. Tempsky. 30 Pf.

Wallenhauer, Ghilf, Schulgeometrie für die Hand der Schüler. 1. u. 2. Heft. Rudolstadt, Hofbuchdruckerei. 75 Pf.

Winter, Wilh., Stereometrie. Lehrbuch u. Aufgabensammlg. für Schulen. 2. Aufl. München, Th. Ackermann. 1 Mk. 60 Pf.; kart. 1 Mk. 80 Pf.

Wülfing, E. A., tabellarische Uebersicht der einfachen Formen der 32 krystallographischen Symetriegruppen. 7 Tafeln nebst Erläuterungen. Stuttgart, E. Schweizerbart. In Mappe 5 Mk.

Trigonometrie.

Bützberger, F., kurzer Lehrgang der ebenen Trigonometrie mit vielen Aufgaben u. Anwendungen. Bern, K. J. Wyss. Kart. 1 Mk. 20 Pf.

Lengauer, Jos., die Grundlehren der ebenen Trigonometrie. Ein Leitfaden für den Unterricht mit Uebungsaufgaben. Kempen. J. Kösel. 80 Pf.; geb. 1 Mk. 10 Pf.

Spieker, Th., Lehrbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie mit Uebungsaufgaben und einer kurzen Einleitung in die sphärische Astronomie für höhere Lehranstalten. 3. Aufl. Potsdam. A. Stein. 1 Mk. 40 Pf.

Winter. Wilh., Trigonometrie. Lehrbuch u. Aufgabensammlg. für Schulen. 2. Aufl. München, Th. Ackermann. 1 Mk.; kart. 1 Mk. 15 Pf.

Praktische Geometrie, Geodäsie.

Ambronn, L, Breitenbestimmungen zur See. Im Auftrage der Direktion der deutschen Seewarte bearb. Hamburg, Friederichsen & Co. 3 Mk.

Baur, Frz., Lehrbuch der niederen Geodäsie. 5. Aufl. Berlin. P. Parey. Geb. 12 Mk.

Mittheilungen aus dem Markscheidewesen. Vereinsschrift des rhein.-westfäl. Markscheidervereins. Hrsg. v. H. Wernecke. 8. Hft. Freiberg, Craz & Gerlach. 3 Mk.

Schlieben, W. E. A. v., Landmesskunst. 9. Aufl. 1. Bd. 2. u. 3. Hft. Halberstadt, Ernst'sche B. 4 Mk.

Digitized by Google

image
not
available

Lamprecht, Wilh., Wo u. wie soll man Wettersäulen bauen? Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht. 1 Mk.

Landmesser, die, in Preussen, ihre Ausbildung, Prüfung und Bestallung, ihre Geschäfte und Taxen. Berlin, R. v. Decker. Kart. 4 Mk.

Mánfai, Ed., das gelöste Problem der Aeronautik. Vergleichende Kritik der bis heute zur Lösung der aeronautischen Aufgabe in Vorschlag gebrachten Projekte resp. Principien. Wien, Spielhagen & Schurich. 2 Mk.

Miethe, Adf., Lehrbuch d. praktischen Photographie. 1. Hft. Halle, W. Knapp. 1 Mk.

Paul's Tabellen für Elektrotechnik. Zum prakt. Gebrauch für Techniker, Werkmeister, Werkstattarbeiter, Maschinisten, Monteure. Leipzig, H. Paul. Kart. 60 Pf.

Pizzighelli, G., Anleitung zur Photographie für Anfänger. 7. Aufl. Halle, W. Knapp. Geb. 3 Mk.

Prasch, Adf. u. Hugo Wietz, die elektrotechnischen Maasse. Lehrbuch zum Selbststudium. Leipzig, O. Leiner. 3 Mk.; geb. 3 Mk. 50 Pf.

Rühlmann, Rich., Grundzüge der Elektrotechnik. Eine gemeinfassliche Darstellung der Grundlagen der Starkstrom-Elektrotechnik für Ingenieure, Architekten, Industrielle, Militärs, Techniker u. Studirende an techn. Mittelschulen. 2. Hälfte. Ebd. 6 Mk.; (kplt. geb. 13 Mk.)

Schrader, W., Expositionstafeln zur Bestimmung der Belichtungszeit beim Photographiren. Remscheid, W. Witzel. Kart. 1 Mk. 50 Pf.

Schwartze, Th., die Lehre von der Elektricität und deren praktische Verwendung. Leipzig, J. J. Weber. 10 Mk.; geb 12 Mk.

Stechert, C., das Marine-Chronometer u. seine Verwendung in der nautischen Praxis. Im Auftrage der Direktion der deutschen Seewarte bearb. Hamburg, Friederichsen & Co. 3 Mk.

Stiefel, H. C., die lichtempfindlichen Papiere der Photographie. Ein Leitfaden für Berufs- u. Amateur-Photographen. Wien, A. Hartleben. 3 Mk.; geb. 3 Mk. 80 Pf.

Taschenbuch zum prakt. Gebrauch für Flugtechniker und Luftschiffer, unter Mitwirk. v. H. Hoernes, V. Kremer, O. Lilienthal, A. Miethe, K. Müllenhoff u. A. hrsg. v. Herm. W. L. Moedebeck. Berlin, W. H. Kühl. Geb. 3 Mk. 50 Pf.

Untersuchungen über Lichtweite u. Helligkeit der Schiffspositionslaternen m. besond. Rücksicht auf die richtige Färbung der Gläser, ausgeführt im Winter 1893/94 auf Anordnung des Reichs-Marineamtes von der Direktion der deutschen Seewarte. Hamburg, L. Friederichsen & Co. 2 Mk. 50 Pf.

Digitized by Google

image
not
available

Catalog der astronom. Gesellschaft. 1. Abth. Catalog der Sterne bis zur 9. Grösse zwischen 80° nördl. u. 2° südl. Deklination für das Aequinoctium 1875. 6. Stück. Leipzig, W. Engelmann. 33 Mk.

Elster, J. u. H. Geitel, elektrische Beobachtungen auf dem Sonnblick. Wien, F. Tempsky. 20 Pf.

Fauth, Phil., astronomische Beobachtungen u. Resultate aus den J. 1890 u. 1891, erhalten auf seiner Privatsternwarte in Kaiserslautern. I u. II. Kaiserslautern, A. Gotthold. 30 Mk.

Foerster, W. u P. Lehmann, die veränderlichen Tafeln des astronomischen und chronologischen Theils des kgl. preuss. Normalkalenders f. 1896. Nebst e. allgem. statist. Beitrage von E. Blenck. Berlin, Verlag des kgl. statist. Bureaus. 5 Mk.

Frejlach, Gius., intorno all' andamento diurno che ha la frequenza di rotazioni del vento nell' intervallo die 4 ore a Praga. Prag, F. Rivnáč. 20 Pf.

Gezeitentafeln f. d. J. 1896. Hrsg. vom Reichs-Marine-Amt. Red.: Observatorium zu Wilhelmshaven. Mit 14 Blättern in Steindruck, enth. Darstellung der Gezeitenströmungen in der Nordsee, im Engl. Kanal u. der Irischen See. Berlin, Mittler & Sohn. 1 Mk 50 Pf.

Gravelius, H., Erläuterung der Beziehungen zwischen meteorologischen und Hochwasser-Erscheinungen im Odergebiet. Berlin, F. Dümmler's V. 1 Mk.

Handwörterbuch der Astronomie, hrsg. von W. Valentiner. 1. Lfg. Breslau, E. Trewendt. 3 Mk. 60 Pf.

Jahrbuch, Berliner astronomisches, für 1897 mit Angaben für die Opposition der Planeten (1) — 368) für 1895. Hrsg. von dem Rechen-Institute der kgl. Sternwarte zu Berlin unter Leitung von F. Tietjen. Berlin, F. Dümmler's V. 12 Mk.

— der Astronomie u. Geophysik. Hrsg, v. Herm. J. Klein. 5. Jahrg. 1894. Leipzig, E. H. Mayer. Kart. 7 Mk.

— deutsches meteorologisches, f 1893. Beobachtungs-System der deutschen Seewarte. Ergebnisse der meteorolog. Beobachtungen an 10 Stationen II. Ordng. und an 45 Signalstellen, sowie stündliche Aufzeichnungen an 2 Normal-Beobachtungs-Stationen. XVI. Jahrg. (18. Jahrg. der meteorolog. Beobachtungen in Deutschland.). Hrsg. von der Direktion der Seewarte. Hamburg, L. Friederichsen & Co. 13 Mk.

— dass. f. 1894. Meteorologische Station I. Ordng. in Bremen Ergebnisse der meteorologischen Beobachtungen. Stündliche Aufzeichnung der Registrierapparate. Dreimal tägliche Beobachtungen in Bremen und an 4 Regenstationen. Hrsg. v. Paul Bergholz. V. Jahrg. Bremen, M. Nössler. 3 Mk.

Digitized by Google

image
not
available

Physik.

Annalen des physikal. Central-Observatoriums, hrsg. von H. Wild. (Russisch u. Deutsch.) Jahrg. 1893. 2. Tl. Leipzig, Voss's Sort. 15 Mk. 60 Pf.

Bedell, Frederic u. A. C. Crehore, Theorie der Wechselströme in analytischer u. graphischer Darstellung. Deutsch von Alfr. H. Bucherer. Berlin, J. Springer. Geb. 7 Mk.

Brandt, G., Schulphysik für die Gymnasien, nach Jahrgängen geordnet. I Teil. Obertertia: Mechanik u. Wärmelehre. Untersekunda: Magnetismus, Elektricität, Akustik u. Optik. Berlin, L. Simion. Kart. 1 Mk.

Bryan, G H. u. L. Boltzmann, über die mechanische Analogie des Wärmegleichgewichtes zweier sich berührender Körper. Wien, F. Tempsky. 30 Pf.

Czermak, P., über die Temperaturvertheilung längs eines dünnen Drahtes, der von einem constanten Strome durchflossen wird. Ebd. 60 Pf.

Elementarbücher, naturwissenschaftliche. 2. Physik v. Balfour Stewarte. Deutsche Ausg. besorgt v. E. Warburg. 5. Aufl. Strassburg, K. J. Trübner. Kart. 80 Pf.

Feldmann, Clarence Paul, Wirkungsweise, Prüfung u. Berechnung der Wechselstrom-Transformatoren. Für die Praxis bearb. 2. Tl. Leipzig, O. Leiner. 6 Mk. (kplt. geb. 13 Mk.)

Genau, A., Physik für Lehrerbildungsanstalten. Gotha, E. F. Thienemann's Vlg. 2 Mk.

Graetz, L., Compendium der Physik. Für Studirende. 2. Aufl. Wien, F. Deuticke. 7 Mk.

— Die Elektricität u. ihre Anwendungen. Ein Lehr- u. Lesebuch. 5. Aufl. Stuttgart, J. Engelhorn. 7 Mk.; geb. 8 Mk.

Hertz, Heinr., Ueber die Beziehung zwischen Licht und Elektricität. 9. Aufl. Bonn, E Strauss. 1 Mk.

Hollmann, M., Physik. (Landwirtsch. Unterr.-Bücher. 2. Aufl. Berlin, P. Parey. Geb. 1 Mk. 20 Pf.

Kolbe, Bruno, Einführung in die Elektricitätslehre. II. Dynamische Elektricität. Berlin, J. Springer. 3 Mk.; geb. 3 Mk. 80 Pf.

Kollert, Jul., Katechismus der Physik. 5. Aufl. Leipzig, J. J. Weber. Geb. 4 Mk. 50 Pf.

Koppe's, K., Anfangsgründe der Physik mit Einschluss der Chemie und mathemat. Geographie. 21. Aufl. Ausg. B. in 2 Lehrgängen. Für höhere Lehranstalten nach den preussischen Lehrplänen v. 1892 bearb. v. A. Husmann. I Tl.: Vorbereitender Lehrgang. Essen, G. D. Baedeker. Geb. 2 Mk. 20 Pf.

Krämer, Jos., Wirkungsgrade und Kosten elektrischer und

Digitized by Google

image
not
available

Mittheilungen der mathemat. Gesellschaft in Hamburg. 3. Bd. 5. Hft. Red. v. Köpcke, Ahlhorn u. Schröder. Leipzig, B. G. Teubner. 80 Pf.

Neujahrsblatt, hrgsg. v. der naturforschenden Gesellschaft auf d. J. 1895. (Pernet, Herm. v. Helmholtz.) Zürich, Fäsi & Beer. 2 Mk. 20 Pf.

Schriften der Gesellschaft zur Beförderung der gesammten Naturwissenschaften zu Marburg. 12. Bd. 6. und 7. Abhandlung. Marburg, N. G. Elwert. (6. Die wolkenlosen Tage, beobachtet in d. J. 1866 bis 1894 an der meteorolog. Station Marburg. Von F. Melde. 80 Pf. — 7. Verzeichniss der wissenschaftlichen Abhandlungen u. Schriften von Franz Melde. 20 Pf.)

— der physikalisch-ökonomischen Gesellschaft zu Königsberg i. Pr. 35. Jahrg. 1894. Königsberg, W. Koch. 6 Mk.

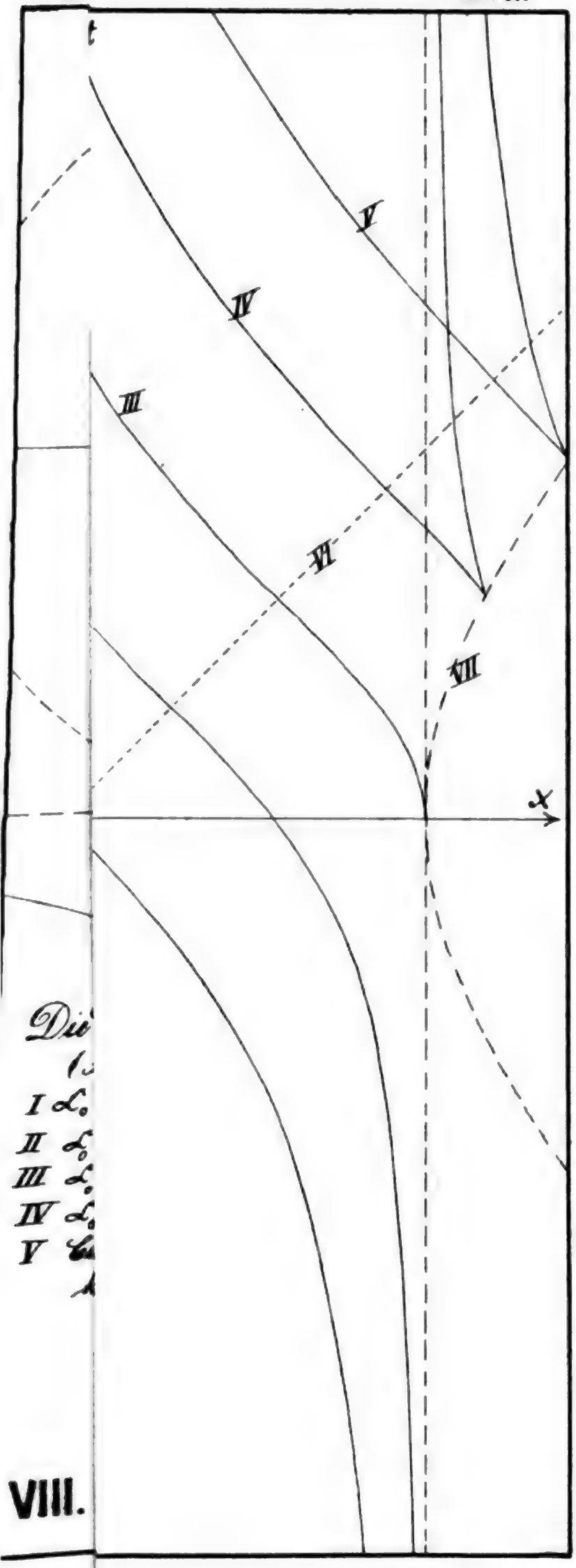
Sitzungsberichte, Münch. Mathm. Classe. 1894. 4. Hft. München, Franz' Vlg. 1 Mk. 20 Pf.

— Wiener. Mathem.-naturw. Classe. Wien, F. Tempsky. Abth. IIa. 103. Bd. 8. Hft. 4 Mk. 40 Pf. — Abth. IIb. 8. — 10. Hft. 3 Mk. 20 Pf. — Abth. III. 8. — 10. Hft. 3 Mk. 40 Pf.

Wolf, R., Taschenbuch f. Mathematik, Physik, Geodäsie u. Astronomie. 6., durch A. Wolfer vollend. Aufl. 1. Lfg. Zürich, F. Schulthess. 1 Mk. 20 Pf.

Digitized by Google

Taf. II.



Die
I
II
III
IV
V

Digitized by Google

Litterarischer Bericht

LV.

Geometrie.

Regelmässige Schnitte und Projectionen des Hundertzwanzigzelles und Sechshundertzelles im vierdimensionalen Raume. Von P. H. Schoute. Mit sieben Tafeln und drei Tabellen. Amsterdam 1894. Johannes Müller (Verhandl. d. Koningkl. Ak. van Wet. te Amsterdam. 1. Sectie Deel II. No. 7.) 26 S.

Die vorliegende Arbeit unternimmt es, die 2 genannten vierdimensionalen regelmässigen Gebilde (Vielzelle) eingehend auf alle constituirenden Elemente nach Ordnung und Mass darzustellen. Die Schnitte und Projectionen sind nicht ihr Ziel, sondern das Mittel der Darstellung und dem Zwecke entsprechend gewählt. Das Sechshundertzell ist eingeschlossen von 600 regelmässigen Tetraedern, deren je 20 um eine Ecke liegen. Das Hundertzwanzigzell ist von ihm das reciproke, eingeschlossen von 120 regelmässigen Dodekaedern, 12 um jede Ecke. Jeder Ecke, Kante, Fläche, Seite des einen Gebildes entspricht eine Seite, Fläche, Kante, Ecke des andern.

H.

Over de merkwaardige punten van den driehoek. Door W. Kapteyn. Amsterdam 1895. Johannes Müller. (Verh. d. Koningkl. Ak. van Wet. te Amsterdam, 1. Sectie, Deel III. Nr. 3.) 33 S.

Es handelt sich um Gestaltung der Theorie der merkwürdigen Punkte des Dreiecks bei Bestimmung der Punkte durch complexe

Digitized by Google

Coordinaten. Zuerst werden die nötigen Sätze und Formeln über diese Darstellungsform überhaupt entwickelt und auf verschiedene Punkte, gerade und krumme Linien angewandt, dann einige Folgerungen daraus gezogen, zuletzt einige Beziehungen zwischen einem willkürlichen Punkte und seinen Polpunkten in Bezug auf die Ecken des Dreiecks untersucht. Vigarié, Beltrani und Morley haben bereits gleiche Gegenstande behandelt. H.

Grundlagen für die geometrische Anwendung der Invariantentheorie. Von Dr. P. Muth. Mit einem Begleitwort von M. Pasch. Leipzig 1895. B. G. Teubner. 131 S.

Das vorliegende Buch soll denjenigen, welche zum beabsichtigten Studium der Invariantentheorie in ihrer Anwendung auf Geometrie die nötigen Vorkenntnisse noch nicht besizen, dieselben verschaffen. Dazu gehören folgende Lehrgegenstände: das Doppelverhältniss, lineare Coordinaten in der Geraden, die Punktreihe und das Strahlenbüschel in der Ebene, lineare Coordinaten in der Ebene, die einförmigen Grundgebilde, Erweiterung des Begriffs „Raumelement". die Grundgebilde 2. Stufe, graphische Eigenschaften der Figuren, lineare Coordinaten im Raume, die Transformation der linearen Coordinaten, projective Grundgebilde 1. Stufe, collineare Grundgebilde 2. Stufe, collineare räumliche Systeme, reciproke Grundgebilde, involutorische Grundgebilde. H.

Die Elemente der vierdimensionalen Gebilde mit besonderer Berücksichtigung der Potytope. Von Dr. Max Brückner, Realgymnasialoberlehrer. Zwickau 1894. R. Zückler. 61 S.

Das Buch erwirbt sich das Verdienst, die verschiedenen Forschungswege im Gebiete der Mehrdimensionengeometrie zusammenzuführen und die Resultate, soweit es gelingt, zu einer systematischen Lehre zu gestalten. Dass diese Lehre nicht von allgemeinen Begriffen ausgeht, sondern ihrem Ursprung gemäss als erweiternde Anfänge auf euklidischer Basis aufgebaut werden, ist sehr zu billigen. Dem entspricht auch die gegenwärtige Beschäftigung mit der nächst höheren Dimensionszahl. Die Einleitung, welche die Urbegriffe der Raumlehre bespricht, lässt klares Urteil einigermassen vermissen: sie steht noch auf Kant'schem Standpunkt und vermischt die Mehrdimensionengeometrie mit der nichteuklidischen Geometrie. Beides hat keinen merklichen Einfluss auf die Behandlung des eigentlichen Lehrgegenstandes, daher übergehen wir sie lieber. In §. 1. werden durch directe Schlüsse auf euklidischer Basis Sätze über die

Digitized by Google

Lage von Punkten, Geraden, Ebenen und Räumen, und zwar 10 über das Gemeinsame zweier, 3 über die senkrechte Lage hergeleitet. Erklärungen werden nicht gegeben; in Betreff des Raumbegriffs, der allein einer Erklärung bedurft hätte, wird in der Einleitung auf eine Schrift von Schlegel verwiesen. Nicht wol begreiflich ist es, warum der Verfasser die unentbehrliche Bedingung von Sätzen, dass jene 2 Gebilde einen Punkt gemein haben, auf die sich doch der Beweis beruft, bei ihrer Aufstellung jedesmal weggelassen hat. Die betreffenden Sätze sind daher ihrem Wortlaut nach unrichtig; dass sie im allgemeinen zutreffen, ist nicht bewiesen. Es folgt nun die analytische Behandlung des gleichen Lehrstoffs, welcher die orthogonale Ordnung des 4 Dimensionen-Gebiets zugrunde legt. Es wäre von grossem Vorteil gewesen, hätte die Darlegung und die Auffassung sehr erleichtert, wenn die analytische Behandlung der synthetischen vorausgegangen wäre. Gewöhnlich ist der geometrische Schluss nicht nur kürzer und einfacher als die Rechnung, sondern wird auch unmittelbar durch Anschauung unterstützt. Im vorliegenden Falle sind beide Vorteile ausschliesslich auf Seiten des analytischen Verfahrens. Eine ursprüngliche Vorstellung der 4ten Dimension ist nicht vorhanden, kann also der Anschauung nicht zugute kommen. Dagegen stellt sich, nachdem vermittelst der Coordinatengleichungen die Vertauschbarkeit der Dimensionen ans Licht getreten ist, die Anschauung sofort her, indem man irgend 3 beliebige Dimensionen zu einem Raume combinirt und in diesem Raume die euklidischen Gebilde, in eine bisher unbekannte Welt übertragen, wiederfindet. Auch zeigen die Beweise, die in § 1. für jeden Satz einzeln geführt werden mussten (Sätze die aus der analytischen Form in ihrer geometrischen Bedeutung gefasst unmittelbar folgen), dass der Gebrauch der Coordinaten kein Umweg, sondern der gerade, kürzeste und leichtest fassliche ist. Das Zuwerkegehen im Buche ist ohne Beachtung der Natur des Gegenstandes bloss der Gewohnheit gefolgt. Von hier an sind die Polytope (geschlossene, linear begrenzte, vierdimensionale Gebilde, von Andern Vielzelle genannt) Lehrgegenstand. Von allen metrischen Bestimmungen wird abgesehen; es handelt sich allein um Anzahlen und Verbindungen der Elemente (Ecken, Kanten, Flächen, Seiten) jedes Typus isomorpher Gebilde. Die Anzahlen werden durch den erweiterten Euler'schen Satz und einige hinzukommende Bedingungen begrenzt, die Verbindungen und das Aneinandergrenzen der Elemente durch Projectionen vor Augen gestellt. Ebenso werden dann die Typen der regelmässigen Polytrope behandelt. Hoppe.

Die Bewegungsgruppen der regelmässigen Gebilde von vier

Digitized by Google

Dimensionen. Inaugural-Dissertation zur Erlangung der Doctorwürde in der Hohen philosophischen Facultät der Grossherzoglich Hessischen Ludwigs-Universität Giessen vorgelegt von Salomon Levi van Oss aus Werkendam. Utrecht 1894. P. den Boer. 38 S.

Die Einleitung gibt die analytischen Grundlagen der Vierdimensionengeometrie, stellt Sätze über die Lage der Ebenen auf, bestimmt die Lage eines beliebigen Punktes durch dessen Coordinaten bezüglich auf 2 absolut normale Ebenen und zerlegt eine beliebige Rotation in 6 Componenten. Auf dieser Basis werden dann die Bewegungen des regelmässigen 5 zells, 8 und 16 zells, 24 zells, 120 und 600 zells, d. i. zweier reciproker Paare und zweier sich selbst reciproker Gebilde, in einfachsten Gruppen dargestellt. H.

Grundzüge der Geometrie von mehreren Dimensionen und mehreren Arten gradliniger Einheiten in elementarer Form entwickelt. Von Giuseppe Veronese, Professor an der Königl. Universität zu Padua. — Mit Genehmigung des Verfassers nach einer neuen Bearbeitung des Originals übersetzt von Adolf Scheppe, Premierlieutenant a. D. zu Wiesbaden. Leipzig 1894. B. G. Teubner. 740 S.

Das Riesenwerk besteht aus folgenden Teilen: Einleitung, Fundamentalsätze über die abstracten mathematischen Formen (9 Capitel). Erster Teil. Die Gerade, die Ebene und der Raum von 3 Dimensionen im allgemeinen Raum. Zweiter Teil. Der Raum von 4 und n Dimensionen in dem allgemeinen Raum. Das Ganze stellt sich dar als ein Versuch, die gesamte Raumlehre mit Einschluss aller von der bisherigen Forschung verfolgten Richtungen aus reinen Verstandesbegriffen herzuleiten, entwickelt dieselben jedoch durch Ausgehen von den speciellen Begriffen und versäumt überhaupt nichts, um mit der gewöhnlichen Doctrin in Fühlung zu bleiben. H.

Die Elemente der analytischen Geometrie der Ebene. Zum Gebrauch an höheren Lehranstalten sowie zum Selbststudium dargestellt und mit zahlreichen Uebungsbeispielen versehen von Dr. H. Ganter, Professor an der Kantonschule in Aarau und Dr. F. Rudio, Professor am Polytechnikum in Zürich. Mit 54 Figuren im Text. Zweite, verbesserte Auflage. Leipzig 1894. B. G. Teubner. 165 S.

Das Buch enthält die Lehre von den (parallelen, rechtwinkligen und Polar-) Coordinaten mit Anwendung auf die Gerade, den Kreis,

Digitized by Google

die Ellipse, Hyperbel und Parabel und fügt den einzelnen Abschnitten Uebungsaufgaben, im ganzen 405, bei. H.

Lehrbuch der analytischen Geometrie bearbeitet von O. Fort und O. Schlömilch. Erster Teil. Analytische Geometrie der Ebene von O. Fort, weil. Professor am Königl. sächs. Polytechnikum zu Dresden. Sechste Auflage besorgt von R. Heger in Dresden. Mit in den Text gedruckten Holzschnitten. Leipzig 1893. B. G. Teubner. 264 S.

Der jetzt erschienene 1. Teil enthält die Lehre von den Coordinaten in der Ebene mit Anwendung auf die gerade Linie, den Kreis, die Kegelschnitte, einige specielle Linien höheren Grades und einige specielle transcendente Curven. H.

Recueil de problèmes de mathématiques. Géometrie analytique à trois dimensions (et géométrie supérieure): A l'usage des classes de mathématiques spéciales. Par C. A. Laisant, Docteur ès sciences, Ancien élève de l'École Polytechnique. Paris 1893. Gauthier-Villars et fils. 95 S.

Das Buch enthält eine sachlich geordnete Zusammenstellung aller seit 1842 in den Hauptjournälen in französischer Sprache publicirten Sätze und Aufgaben aus der Raumgeometrie mit Angabe der Autoren. Die Einteilung ist folgende: Geradlinige, sphärische Figuren; Curven und Flächen 2. Ordnung, geometrische Oerter von Punkten; von Linien, algebraische, allgemeine Curven und Flächen. H.

Ueber die parabolische Spirale. Eine Monographie von Dr. G. D. E. Weyer, Geh. Rath und Prof. in Kiel. Kiel und Leipzig 1894. Lipsius u. Tischer. 36 S.

Bezeichnen r, v die Polarcoordinaten des laufenden Punktes, so ist

$$(a-r)^2 = 2pav$$

die Gleichung einer ebenen Curve, welche Jacob Bernoulli unter dem Namen „parabolische Spirale" einmal untersucht hat, später nicht wieder darauf zurückgekommen ist. Die gegenwärtige Arbeit folgt seinem Gange und ergänzt die Untersuchung. Es werden die Tangente, die Maxima und Minima der rechtwinkligen Coordinaten, die Inflexionspunkte, die Doppelpunkte, die Quadratur und die Rectification berechnet H.

Digitized by Google

Cours de géométrie analytique à l'usage des Élèves de la classe de mathématiques spéciales et des Candidats aux Écoles du Gouvernement. Par B. Niewenglowski, Professeur de mathématiques speciales au Lycée Louis-le Grand, Membre du Conseil supérieur de l'instruction publique. Tome I. Sections coniques. Tome II. Construction des courbes planes; compléments relatifs aux coniques Paris 1895. Gauthier-Villars et fils. 482 + 292 S.

Die Lehrgegenstände sind folgende. Im 1. Band: Präliminarien, gerade Linie; homogene, trilineare Coordinaten, Invarianten; Geradenbüschel, Kreis; geometrische Oerter; Curven 2. Grades; Mittelpunkt; Durchmesser; Reduction der Gleichung; Länge der Axen, Sätze von Apollonius; homothetische, ähnliche Figuren; Tangenten und Normalen: Enveloppen; Pole und Polaren; reciproke polare Curven; Kegelschnitte, die durch gegebene Punkte gehen oder gegebene Gerade berühren; Brennpunkte; gemeinsame Secanten zweier Kegelschnitte. Im 2. Bande: Sinn der Concavität eines ebenen Bogens, Inflexionspunkte; Classificirung der vielfachen Punkte einer algebraischen Curve; Krümmung; Untersuchung einer algebraischen Curve in der Nähe eines ihrer Punkte; geradlinige Asymptoten: Sätze von Newton, Mac-Laurin, Carnot; Construction von Curven in geradlinigen Coordinaten; unicursale Linien; einige bemerkenswerte Curven; Polarcoordinaten; Ellipse; Hyperbel; Parabel; Focaleigenschaften der Kegelschnitte; Determination eines Kegelschnitts; graphische Auflösung der Gleichungen; Anwendung der Imaginären auf die analytische Geometrie. H.

Darstellende Geometrie mit Einschluss der Perspective insbesondere zum Gebrauche an Fortbildungs- und Baugewerkschulen, sowie zum Selbstunterricht. Von F. Faber, Lehrer für darstellende Geometrie und Bauconstruction. Nach dem Tode des Verfassers herausgegeben von Otto Schmidt, Architekt und Lehrer der Königlichen Baugewerkschule in Posen. Mit 41 Tafeln in Lithographie. In zwei Teilen. I. Teil: Text. II. Teil: Tafeln. Dresden 1894. Gerhard Kühtmann. 129 S.

Die Lehrgegenstände sind nach einander folgende: Die rechtwinklige Projection; Durchgänge von Linien, Spuren von Ebenen, Winkelbestimmungen und daran anschliessende Einzelaufgaben für das Zeichnen von Durchdringungen und Schattirungen; Durchdringungen der Körper, Schattirung, Perspective. H.

Lehrbuch der darstellenden Geometrie. Von J. Schlotke, Lehrer der allgemeinen Gewerbeschule in Hamburg. I. Teil. Spe-

Digitized by Google

cielle darstellende Geometrie. Mit 165 Figuren. Zweite, verbesserte und erweiterte Auflage. Dresden 1893. Gerhard Kühtmann. 144 S.

Der 1. Teil enthält folgende Lehrgegenstände: Die Parallelprojectionen, Darstellung der Punkte, der geraden Linie, der Ebenen, ebene Durchschnitte der Körper (Kegelschnitte), die Durchdringungen, Berührungsebenen krummer Flächen, Durchschnitte krummer Flächen, Untersuchung krummer Flächen. H.

Anwendung von Quaternionen auf die Geometrie. Von Dr. F. Molenbroek, Privatdocent der Mathematik an der Universität Leiden. Leiden 1893, E. J. Brill. 257 S.

Die Arbeit entwickelt die Principien der analytischen Geometrie, und namentlich der Curven- und Flächentheorie im Gewande der Quaternionentheorie. H.

Eine praktisch ausführbare Lösung des Problems der beliebigen Winkelteilung. A. Beschreibung des Winkelteilungsverfahrens, das ohne Anwendung eines besondern Instruments auszuführen ist. B. Bescheibung zweier für das deutsche Reich patentirter Winkelteilungsinstrumente. Von Professor Dr. R. Dorr, Elbing in Westpreussen. Elbing 1893. C. Meissner. 13 + 5 S.

Die Construction, mittelst welcher ein beliebig gegebener spitzer Winkel nahezu in beliebig gegebenem, rationalen oder irrationalen, Verhältniss geteilt wird, besteht für jeden besondern Fall in proportionaler Teilung einer geraden Strecke und Ziehung einer Geraden durch 2 Punkte, nachdem, genügend für alle Fälle, eine Figur bestehend aus 3 Geraden und einem Kreise gezeichnet ist. Die Berechnung des Fehlers ist nicht mitgeteilt, hat jedoch keine Schwierigkeit. H.

Recueil de problèmes de mathématiques. Géométrie (et géometrie descriptive). A l'usage des classes de mathématiques élémentaires. Par C. A. Laisant, Docteur ès sciences, Ancien élève de l'École Polytechnique. Paris 1893. Gauthier-Villars et fils. 296 S.

Das ganze Werk ist S. 29 besprochen. Der vorliegende Teil umfasst folgende Gegenstände. Ebene Geometrie: Punkte, Gerade und Winkel; circuläre Figuren; Dreiecke; Vielecke; Kegelschnitte und andere Curven. Raumgeometrie: Polyeder; einige krumm begrenzte Körper und Linien auf solchen; darstellende Geometrie. H.

Digitized by Google

Ueber die Reihenentwickelungen der Potentialtheorie. Von Maxime Böcher. Mit einem Vorwort von Felix Klein. Mit 113 Figuren im Text. Leipzig 1894. B. G. Teubner. 268 S.

Das vorliegende Werk ist ein Versuch die Darstellung und dadurch die Theorie der Potentialfunction zu einer gleichmässig umfassenden zu machen. Hierzu wird die Untersuchung durch Einführung der Cyklidencoordinaten gleich anfänglich auf geometrisches Gebiet übertragen. Der 1. Abschnitt betreffend Geometrisches über confocale Cyklidenscharen, handelt über einige Methoden und Grundsätze der projectiven Geometrie, die Geometrie der reciproken Radien, die Anwendung der Weierstrass'schen Theorie der Elementarteiler auf confocale Cyklidenscharen, Beschreibung der Gestalt der verschiedenen confocalen Cyklidenscharen, Einführung krummliniger Coordinaten. Der 2te, betreffend die Randwertaufgabe der Potentialtheorie für allgemeine Sechsflache, über die Lamé'sche Gleichung, über deren Oscillationstheorem, die Behandlung des Potentials durch pentasphärische und cyklidische Coordinaten, die Benutzung der Producte in den Reihenentwickelungen der Potentialtheorie. Der 3te, betreffend die Randwertaufgabe der Potentiale für ausgeartete Cyklidensechsflache, über die Specialfälle der Lame'schen Gleichung und des angehörigen Oscillationstheorems, die Lamé'schen Producte, welche zu ausgearteten Systemen cyklidischer Coordinaten gehören, ausgeartete Cyklidensechsflache und die zugehörigen Randwertaufgaben. Im Anhang werden die bisherigen Resultate auf den Raum von n Dimensionen übertragen. H.

Lehrbuch der Differentialrechnung. Dritter Teil: Anwendung der Differentialrechnung auf die ebenen Curven. Nebst 425 gelösten Aufgaben, 765 Figuren und 138 Erkärungen. Für das Selbststudium und den Gebrauch an Lehranstalten bearbeitet nach dem System Kleyer von Prof. Dr. August Haas. Stuttgart 1894. Julius Maier. 272 S.

Der gesamte Lehrstoff, also nicht nur die Elemente der Differentialrechnung, sondern auch deren geometrische Darstellung, wird als bekannt vorausgesetzt. Entwickelung und Erläuterung findet nicht statt. Der Vortrag gleicht mehr einem Examen mit auswendig gelernten, ziemlich verwickelten Rollen des Examinators und Examinanden als einer Unterweisung. Hoppe.

Zirkelzeichnen zum Gebrauche an Gewerbeschulen, Schulen für Bauhandwerker und polytechnische Fortbildungsanstalten. Von Dr.

Digitized by Google

A. Stuhlmann, Direktor der Allgemeinen Gewerbeschule und der Schule für Bauhandwerker zu Hamburg. Allgemeiner Teil. Mit achtzehn lithographirten Tafeln. Dreizehnte Auflage. Dresden 1891. Gerhard Kühtmann.

Diese kurzen Anweisungen zum Zeichnen von Mustern und projicirten Modellen sind nur für den Gebrauch in der Schule bestimmt. Sie enthalten nur das Besondere; die allgemeinen Vorschriften und Erklärungen sind vom Lehrer zu geben. H.

Praktische Geometrie, Geodäsie.

Lehrbuch der praktischen Geometrie. Von Dr. Ch. August Vogler, Professor an der landwirtschaftlichen Hochschule zu Berlin. Zweiter Teil. Höhenmessungen. Erster Halbband. Anleitung zum Nivelliren oder Einwägen. Mit 90 Holzstichen, 4 Nachbildungen durch Zinkätzung und 5 Tafeln. Braunschweig 1894. Friedrich Vieweg und Sohn. 422 S.

Das Buch lehrt der Reihe nach: das Höhenmessen oder Nivelliren, nämlich unmittelbares Einwägen, 2 Grundformen des Nivellirinstruments, Hauptaufgaben des Einwägens, Einwägen mit Hülfsvorrichtungen, nämlich Nivellirinstrumente mit Fehlervertilgung oder selbstwirkender Einstellung, Einwägen mit Distanzmessung; Fernnivellements und deren Ausgleichung, nämlich geometrische Fernwägungen, Ausgleichen der Einwägungen. H.

Die Terrainlehre, Terraindarstellung und das militärische Aufnehmen. Mit Berücksichtigung der neuesten Bestimmungen der preussischen Landesaufnahme bearbeitet von Hoffmann, Oberst z. D. Mit mehr als 100 Figuren in Holzstich. Sechste Auflage. Potsdam 1891. August Stein. 280 S.

Das Buch lehrt der Reihe nach: die reine Terrainlehre, u. zw. die Orographie (Einzelformen des Geländes (d. i. Terrains), Bodenformen im Zusammenhange) die Hydrographie (Eigenschaften und Vorkommen des Wassers auf der Erdoberfläche, fliessende, stehende Gewässer); die Topographie; die angewandte Terrainlehre, u. zw. militärische Bedeutung des Geländes, Erkundung des Geländes (Zweck und Ausführung, Flussübergänge, Engwege und Pässe, Stellungen); das militärische Planzeichnen, u. zw. Projectionen und Massstäbe, Theorie

Digitized by Google

der Bergzeichnung, Zeichnung der Situation und Schrift, Anforderung an militärische Pläne und Korkis, Entwurf, Copie und Auszeichnung derselben, Vervielfältigung von Karten und Plänen; das militärische Aufnehmen, u. zw. die Instrumente (Vorrichtungen zum Bezeichnen von Punkten im Gelände, Messtisch, Kippregel, Breithaupt'scher Messtischapparat, Disancelatte, Prüfung der Instrumente), die Elementaroperationen mit Messtisch, Kippregel und Latte, die Aufnahme im Bereiche einer Messtischstation, geometrische Netzlegung, zusammenhangende Aufnahme, Triangulation, Projection der Messtischblätter, das Krokiren, Construction und Anwendung einiger Messinstrumente. H.

De verplaatsing van eenige triangulatie-pilaren in de residentie Tapanoeli (Sumatra) tengevolge van de aardbeving van 17 Mei 1892. Door J J. A. Müller. Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam. (Eerste Sectie) deel III. no. 2. Met 3 Platen en 5 Bylagen. Amsterdam 1895. Johannes Müller. 26 S.

Das Erdbeben auf Sumatra vom 17. Mai 1892 hat Einstürze und Verschiebungen des Erdbodens bewirkt, wodurch auch mehrere Pfeiler der alten Triangulation ihren Ort verändert haben. Die gegenwärtige Schrift berichtet über die neu angestellte Vermessung, deren Resultate und die Berechnung der Erdveränderungen. H.

Optik, Akustik und Elasticität.

Lehrbuch der geometrischen Optik. Von R. S. Heath, M. A., D. Sc., Professor der Mathematik am Mason-College in Birmingham. Deutsche autorisirte und revidirte Ausgabe von R. Kanthack, M. Inst. M. E. Mit 153 in den Text gedruckten Figuren. Berlin 1894. Julius Springer. 386 S.

Die Uebersetzung bindet sich nicht überall an unveränderte Wiedergabe des Originals, sondern tritt in manchen Punkten vermehrend und bessernd ein. Der Hauptgesichtspunkt der Abfassung liegt in der geometrischen Theorie der Strahlensysteme, doch schliesst sich diese Theorie durchgehends den optischen Erscheinungen an, deren Gesetze, soweit möglich, vollständig behandelt, nicht aber aus Mechanik des Aethers hergeleitet, sondern bloss als angebliches Resultat der Beobachtung aufgestellt werden. Der Umfang des Lehr-

Digitized by Google

stoffs ist aus folgendem Inhaltsverzeichniss zu ersehen: Wesen und allgemeine Eigenschaften des Lichtes, Reflexion und Brechung des Lichtstrahls, centraler Strahlenbüschel, elementare Theorie der Brechung durch Linsen, Gauss'sche Theorie der Linsen; allgemeine Sätze, Brennlinien und Brennebenen; Alteration centraler Strahlenbüschel; Gestalt und Eigenschaften enger Strahlenbüschel im allgemeinen; Dispersion und Achromasie; das Auge und das Sehen durch Linsen; optische Instrumente, Bestimmung optischer Constanten; Brechung durch Medien von variabler Dichtigkeit, meteorologische Optik. H.

Ueber den Helligkeitswert der Spectralfarben bei verschiedener absoluter Intensität. Nach gemeinsam mit R. Ritter ausgeführten Versuchen. Von A. König. Hamburg und Leipzig 1891. Leopold Voss. 84 S.

Die Leistung der Arbeit charakterisirt der Verfasser mit den Worten: „Einerseits weist sie eindringlicher als es bisher geschehen ist, darauf hin, dass die Young-Helmholtz'sche Farbentheorie, wie aber auch wol zur Zeit von allen ihren Vertretern zugestanden wird, die Form der Grundempfindungscurven als Variable der Helligkeit ansehen muss, und dass in der Bestimmung dieser Abhängigkeit ihre nächste Weiterentwickelung zu suchen ist. Andererseits sind aber auch Beobachtungen mitgeteilt, welche mit der Herring'schen Farbentheorie zunächst noch in unvereinbarem Widerspruch stehen, und die früher oder später dazu nötigen werden, mindestens eine durchgehende Umgestaltung vorzunehmen." H.

Die Haupt- und Brenn-Punkte eines Linsensystemes. Elementare Darstellung der durch Möbius, Gauss und Bessel begründeten Theorie. Von Dr. C. Neumann, Professor der Mathematik an der Universität Leipzig. Mit Figuren im Text. Zweite Auflage. Leipzig 1893. B. G. Teubner. 42 S.

Nach der von Möbius, Gauss und Bessel begründeten Theorie der Linsensysteme sind es 4 Punkte auf deren gemeinsamer Axe, nach deren Ermittelung für jeden einfallenden Strahl der gebrochene Strahl durch sehr einfache Construction gefunden wird, die 2 Brennpunkte und die von Möbius 1829 entdeckten 2 Hauptpunkte. Von Moser und Listing ward später die Theorie fortgebildet und noch die 2 Knotenpunkte hinzugefügt. Es wird stets vorausgesetzt, dass die brechenden Flächen, deren je successive eine aus homogener

Digitized by Google

Substanz bestehende Linse begrenzen, Kugelflächen sind, deren Mittelpunkte auf einer Geraden, der Axe, liegen, und werden nur Einfallspunkte unendlich nahe der Axe in Betracht gezogen. In Betreff der Bearbeitung wird hervorgehoben, dass nur die elementarste Geometrie und Rechnung in Anwendung kommt. Einige historische Angaben der 1. Auflage sind in zweiter berichtigt.

H.

Over de theorie der straling in verband met de voorstelling van Fourier. Door P. H. Bojes. Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen to Amsterdam. Eerste sectie, deel III. Nr. Amsterdam 1895. Johannes Müller. 25 S.

Es werden die Quantitäten der bei Strahlung durch ein körperliches und Aether-Medium fortgeführten Energie des Lichtes und der Wärme nach dem Verfahren von Fouvier berechnet. H.

A treatise on the mathematical theory of elasticity. By A. E. H. Love, M. A. Fellow and Lecturer of St. Johns College, Cambridge. Volume I. II. Cambridge 1892. At the University press. 354 + 327 S.

Das Werk umfasst die Theorie der Elasticität fester Körper nebst den bedeutenden besonderen Problemen, soweit die Theorie als eine entschiedene anerkannt ist, bearbeitet im Anschluss an die Behandlungsweise der einzelnen Teile von Seiten ihrer Autoren. Die Abschnitte des Werks sind folgende: Historische Einleitung, Analysis der Dehnungen, Analysis der Spannungen, Relationen zwischen beiden, Widerstände der Stoffe, allgemeine Sätze, Gleichgewicht in Stäben, krummlinige Coordinaten, allgemeine Lösungen, das Problem von Boussinesq und Cerruti, Lamé's Problem, Vibration einer Kugel, Anwendung conjugirter Functionen, Biegung der Stäbe in der Ebene, dreidimensionale Biegung und Tordirung von Stäben und Drähten, Theorie dünner Stäbe oder Drähte, Theorie der kleinen Vibrationen dünner Stäbe, Abprallen, Theorie ursprünglich krummer Drähte, elementare Theorie dünner Platten, allgemeine Theorie derselben, allgemeinn Theorie dünner elastischer Schalen, deren Anwendung, Stabilität elastischer Systeme. H.

Digitized by Google

image
not
available

Wohlwill, Emil, Galilei betreffende Handschriften der Hamburger Stadtbibliothek. Hamburg, Gräfe & Sillem. 2 Mk.

Methode und Principien.

Elsner, A. u. R. Sendler, der Rechenunterricht in der Volksschule. Im Anschlusse an Dorns Rechenhefte bearb. 2. Aufl. Breslau, H. Handel. 3 Mk. 50 Pf.; geb. 4 Mk.

Grassmann, Rob., die Formenlehre der Mathematik in strenger Formelentwicklung. 4 Thle. in 1 Bde., nebst Formelbuch. Stettin, R. Grassmann. 10 Mk.

Klein, F., üb. die Beziehungen der neueren Mathematik zu den Anwendungen. Leipzig, B. G. Teubner. 60 Pf.

Milarch, Ernst, der mathematische Anfangsunterricht. Bonn, O. Paul. 50 Pf.

Schmidt, K. E. F., moderne Anschauungen über die Kräfte der Elektricität. Leipzig, C. E. M. Pfeffer. 50 Pf.

Steuer, W., Methodik des Rechenunterrichts. 6. Aufl. Breslau, W. Woywod. 4 Mk. 50 Pf.; geb 5 Mk. 25 Pf.

Tillmann, H. A., der Rechenunterricht in der Elementarklasse. Der Zahlenbereich von 1 bis 20. Im Anschluss an Lieb-Seyfferth-Tillmann's Rechenschule für die Lehrer bearb. 2. Aufl. Nürnberg, F. Korn. 80 Pf.

Lehrbücher.

Haller v. Hallerstein, F., Lehrbuch d. Elementar-Mathematik. Für die Portepeefähnrichs-Prüfung in der kgl. preuss. Armee u. die Prüfg. zum Eintritt in die kaiserl. Marine bearb. 10. Aufl. v. Bruno Hülsen. 2. Tl. Geometrie. Berlin, A. Nauck & Co. 5 Mk. 60 Pf.; geb. 6 Mk. 20 Pf.

Holzmüller, Gust., methodisches Lehrbuch der Elementar-Mathematik. 1. Tl. nach Jahrgängen geordnet u. bis zur Abschlussprüfung der Vollanstalten reichend. 2. Aufl. Leipzig, B. G. Teubner. Geb. 2 Mk. 40 Pf.

Sammlungen.

Ambros, Jos. u. Frz. Kopetzky, Rechenbuch (Aufgabensammlung) für Bürgerschulen. 3 Klassen. Neue in die Goldwährung umgerechnete Auflage. Wien, Pichler & Sohn. Kart. 2 Mk. 40 Pf.

Büttner, A. u. E. Kirchhoff, Rechenaufgaben f. mehrklass. Schulen. Ausg. C. in 5 Hften. Hft. IIIa. u. IVa. 1. bis 5. Tausend. Leipzig, Hirt & Sohn. 50 Pf.

Digitized by Google

image
not
available

Arithmetik, Algebra und reine Analysis.

Biermann, Otto, Elemente der höheren Mathematik. Vorlesungen zur Vorbereitg. des Studiums der Differentialrechnung, Algebra u. Functionstheorie. Leipzig, B. G. Teubner. 10 Mk.

Bretschneider, Mor., Lehr- u. Uebungsbuch der allgemeinen Arithmetik u. Algebra für den IV. Jahrgang der k. u. k. Militärunterrealschulen. Wien, Seidel & Sohn. Geb. 2 Mk.

Breuer, Pet. Jos., das Notwendigste über die natürlichen Logarithmen. Leipzig, B. G. Teubner. 80 Pf.

Diesener, H., die Buchstabenrechnung u. Algebra einschliesslich der Logarithmen u. des Rechnens mit denselben. Praktisches Uebungsbuch. 2. Aufl. Halle, L. Hofstetter. 4 Mk.; geb. 4 Mk. 60 Pf.

Grohmann, Ed., zur Auflösung der allgemeinen Gleichung 3. Grades. Wien, A. Hölder. 1 Mk.

Höhnemann, G., Mathematik für Damen. I. Algebra. Leipzig, A. Strauch. Kart. 2 Mk.

Jaccothet, Charles, üb. die allgemeine Reihenentwicklung der Potentialfunktion nach Lamé'schen Produkten. Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht. 1 Mk. 20 Pf.

Kiepert, Lud., Grundriss der Differential- u. Integralrechnung I. Thl.: Differentialrechnung. 7. Aufl. des gleichnamigen Leitfadens von Max Stegemann. Hannover, Helwing's Vlg. 12 Mk.

Landes-Vermessung, grossherzogl. mecklenburgische. 5. Tl. Die konforme Kegelprojektion u. ihre Anwendung auf das trigonometr. Netz 1. Ordng. Hrsg. i. Auftr. der grossherzogl Ministerien des Innern u. der Finanzen, Abteilg. für Domänen u. Forsten v. W. Jordan, Karl Mauck, R. Vogler. Schwerin, Stiller'sche Hofb. Kart. 4 Mk.

Lerch, Mathias, üb. e. arithmetische Relation. Prag, F. Rivnáč. 40 Pf.

Mertens, F., über die Composition binärer quadratischer Formen. Wien, F. Tempsky. 70 Pf.

Otto, Frdr. Aug., ein Problem der Rechenkunst. Rationelle Methode zur Auflösg. v. numer. Gleichgn. m. 1 Unbekannten. (Beliebiger Grad u. jede Form.) 2. Aufl. Tegel, Problem-Verlag. 50 Pf.

Rogel, Frz., üb. Primzahlmengen. Prag, F. Rivnáč. 20 Pf.

Sievert, Heinr., üb. Thetafunktionen, deren Charakteristiken aus Fünfteln ganzer Zahlen bestehen. II. Tl. Bayreuth, C. Giessel. 75 Pf.

Geometrie.

Dantscher, Vict. v., üb. die Ellipse vom kleinsten Umfange durch 3 gegebene Punkte. Wien, F. Tempsky. 90 Pf.

Digitized by Google

image
not
available

Voranstellung der planimetrischen Lehraufgabe der Ober-Sekunda. 1. Aufl. (23. der Kambly'schen Trigonometrie.) Breslau, F. Hirt. 1 Mk. 65 Pf.

Reidt, Frdr., Sammlung v. Aufgaben u. Beispielen aus d. Trigonometrie. 1. Tl.: Trigonometrie. 4. Aufl. neu bearb. v. A. Much. Leipzig, B. G. Teubner. 4 Mk. Auflösung der Aufgaben 1 Mk. 80 Pf.

Schmidt, Emil, das trigonometrische Pensum der Unter-Sekunda des Gymnasiums. Altenburg, Schnuphase. 1 Mk.

Praktische Geometrie, Geodäsie.

Fuhrmann, Arwed, üb. einige geodätische Instrumente, deren Libellen u Fernrohre. Leipzig, E. A. Seemann. 1 Mk. 50 Pf.

Klauser's, A. H., Lehrbuch der Vermessungskunde. Für den Gebrauch an Gewerbeschulen, zugleich als Hilfsbuch für Bau- und Maschinentechniker etc. Bearb. u. hrsg. v. Gust. Lahn. 2. Aufl. Reichenberg, J. Fritsche. 3 Mk. 50 Pf.

Landes-Triangulation, die kgl. preussische. Hauptdreiecke. 7. Thl. Gemessen u. bearb. v. d. trigonometr. Abtheilg. der Landesaufnahme. Berlin, Mittler & Sohn. Kart. 15 Mk.

Schlieben, W. E. A. v., vollständiges Hand- u. Lehrbuch der gesammten Landmesskunst, mit besond. Berücksichtigung der pr. Vermessungsvorschriften: Kat. Anw. VIII u. IX vom 25. Okt. 1881. Hrsg. v. W. Caville.. 9. Aufl. 1. Bd. Vorstudien u. Instrumentenkunde. 4. u. 5. Hft. Halberstadt, Ernst'sche B. à 2 Mk.

Veröffentlichungen des kgl. preuss. geodätischen Institutes. Astronomisch-geodätische Arbeiten I. Ordng. Telegraphische Längenbestimmgn. in d. J. 1890, 1891 u. 1893. Berlin, P. Stankiewicz. 15 Mk.

— des kgl. preuss. geodätischen Instituts. Zenitdistanzen zur Bestimmung der Höhenlage der Nordsee-Inseln Helgoland, Neuwerk u. Wangeroog, sowie des Leuchtturmes auf Roter Sand üb. den Festlandspunkten Cuxhaven u. Schilling. Ebd. 20 Mk.

Technik.

Elektrotechnikers Taschenbuch 1895/96. Leipzig, Eisenschmidt & Schulze. Geb. 1 Mk.

Encyklopaedie der Elektrochemie. 4. Bd. Die Sekundär-Elemente. Auf Grundlage der Erfahrung dargestellt v. Dr. Paul Schopp. 1. Tl., enth. die Theorie des Blei-Sammlers u. Construktion v. Planté-Batterien. Halle, W. Knapp. 8 Mk.

Digitized by Google

image
not
available

Ausgeführt durch die k. u. k. Kriegsmarine i. d. J. 1892—94. Hrsg. vom k. u. k. Reichs-Kriegsministerium, Marine-Sektion. Wien, C. Gerold's Sohn. 18 Mk. 40 Pf.

Voller, A., photographische Registrirung v. Strömungen magnetischer u. elektrischer Messinstrumente durch Strassenbahnströme u. deren Verhütung. Hamburg, Gräfe & Sillem. 1 Mk. 50 Pf.

— Versuche üb. die Schutzwirkung v. Holzleisten u. Staniol-Sicherungen gegen den Eintritt hochgespannter Ströme in Schwachstrom-Leitungen bei Berührung mit elektrischen Strassenbahn-Leitungen. Ebd. 1 Mk.

Erd- und Himmelskunde.

Auerbach, F., die Mondphasen u. das Wetter. Leipzig, W. Engelmann. 50 Pf.

Augustin, Fr., die Resultate der meteorologischen Beobachtungen auf der „Petrinwarte" in Prag. Prag, F. Rivnáč. 60 Pf.

Beobachtungen der meteorologischen Station des Observatoriums der kaiserl. Marine in Wilhelmshaven. Ausgeführt i. Auftrage des Reichs-Marine-Amts unter Leitung v. C. Börgen. Hrsg. v. dem kaiserl. Observatorium zu Wilhelmshaven. 1. Thl. (Stündliche Aufzeichnungen des Luftdruckes, der Windrichtung und der Windgeschwindigkeit während der J. 1889 bis 1893.) Berlin, E. S. Mittler & Sohn. 1 Mk. 75 Pf.

Burgwedel, Carl, Wetterbüchlein. Praktische Anleitung zur Beobachtung u. Voraussage des Wetters mit e. Anhang: Falb's kritische Tage. Dresden, Meinhold & Söhne. 1 Mk.

Catalog der astronomischen Gesellschaft. 1. Abth. Catalog der Sterne bis zur 9. Grösse zwischen 80° nördlicher u. 2° südlicher Declination für das Aequinoctium 1875. 10. Stück. Catalog von 9208 Sternen zwischen 20° 0′ und 25° 10′ nördlicher Declination 1855 f. das Aequinoctium 1875 nach Zonen-Beobachtungen am Pistor- und Martins'schen Meridiankreise der kgl. Sternwarte zu Berlin in d. J. 1879–1883 v. E. Becker. Leipzig, W. Engelmann. 18 Mk.

Frejlach, Jos., Zur Kenntniss der anemometrischen Verhältnisse von Prag. Prag, F. Rivnáč. 12 Pf.

Hann, J., die Verhältnisse der Luftfeuchtigkeit auf dem Sonnblickgipfel. Wien, F. Tempsky. 1 Mk.

Hepperger, J. v., üb. die Helligkeit des verfinsterten Mondes und die scheinbare Vergrösserung des Erdschattens. Ebd. 80 Pf.

Hegyfoky, Jak., üb. die Windrichtung in den Ländern der ungarischen Krone, nebst e. Anhg. üb. Barometerstand u. Regen. Budapest, F. Kilian. 6 Mk.

Digitized by Google

image
not
available

Bucht der Nordsee, angestellt i. J. 1894, u. Elemente des Erdmagnetismus an festen Stationen Europa's i. d. J. 1885, 1890 u. 1893. Hamburg, Selbstverlag. 1 Mk.

Spieker, P., die kgl. Observatorien für Astrophysik, Meteorologie und Geodaesie auf dem Telegraphenberge bei Potsdam. Berlin, Ernst u. Sohn. 30 Mk.

Stechert, Carl, Bahnbestimmung des Planeten (258) Tyche. Hamburg, Gräfe & Sillem. 1 Mk. 50 Pf.

Veröffentlichungen des kgl. preuss. meteorologischen Instituts. Hrsg. durch Wilh. v. Bezold. Ergebnisse der Gewitter-Beobachtgn. i. J. 1891. Berlin, A. Asher & Co. 3 Mk.

— dass. Ergebnisse der Beobachtungen an den Stationen II u. III. Ordnung i. J. 1891, zugleich deutsches meteorolog. Jahrbuch f. 1891. Beobachtungssystem des Königr. Preussen u. benachbarter Staaten. 3. Hft. Ebd. 9 Mk.

— dass. i. J. 1894. 2. Hft. Ebd. 2 Mk. 50 Pf.

— dass. Ergebnisse der meteorolog. Beobachtungen i. Potsdam i. J. 1893. Ebd. 9 Mk.

Vodušek, M., die astronomische Strahlenbrechung. Laibach, M. Fischer. 50 Pf.

Nautik.

Bolte, Frdr., die Praxis der Sumner'schen Standlinien an Bord. Hamburg, L. Friderichsen & Co. 2 Mk.

Jahrbuch, nautisches, oder Ephemeriden u Tafeln f. d. J. 1898 zur Bestimmung der Zeit, Länge u. Breite zur See nach astronomischen Beobachtungen. Hrsg. v. Reichsamt des Innern. Unter Red. v. Tietjen. Berlin, C. Heymann's Verl. Kart. 1 Mk. 50 Pf.

— , kleines nautisches f. 1896. 35. Jahrg. Hrsg : W. Ludolph. Bremen, Heinsius Nchf. 75 Pf.

Ludolph, W., Leuchtfeuer u. Schallsignale der Erde. 1895. 24. Jahrg. 8. Aufl. Ebd. Geb. 7 Mk. 50 Pf.

— dasselbe in Ostsee, Nordsee u. Kanal. 24. Jahrg. 8. Aufl. Ebd. 3 Mk.

Physik.

Abhandlungen, physikalische der königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Aus d. J. 1894. Berlin, G. Reimer Kart. 13 Mk.

Bachmetjew, P., über die Vertheilung der magnetischen Verlängerung in Eisendrähten. Wien, F. Tempsky. 50 Pf.

Digitized by Google

Bermbach, W., der elektrische Strom u. seine wichtigsten Anwendungen in gemeinverständlicher Darstellung. Leipzig, O. Wigand. 2 Mk.

Boymann, Joh. Rob., Lehrbuch der Physik f höh. Lehranstalten. 6. Aufl. v. G. Vering. Düsseldorf, L. Schwann. 4 Mk.; geb. 4 Mk. 50 Pf.

Dressel, Ludw., elementares Lehrbuch der Physik nach den neuesten Anschauungen für höhere Schulen und zum Selbstunterricht. Freiburg i. B., Herder's Verl. 7 Mk. 50 Pf.; geb. 8 Mk.

Fleischmann, Leonh., Strömung der Elektricität in Rotationsflächen. Wien, F. Tempsky. 40 Pf.

Geitler, Jos., Schwingungsvorgang in complicirten Erregern Hertz'scher Wellen. Ebd. 50 Pf.

Hübner, Max. Grundzüge der Physik. Ein Merk- u. Wiederholungsbuch. 3. Aufl. Breslau, E. Morgenstern. Kart. 55 Pf.

Kapp, Gisbert, Transformatoren für Wechselstrom u. Drehstrom. Eine Darstellung ihrer Theorie, Konstruktion und Anwendung. Berlin, J. Springer. 7 Mk.

Klemenčič, Jgn., Beobachtungen üb. gleichzeitige Magnetisirung in circularer u. axialer Richtung. Wien, F. Tempsky. 40 Pf.

Koláček, Frz., Beiträge zur elektromagnetischen Lichttheorie. Die Theorie des Kerr'schen Reflexionsphaenomens. Prag, F. Rivnáč. 60 Pf.

Lehmann, O., Elektricität und Licht. Einführung in die mess. Elektricitätslehre u. Photometrie. Braunschweig, Vieweg & Sohn. 7 Mk.

Lüpke, Rob., Grundzüge der wissenschaftlichen Elektrochemie auf experimenteller Basis. Berlin, J. Springer. 3 Mk.; geb. 3 Mk. 50 Pf.

Sauter, F., über Kugelblitze. Hamburg, Verlagsanstalt. 80 Pf.

Schweidler, Egon R. v., üb. die innere Reibung u. elektrische Leitungsfähigkeit v. Quecksilber u. einigen Amalgamen. Wien, F. Tempsky. 20 Pf.

Verhandlungen der physikalischen Gesellschaft zu Berlin. 14. Jahrg. 1895. Leipzig, J. A. Barth. 4 Mk.

Wiesengrund, Bernh., die Elektricität. Ihre Erzeugung, prakt. Verwendung u. Messung. Für Jedermann verständlich kurz dargestellt. 6.—10. Taus. Frankfurt a./M., H. Bechhold. 1 Mk.

Vermischte Schriften.

Abhandlungen, mathematische der königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Aus d. J. 1894. Berlin, G. Reimer. Kart. 4 Mk. 50 Pf.

Digitized by Google

Berichte der sächs. Gesellschaft der Wissenschaften. Math.-phys. Classe. 1894 III u. 1895 I. Leipzig, S. Hirzel. à 1 Mk.

Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften. Nr. 60—61. Leipzig, W. Engelmann. Kart. 60. Die geometrischen Constructionen, ausgeführt mittelst der geraden Linie u. e. festen Kreises, als Lehrgegenstand auf höheren Unterrichts-Anstalten u. zur prakt. Benutzg. v. Jac. Steiner. (1833). Hrsg. v. A. J. v. Oettingen. 1 Mk. 20 Pf. — 61. Ein Versuch, die mathematische Analysis auf die Theorien der Elektricität u. des Magnetismus anzuwenden, v. George Green. (Veröffentlicht 1828 in Nottingham.) Hrsg. v. A. J. v. Oettingen u. A. Wangerin. 1 Mk. 80 Pf.

Sammlung populärer Schriften hrsg. v. der Gesellschaft Urania zu Berlin. Nr. 8 u. 34. Berlin, H. Paetel. 8. Meteorologische Volksbücher. Ein Beitrag zur Geschichte der Meteorologie u. zur Kulturgeschichte. Von G. Hellmann. 2. Aufl. 1 Mk. — 34. „Teslas Licht der Zukunft". Populärer Experimentalvortrag über Ströme hoher Wechselzahl u. Spannung v. P. Spies. 50 Pf.

Sitzungsberichte der kgl. böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften. Mathematisch-naturwissenschaftl. Classe. Jahrg. 1894. Prag, F. Rivnáč. 20 Mk.

— Münchener. Mathemat. Classe. 1895. 1. Hft. München, Franz' Verlag. 1 Mk. 20 Pf.

— Wiener. Math.-naturw. Classe. Wien, F. Tempsky. Abth. I. 103. Bd. 8.—10. Hft. 3 Mk. 20 Pf. — 104. Bd. 1. u. 2. Hft. 5 Mk. 80 Pf. — Abth. IIa. 103. Bd. 9. u. 10. Hft. 3 Mk. — Abth. IIb. 104. Bd. 1. u. 2. Hft. 3 Mk.

Wolf, R., Taschenbuch f. Mathematik. 6. Aufl. 2. Lfg. Zürich F. Schulthess. 1 Mk. 20 Pf.

Digitized by Google

Fig. 13.

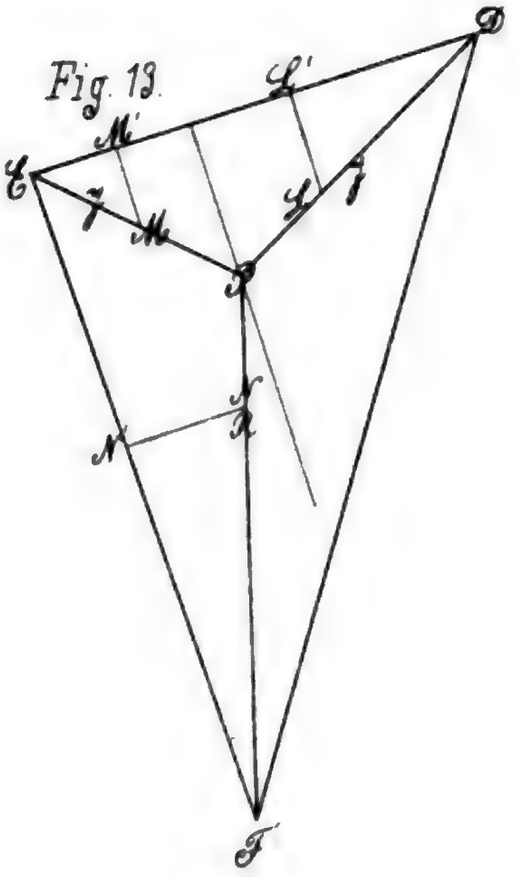
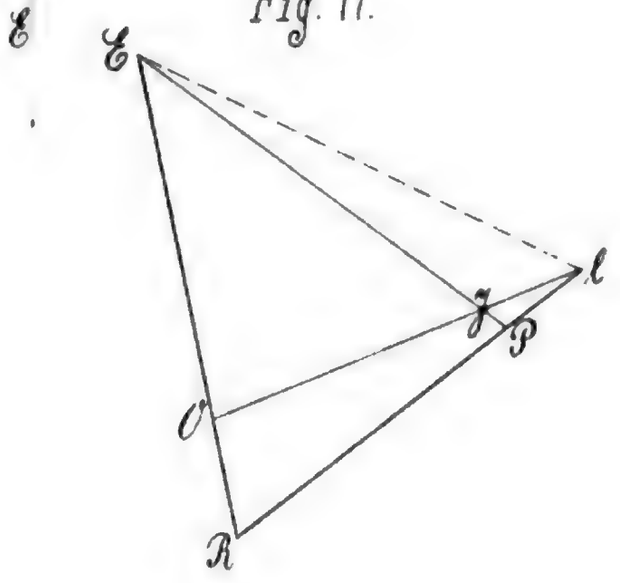


Fig. 17.



Digitized by Google

Litterarischer Bericht

LVI.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Beilage zum V. Jahresbericht (Ostern 1895) der städtischen Realschule zu Dresden-Johannstadt. Notizen über Wilhelm Gotthelf Lohrmann, einen Dresdener Geodäten, Meteorologen und Astronomen. Von Oberlehrer Dr. Hartenstein. Dresden 1895. Albert Hille. 4°. 54 S.

Die Schrift ist ein Vorläufer des 100jährigen Jubiläums und enthält eine vielseitige, zusammenhangende, anscheinend vollständige Lebensbeschreibung gestützt auf zahlreiche Documente. Wilhelm Gotthelf Lohrmann, Sohn des Ziegelmeisters Wilhelm Gotthelf Lohrmann und Sophie geb. Michaelis, ist in Dresden geboren am 31. Januar 1796, gestorben im Januar 1840. Er besuchte 8 Jahre die Dresdener Garnisonschule, wandte sich dann der Landesvermessung zu und verharrte in dieser Tätigkeit den grössten Teil seines Lebens. Grossenteils sein Verdienst ist die Entwickelung des Landesvermessungswesens zur heutigen Ausbildung. Seine erste grosse Arbeit war für den Wiederbau der Vorstädte der Festung Wittenberg nach deren Zerstörung, in grösserer Entfernung von derselben. Weitere Werke waren die Kameralkarte von Sachsen, die Elbstromkarte u. a. m. Ferner reiste er als Begleiter des Herrn von Schlieben nach Süddeutschland, dessen Zweck war, von den geodätischen Fortschritten der andern Staaten Kenntniss zu nehmen. Auch an andern technischen Werken war er beteiligt. Er ward zum Inspector der Kameralvermessung, dann nach Errichtung der

Digitized by Google

technischen Bildungsanstalt in Dresden zu deren Vorsteher, dann zum Oberinspector des Kgl. mathematisch-physikalischen Salons ernannt. In der Astronomie war er durch Kartenzeichnen tätig; das bedeutendste ist wol seine Mondkarte. Er vermählte sich 1819 mit Christiane Amalie Seifert in Dohna. H.

Methode und Principien.

F. Klein, Vorträge über ausgewählte Fragen der Elementargeometrie. Ausgearbeitet von F. Tagert. Eine Festschrift zu der Pfingsten 1895 in Göttingen stattfindenden dritten Versammlung des Vereins zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts. Mit 10 in den Text gedruckten Figuren und 3 lithographirten Tafeln. Leipzig 1895. B. G. Teubner. 66 S.

Die Vorträge handeln zuerst von der Möglichkeit der Construction algebraischer Ausdrücke mit Lineal und Zirkel. Construirbar sind alle, welche ausser Quadratwurzeln keine Potenzwurzeln enthalten. Ferner wird unter allen Irrationalzahlen eine besondere Classe abgesondert; zu ihr gehören diejenigen, welche durch algebraische Gleichungen bestimmt sind, alle übrigen werden transcendent genannt. Zuletzt wird bewiesen, dass die Zahlen π und e transcendent sind. Auch die Kreisteilung ist behandelt. H.

Methodenlehre. Von Wilhelm Wundt. Erste Abteilung. Allgemeine Methodenlehre. Logik der Mathematik und Naturwissenschaften. Zweite, umgearbeitete Auflage. Stuttgart 1894. Ferdinand Enke. 590 S.

Dies Buch ist der 2. Band des Werkes: Logik. Eine Untersuchung der Principien der Erkenntniss. Im 1. Abschnitt (Allgemeines Methodisches) fordert der Verfasser mit Recht als Vorbedingung jeder Untersuchung eine klare Auffassung des Objects, der beobachteten Erscheinung, auch nennt er mit Recht dies Empfangene die Tatsache. Nun fährt er aber fort: die Vergegenwärtigung dieser Tatsache vollzöge sich in einer Entwickelungsfolge von drei Stufen; die erste wäre die Zerlegung der Erscheinung in ihre Teilerscheinungen; die zweite die Auffassung von deren causalen Beziehungen, die dritte nähme Rücksicht auf ihre logischen Beziehungen. Hier scheint vergessen worden zu sein, wovon die Rede war. Sind etwa die causalen Beziehungen mit der Erscheinung durch die Sinne empfangen? Und können logische Beziehungen nachgeholt werden?

Digitized by Google

Drei ganz heterogene Dinge werden confundirt, was von einem Lehrer der Logik wol nicht zu erwarten war. Die zwei specielleren Abschnitte geben Bericht über die factisch erfolgreich geübten Methoden und deren successive Entwickelung, auch einige ziemlich äusserliche Urteile, so gut sie eben ein an der Forschung nicht Beteiligter aus der Litteratur zu entnehmen vermag. Hoppe.

Bemerkungen zur Abgrenzung und Verwertung des Unterrichts in den Elementen der Infinitesimalrechnung. Von H. Seeger, Director, Güstrow 1894. Opitz u. Co. 24 S.

Die Schrift betrifft anfänglich ein früher vom Verfasser herausgegebenes Buch (ein Leitfaden für den Schulunterricht in der Infinitesimalrechnung). Ihr Hauptinhalt aber ist die Verteidigung seiner Ansicht, dass es nämlich nicht nur möglich, sondern zur Hebung des mathematischen und physikalischen Unterrichts auch durchaus notwendig sei, die Elemente der Differential- und Integralrechnung auf der Schule zu lehren. Gegen diese Ansicht spricht Vieles; wir wollen das Nächstliegende hervorheben. Die Möglichkeit, auf dem Standpunkt von Prima jene Elemente verständlich zu machen, welche der Verfasser durch seinen „Leitfaden" dargetan zu haben behauptet, sei unbestritten. Ob aber die Schulen Zeit übrig haben, eine neue Doctrin in den Lehrplan aufzunehmen, darüber schweigt er. In neuster Zeit haben sich sehr viele Stimmen für tunliche Einschränkung des Umfangs des Lehrstoffes erhoben, nicht bloss um Ueberbürdung zu meiden, sondern hauptsächlich zugunsten der Intensität, Gründlichkeit, Klarheit, Solidität und Brauchbarkeit des anzueignenden Wissens und Könnens. Diese Stimmen werden gar nicht erwähnt, geschweige denn zu widerlegen versucht. Schwerer wiegend als die vorgenannten Bedenken sind die Einwände, welche die Ansicht und deren Verteidigung selbst hervorruft. Der Verfasser verwirft erklärtermassen, aber sehr eilfertig, den Gegensatz zwischen niederer und höherer Mathematik mit Berufung auf seinen „Leitfaden". In der Tat zeigen auch französische Schulbücher eine gleiche Unempfindlichkeit gegen den Unterschied, indem sie jeden Begriff auf welcher Stufe immer, nachdem er exact definirt ist, als Eigentum des Schülers betrachten: aber jene ungründliche Pädagogik der Franzosen ist nicht die unsere. Im vorliegenden Falle ist der Grund, warum der Verfasser die natürliche Scheidung von niederer Mathematik und höherer Analysis nicht kennt, augenfällig: er nennt nämlich letztere nur Infinitesimalrechnung, nie Functionentheorie, und dieser Name charakterisirt in der Tat völlig seine Auffassung der Disciplin und bestimmt für ihn deren Grenzen. Mit Auffassung der Grösse

Digitized by Google

als Function betritt der Lernende einen ganz neuen Boden und es öffnet sich vor ihm ein unabsehbares Feld neuer mathematischer Erkenntniss, von dem er als Elementarmathematiker keine Ahnung haben konnte. Es kann daher keine entschiedenere Grenze geben, als sie hier durch die Natur des Lehrgegenstandes gesetzt ist. Die Grenze schon im Schulcursus zu überschreiten, von den Organen der Analysis, der Differential- und Integralrechnung ein Stückchen mitzuteilen, wozu vielleicht noch einige besonders einfache Anwendungen kommen, würde ein höchst unordentliches Vorgehen sein, das keine guten Früchte verspricht. Sehen wir jetzt von der Functionslehre ab. Unendlich kleine und grosse Grössen, Variabele und Constante, auch Functionen, (wenn auch nicht so genannt,) sind Elemente der Elementarmathematik. Dabei bleibt letztere stets Lehre von der seienden, nicht werdenden, Grösse. Hätte nun der Verfasser seine Aussagen über die Infinitesimalrechnung auf die elementare Lehre von den unendlichen Grössen beschränkt, so würden wir ihm völlig darin beistimmen, dass diese Lehre mit grossem Gewinn für die Methode in den Schulcursus aufgenommen werden könnte, nur nicht erst in Prima, sondern mit den Anfängen der Algebra verbunden. Sie besteht dann aus einem einzigen Lehrsatze und einigen Erklärungen*) ausreichend für alle Anwendungen des Unendlichen innerhalb der Schulmathematik, ist also nur Sache der Lehrmethode und ohne Einfluss auf den Schulplan. Obgleich die Sache längst bekannt ist, bieten die neu erscheinenden Lehrbücher noch immer Anlass darauf zurück zu kommen. Dass die in jedem Falle eines Infinitesimalbeweises sich erneuernde Umständlichkeit ein Mangel der Methode ist, der Abhülfe bedarf, scheint man allerseits inne zu werden. Anstatt aber einfach und gründlich dadurch abzuhelfen, dass man alle jene umständlichen Argumentationen durch einen vorangestellten Satz erledigt, greift man nach allerhand Auskunftsmitteln, die das Pflichtgemässe doch nicht leisten: man verzichtet auf Allgemeinheit, Strenge, Genauigkeit, bemüht sich die Mängel der Bündigkeit zu verhüllen, zu überreden, wo man nicht überzeugen kann, meidet, umschreibt das verrufene Wort „unendlich" oder gebraucht es ohne Erklärung, beides die Kenntniss eines wichtigen und unentbehrlichen Begriffs dem Schüler vorenthaltend. Klarheit in diesem Punkte ist bis heute noch sehr zu vermissen. Noch ist der alte Irrtum nicht überwunden, das Resultat einer Rechnung mit Unendlichkleinem werde erst genau, wenn letztere null werden, und zum Verstehen des Schlusses auf dieses Resultat werde ein unend-

*) wie Ref. in dies. Arch. und anderwärts gezeigt hat.

Digitized by Google

licher Gedankenprocess erfordert. Die Aeusserungen des Verfassers scheinen darauf zu deuten, dass er Gegner dieser herrschenden Unklarheiten ist: aus dem „Leitfaden" mag man ersehen, ob und wieweit es der Fall ist. Nun spricht aber der Verfasser stets schlechthin von der Infinitätsrechnung, unbekümmert ob sie in das Gebiet der Functionentheorie eingreift, und zwar ausdrücklich mit Einschluss von Differential- und Integralrechnung. So gut dann auch die Aufnahme der elementaren Lehre vom Unendlichen in den Schulunterricht gerechtfertigt ist, so fehlt doch noch alle Begründung für die gleiche Forderung für die Infinitesimalrechnung in jenem umfassenden Sinne. In der Tat genügt erstere offenbar dem meisten, was angeführt ist: in Betreff der Geometrie kann kein Zweifel sein, Kegelschnitte, Cylinder, Kegel, Kugel pflegen synthetisch behandelt zu werden; auch in der Mechanik genügt für die Lehre vom Fall, Centralbewegung (wo sich leider der Verfasser mit einer sehr gewöhnlichen, aber incorrecten Behandlung einverstanden äussert) Pendel u. s. w. die elementare Basis. Für die Physik liegt keine natürliche Scheidung zwischen niederer und höherer vor. Das Pensum zu erweitern hat der Verfasser nicht gefordert. Wir können also bei der bisherigen Praxis stehen bleiben, der gemäss die quantitativen Gesetze nur soweit hergeleitet werden, als es der mathematische Standpunkt der Classe erlaubt, darüber hinaus die Gesetze bloss qualitativ mitgeteilt werden. Hiernach kann sich eine Notwendigkeit die Mathematik auf der Schule weiter zu treiben als bisher aus dem physikalischen Unterricht nicht ergeben. Der Verfasser hält namentlich die Potentialtheorie für unerlässlich. Was ist der Schulbildung damit gedient? Sollen die Schüler mit allem bekannt sein, wovon unter Gelehrten viel gesprochen wird? Aus dem ergibt sich, dass die Ansicht des Verfassers, die Differential- und Integralrechnung seien ein notwendiger Lehrgegenstand für die Schule, aller Begründung entbehrt, weil alles, worauf er sie stützt, allein für die elementäre Unendlichkeitslehre gültig ist.

Hoppe.

Essay's sur la philosophie des sciences. Analyse. Mécanique. Par C. de Freycinet, de l'Institut. Paris 1896. Gauthier-Villars et fils. 336 S.

Die Gegenstände des I. Teils, Analysis, sind: Raum und Zeit, das Unendliche, Stetigkeit und unendliche Teilbarkeit, Unendlichkleine, Grenzwerte, infinitesimale Methode, Infinitesimalrechnung, die infinitesimale Analysis und die Materie. Die des 2. Teils, Mechanik, die Kraft und die Masse, dynamische Capacitäten, die Schwere,

Digitized by Google

das dynamische Problem, die allgemeinen Bewegungsgesetze, Bewegungsgrösse, lebendige Kraft, Energie, Erhaltung der Bewegung und Energie in der Natur, mögliche Ursachen des Verlustes an Energie, Constanz der Naturgesetze. Hierauf folgen noch 3 Noten des Inhalts: Ueber die Realität des Raumes und der Zeit, über die Unendlichkeit des Universums, über ein Argument des Determinismus. In Betreff des Raumes und der Zeit erklärt der Verfasser sogleich, dass er auf die streitigen Fragen, ob Raum und Zeit reell, ob sie objectiv seien, nicht eingehen, sondern nur die 4 gemeinsamen Eigenschaften, notwendig, unendlich, stetig und homogen in Betracht ziehen will. Den Streit über erstere Fragen konnte er allerdings beiseite lassen; denn er ist bisher von ganz ungenügendem Standpunkte geführt worden, ohne die Vorfrage, wie wir zu den Ideen des Raumes, der Zeit, der Realität und Objectivität gekommen sind, und was wir darunter verstehen, wodurch die Fragen leicht genug zur Entscheidung zu bringen wären. Aber von einer solchen Kritik der Begriffe bleibt der Verfasser ebenso fern. Dies tritt besonders hervor, wo er das infini im Gegensatz zum indéfini als das absolute Unendlich deutet und behauptet, der Mensch habe von Natur diese Idee, und sie liege allem Denken einer Grössenvariation zugrunde. Erklärt wird sie nicht; vielmehr gesteht der Verfasser selbst ein, dass sie auf mathematischem Standpunkt nicht gewonnen werden könne. Obgleich sie demnach ganz ausserhalb der Wissenschaft steht, und bei Besprechung der Methoden der Analysis nur vom indéfini die Rede ist, so soll doch das absolute Unendlich das eigentliche Element der Infinitesimalrechnung sein. Hiernach scheint der Verfasser unter Philosophie der Wissenschaften nicht Ursprungsforschung und Kritik ihrer Fundamente, sondern ein Gebiet zu verstehen, in welchem noch uncontrolirte Meinungen Platz finden und wissenschaftlichen Erzeugnissen als ebenbürtig geschätzt werden. Die Behandlung der angeführten Themata lässt sich nicht wol in einem einfachen Berichte deutlich machen; hierzu würde eine ausführliche Gegenschrift nötig sein. Bei leicht verständlichen Dingen verweilt sie übermässig lange; die Fragen aber, in denen das Interesse am Thema liegt, werden nie unumwunden ausgesprochen und sind schwer zu finden. Hoppe.

Einführung in die Grundlagen der Geometrie. Von Dr. Wilhelm Kölling, Professor der Mathematik an der Akademie zu Münster i. W. Erster Band. Mit 40 Figuren im Text. Paderborn 1893. Ferdinand Schöningh. 357 S.

Das Buch ist gewidmet der Physiko-mathematischen Gesellschaft

Digitized by Google

in Kasan zur hundertjährigen Gedächtnissfeier des Geburtstages von N. J. Lobatschewsky, geb, 1793, gest. 1856. Es ist bestimmt, über die gewonnenen Resultate der vielen in neuster Zeit zutage getretenen Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie eine orientirende Zusammenstellung zu geben. Der Verfasser wagt zu hoffen, dass, nachdem die Vorfragen bereits erledigt seien, der Abschluss jener Untersuchungen in nicht zu ferner Zeit bevorstehe. Der 2. Band soll nächstens erscheinen. Der erste Band geht auf die nichteuklidische und Mehrdimensionengeometrie ein, doch behandelt er auch Fragen der euklidischen Geometrie Er hat 4 Abschnitte, nämlich Berechtigung der nichteuklidischen Raumformen, projective Geometrie, mehrdimensionaler Raum, Clifford-Klein'sche Raumformen.

H.

Festschrift zum fünfundzwanzigjährigen Amts-Jubiläum des Herrn Oberschulrat Dr. Hartwig. Der Unterricht in der mathematischen Geographie auf dem Güstrower Realgymnasium. Von H. Seeger Güstrow 1894. Opitz u. Co. 18 S.

Es wird bloss von einzelnen Uebungsaufgaben und Aeusserungen einzelner Personen in der Kürze und ohne näheres Eingehen gesprochen.

H.

Lehrbücher.

Trigonometrie. Lehrbuch und Aufgabensammlung für Schulen. Von Wilhelm Winter, Professor für Mathematik und Physik am k. Alten Gymnasium in Regensburg. Zweite Auflage. München 1895. Theodor Ackermann. 78 S.

Stereometrie. Lehrbuch und Aufgabensammlung für Schulen. Von Wilhelm Winter, Professor für Mathematik und Physik am k. Alten Gymnasium in Regensburg Zweite Auflage. München 1895. Theodor Ackermann. 115 S.

Beide Bücher sind in erster Auflage im 38. litt. Bericht Seite 16 besprochen, und Aenderungen in zweiter nicht bemerkt worden.

H.

Ebene Geometrie. Von G. Mahler, Professor der Mathematik am Gymnasium in Ulm. Stuttgart 1895. G. J. Göschen. 160 S.

Digitized by Google

Der Lehrgang zeigt, dass auf die Anschauung das grösste Gewicht gelegt wird. Der erste Abschnitt ist betitelt: Symmetrie und Congruenz. Er enthält die Vorführung und Benennung der Gebilde, welche Gegenstand der Lehre sind, nebst deren Elementarbewegungen, Verschiebung und Drehung. Die Sätze von der Flächengleichheit werden am Ende angeschlossen. Die logischen Forderungen werden nicht vernachlässigt, anfangs die Sätze immer als Resultate einer Herleitung, später auch erst aufgestellt, dann bewiesen. Es folgen nun Proportionen und Aehnlichkeit. Im Beweise für den Fall der Incommensurabilität fehlt, wie gewöhnlich, der letzte Schluss. Angeschlossen ist die Kreismessung; die Proportionen am Kreise aber bleiben unbeachtet. Der letzte Abschnitt handelt von Wesen und Behandlung der geometrischen Aufgabe. Uebungsaufgaben, wozu auch zu beweisende Sätze gehören, sind jeder Lehre beigefügt.

Hoppe.

Lehrbuch der Geometrie für höhere Schulen. Von Dr. A. Gille, Oberlehrer an der Realschule zu Cottbus. Erster Teil: ebene Geometrie. — Zweiter Teil: Trigonometrie und Stereometrie. Halle a. S. 1895. Buchhandlung des Waisenhauses. 133 + 23 S.

Die Lehrweise unterscheidet sich formell dadurch von der gewöhnlichen, dass jeder Lehrsatz durch eine Frage (Aufgabe) und deren Untersuchung eingeleitet wird. Dies Verfahren wird hier, wie auch anderwärts heuristische Methode genannt. Soll damit gesagt sein, dass dabei der Schüler die Sätze selbst fände oder finden lernte, so ist das eine Täuschung, welche enthüllt zu werden verdient. Selbst zu entdecken vermag nur der Kundige, welcher durch einen genügenden Fond an Wissen und Vertrautheit mit dem Lehrinhalte eines Gebietes das Vertrauen zu eigenem Verstande gewonnen hat; er wird dann ohne Anleitung, wenn das Interesse vorhanden ist, ebenso gut entdecken können als mit fremder Hülfe. Bei dem genannten Verfahren wird der Schüler auf einem, nicht von ihm, sondern vom kundigen Lehrer gewählten Wege zu einem nur dem Lehrer bekannten Ziele geführt, selbst der letzte Schluss wird ihm zudictirt. Alles zweckgemässe Denken ist ihm abgenommen. Dies ist der Nachteil, in welchem das Verfahren hinter der Führung des Beweises nach aufgestelltem Lehrsatz zurücksteht, wo der Schüler Mitwisser des Zieles ist. Ausserdem scheint es die Aufmerksamkeit von logischen Schwächen abzulenken; wenigstens geht das Lehrbuch über Mängel der Bündigkeit stillschweigend hinweg. Abgesehen von der gepriesenen, in der Tat aber nichts weniger als einen Vorzug bildenden sog. heuristischen Methode, zeichnet sich das Lehrbuch in

Digitized by Google

den „Folgerungen“ und Uebungen, welche auf jeden Satz folgen, durch die Sorgfalt aus, mit welcher alle erdenklichen zur Orientirung dienenden Ergänzungsfragen in Bezug auf Figurbetrachtung und Sätze ausgesprochen sind, die man zum grossen Teil gewöhnlich als selbstverständlich übergeht, die aber eine gute Prüfung des Verständnisses abgeben; namentlich wird immer die Gültigkeit der Umkehrung der Sätze zur Frage gemacht.

Die Trigonometrie und Stereometrie werden nur in äusserster Verkürzung gegeben. Die Goniometrie erklärt bloss Functionen, von ihren Relationen sind nur 2 genannt, die Summe der Winkel, ihre Verdoppelung und Halbirung kommen nicht vor. Die Dreiecksberechnung wird nicht ausgeführt, sondern nur die principiellen Fälle als Aufgaben hingestellt. Der Körperberechnung geht einiges über die Lage der Geraden und Ebenen voraus, aber z. B. nichts über die Bedingung senkrechter Lage einer Geraden zu einer Ebene. Etwas eingehender sind die Inhaltsberechnungen der einfachsten Körper behandelt. Uebungsaufgaben aufzustellen hielt der Verfasser für unnötig und empfiehlt statt ihrer Hinzunahme von Reidt's Sammlung. Hoppe.

Methodisches Lehrbuch der Elementar-Mathematik. Von Dr. Gustav Holzmüller, Director der Gewerbeschule (Realschule mit Fachclassen) zu Hagen i. W., Mitglied der Kais. Leop. Carol. Akademie der Naturforscher. Dritter Teil, Lehr- und Uebungsstoffe zur freien Auswahl für die Prima realistischer Vollanstalten und höherer Fachschulen, nebst Vorbereitungen auf die Hochschulen-Mathematik. Mit 160 Figuren im Texte. Leipzig 1895. B. G. Teubner. 224 S.

Dieser dritte Teil behandelt kein ganzes Lehrgebiet, sondern liefert für den Unterricht in Prima besonders interessante, zumteil sogar berühmte Sätze und Aufgaben, in der ersten Abteilung über Kegelschnitte, in der 2ten über Körper, in der 3ten über sphärische Dreiecke, in der 4ten über algebraische Analysis mit Anwendungen auf Geometrie und Mechanik. H.

K. Koppe's Geometrie zum Gebrauche an höheren Unterrichtsanstalten neu bearbeitet von Prof. Dr. Jos. Diekmann, Director des Progymnasiums mit Realabteilung in Viersen. Siebzehnte Auflage mit 155 Figuren und zahlreichen Uebungen und Aufgaben. I. Teil der Planimetrie, Stereometrie und Trigonometrie. Ausgabe für Gymnasien. Essen 1895. G. D. Bädeker. 190 S.

Digitized by Google

Die Planimetrie wird für Gymnasien und Realanstalten nahezu gleich behandelt, erst in der Stereometrie und Trigonometrie tritt eine Scheidung ein. Der Lehrgang in der Planimetrie ist der gewöhnliche; der Lehrstoff ist nirgends verkürzt, dagegen zugunsten der Anschauung und Orientirung weiter ausgeführt. Sehr verschieden davon ist bei der Stereometrie und Trigonometrie verfahren. Der Körperberechnung sind allerdings einige „Erklärungen" über die Lage der Geraden und Ebenen vorausgeschickt, welche in Ermangelung der vollständigen Lehre wenigstens soviel wirken, dass die Bestimmung der Körper nicht geradezu zum Unsinn wird. Die Trigonometrie beschränkt sich auf das rechtwinklige Dreieck. Die Winkelfunctionen werden also eingeführt, ein ersichtlicher Zweck folgt nicht; der Schüler muss sie als Curiosität merken. Der II. Teil, welcher jedoch nur für Realanstalten bestimmt ist, soll nun von beiden Mängeln frei sein, er soll die Lehren von der Lage der Geraden und Ebenen und die Berechnung des beliebigen Dreiecks vollständig geben. Hoppe.

Leitfaden der Arithmetik nebst Uebungsbeispielen — — Sechste unveränderte Auflage. —

Leitfaden der elementaren Mathematik — — Erster Teil Algebra. Dritte unveränderte Auflage —

Leitfaden der elementaren Mathematik. Von Adolf Sickenberger, k. Gymnasialprofessor und Rector der Luitpold-Kreisrealschule in München. Dritter Teil. Stereometrie — Trigonometrie. Zweite Auflage. München 1895. Theodor Ackermann. 196 + 75 + 103 S.

Die beiden ersten Lehrbücher sind in allen frühern Auflagen besprochen, s. litt. Ber. 46. S. 14. Das letzte lässt bemerken, dass es keine Form und Methode festhält, sondern jede da anwendet, wo sie gerade nützlich ist. Der Lehrgang ist im wesentlichen der gewöhnliche, nimmt eher mehr als weniger in sich auf, beobachtet aber überall die grösst mögliche Kürze des Ausdrucks, in einem Masse dass den Schülern kaum gelingen würde, ohne Beihülfe des mündlichen Schulunterrichts dem Deductionsgange, dem kein notwendiges Glied fehlt, zu folgen. Die Formulirung der Sätze in Worten wird meistens erst nach ihrer Herleitung aufgestellt. Auf jeden Abschnitt folgen Uebungen. H.

Digitized by Google

Schulphysik für die Gymnasien nach Jahrgängen geordnet. Von Prof. Dr. G. Brandt. Erster Teil. Mechanik und Wärmelehre, Magnetismus, Elektricität, Akustik und Optik. — Zweiter Teil. Wärmelehre, Meteorologie und Galvanismus, Mechanik und Akustik. Optik und astronomische Geographie. Anhang: Geschichtliches, Biographisches, Erklärung physikalischer Ausdrücke und Sachregister. — Berlin 1896. Leonhard Simion. 80 + 301 S.

Der erste Teil ist für die Classen Obertertia bis Untersecunda, der zweite für die obern Classen bestimmt. Es werden also einige in niederen Classen behandelte Lehrgegenstände in höhern Classen wieder aufgenommen. Muss man nun auch für diesen Fall zulassen, dass Begriffe das erstemal, namentlich in quantitativer Hinsicht, noch nicht in höchster Entwickelung gegeben werden, so erwächst uns doch wahrlich daraus nicht die Pflicht, elementare Grundbegriffe in Rücksicht auf den niedern Standpunkt der Classe geflissentlich in unklarer Fassung zu erhalten. Das geschieht aber hier in Betreff der Beziehung der Kraft zur Bewegung. Die Stelle lautet: „Die Ursache der Bewegungen oder Bewegungsänderungen nennen wir Kraft.“ Das Falsche wird neben dem Richtigen zur Auswahl gestellt, und keine Aeusserung, kein Beispiel gibt Entscheidung. Die vulgäre Redeweise, welche Anfang und Ende der Vorgänge causal verbindet, ist für Naturerkenntniss untauglich; daher ist es für den Unterricht in der Physik unerlässlich den exacten Begriff der Ursache oder Kraft zu geben und seine allgemeinen Consequenzen ans Licht zu ziehen. Folgende Sätze dürfen nicht verschwiegen werden. Die Bewegung wird in der exacten Lehre als Zustand der Körper betrachtet. Es ist Aufgabe der Physik die Zustandsänderungen, mithin auch die Bewegungsänderungen causal, mithin durch Kräfte zu erklären. Eine gleichmässig dauernde Bewegung, d. i. Beharrung, hat keine Ursache und bedarf keiner Erklärung. Die Wirkung einer Kraft ist mit der Kraft gleichzeitig und von gleicher Dauer; ist die Dauer null, so ist auch die Wirkung null. Dieser Forderung entspricht das Lehrbuch in keiner Weise. Das Genannte bleibt im 1. und 2. Teile dunkel. Was für irrige Vorstellungen dadurch erzeugt werden, zeigt besonders die Stelle auf zweiter Seite, wo unter den allgemeinen Eigenschaften der Körper auch die Trägheit **oder** das „Beharrungsvermögen“ aufgeführt werden. Es muss schon als unlogisch auffallen, dass die Trägheit ein Vermögen genannt wird. Indessen hier liegt die Schuld nicht an einem unpassenden Ausdruck, sondern an einem sachlichen Irrtum. Alle herangezogenen Beispiele von Erscheinungen und Versuchen werden wirklich als Nachweis eines Vermögens der Körper, also einer Fähigkeit auf ihre eigne Be-

Digitized by Google

wegung einzuwirken gedeutet. Zum Schlusse wird noch gesagt, die Eigenschaft der Körper sei die, dass jeder in seinem Zustande verharren wolle. Soll dieses Wollen einen Sinn haben, so müsste doch der Körper etwas für Erhaltung seines Zustandes getan haben, er müsste der Aenderung einen Widerstand entgegensetzen. Unkundige mögen freilich oft Anlass finden einen solchen Widerstand zu constatiren. Wenn aber ein Lehrer der Physik diesen täuschenden Schein für Wahrheit ausgibt, so kann man nur den Willen constatiren, dass die Classe in der Unwissenheit und Unklarheit, die sie einmal hat, verharre. Im ganzen Buche macht sich sonst keine ähnliche Sanction irregeleiteter Laienbeobachtung bemerklich, im Gegenteil findet man sehr häufig vorkommende Fehler anderer Lehrbücher gerade hier vermieden, freilich nicht durch Aufklärung, sondern Umgehung der betreffenden Punkte. Dagegen, dass für Begründung der Lehren weniger geschieht, als der mathematische Standpunkt der Classe zulassen würde, lässt sich nichts sagen, wenn in der Tat, wie der Verfasser darlegt, die Unterrichtszeit sehr knapp ist.

Hoppe.

Leitfaden der ebenen Geometrie für höhere Lehranstalten. Von Prof. H. Köstler. Mit vielen in den Text gedruckten Holzschnitten. 1. Heft. Congruenz. Vierte Auflage. Halle a. S. 1895. Louis Nebert. 66 S.

Dasselbe Heft dieses Buches ist bereits im 2. litterarischen Bericht Seite 14 in 2. Auflage besprochen. H.

Joh. Chr. Walberer's Anfangsgründe der Mechanik fester Körper mit vielen Uebungsaufgaben zum Schulgebrauche an Gymnasien und verwandten Lehranstalten neu bearbeitet von Dr. Georg Recknagel, Professor am R. Gymnasium zu Passau, correspondierendem Mitgliede der R. B. Akademie der Wissenschaften. Sechste Auflage. München 1889. Theodor Ackermann. 178 S.

Die 2. Auflage ist im 228. litt. Berichte S. 34 besprochen. Die daselbst genannten Fehler sind in spätern Auflagen berichtigt. Die gegenwärtige erscheint mit einem Vorwort des Bearbeiters, worin er namentlich die irrige Meinung widerlegt, dass Beweise durch Versuche ersetzt werden könnten, und den Fleiss motivirt, welchen er auf die theoretische Begründung verwandt. Welche Verbesserungen er in dieser Hinsicht in die neue Bearbeitung aufgenommen hat, ist im einzelnen nicht angegeben. Hoppe.

Digitized by Google

Mathematische und physikalische Bibliographie.

XLIX.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Bosscha, J., Christian Huygens. Rede, gehalten am 200. Gedächnisstage seines Lebensendes. Aus d. Holländ. v. Th. W. Engelmann. Leipzig, W. Engelmann. 1 Mk. 60 Pf.

Comenii, Joh. Amos, opera. Tom. I. Physicae ad lumen divinum reformatae synopsis. Disquisitiones de caloris et frigoris natura. Cartesius cum sua philosophia a mechanicis eversus. Cum versione germanica edita et notis illustrata a Jos. Reber. Giessen. E. Roth. 12 Mk.

Zeuthen, H. G., Geschichte der Mathematik im Altertum u. Mittelalter. Vorlesungen. Kopenhagen, Hoest & Sohn. 6 Mk.

Methode und Principien.

Bergmann, Frz., die vier Grundrechnungsarten, behandelt nach der Methode des Kopfrechnens. Wien, A. Pichler's Wwe. u. Sohn. 3 Mk.

Braun, Carl, über Kosmogonie vom Standpunkt christlicher Wissenschaft, nebst einer Theorie der Sonne und einigen darauf bezüglichen philosophischen Betrachtungen. 2. Aufl. Münster i. W., Aschendorff'sche B. 6 Mk.

Hahn, Wilh., die Entstehung der Weltkörper, im Sinne der bezügl. Rundschreiben Leos XIII untersucht und für Gebildete aller Stände beleuchtet. München, Nat. Verlagsanstalt. 4 Mk.

Mikos, Joh., Hypothesen über einige kosmologische und geologische Momente. Leipzig, O. Mutze. 2 Mk.

Digitized by Google

Nernst, W., u. A. Schönflies, Einführung in die mathematische Behandlung der Naturwissenschaften. Kurzgefasstes Lehrbuch der Differential- u. Integralrechnung mit besonderer Berücksichtigung der Chemie. München, Dr. E. Wolff. 8 Mk. 60 Pf.

Olivier, Jul. v., was ist Raum, Zeit, Bewegung, Masse? Was ist die Erscheinungswelt? München, L. Finsterlin. 1 Mk. 20 Pf.

Schröder, Ernst, Vorlesungen über die Algebra der Logik. 3. Bd. Algebra u. Logik der Relative. 1. Abtlg. Leipzig, B. G. Teubner. 16 Mk.

Simon, Max u. J. Kiessling, Didaktik u. Methodik des Rechen-, Mathematik- u. Physik-Unterrichts. München, C. H. Beck. 4 Mk. 50 Pf.

Lehrbücher.

Bork, Heinr., mathematische Hauptsätze für Gymnasien. Methodisch zusammengestellt. 2. Tl. Pensum des Obergymnasiums. Leipzig, Dürr'sche B. 2 Mk. 40 Pf.

Sammlungen.

Böhm, Hans, Auflösungen der Aufgaben im 4. Rechenbuche für österr. allgem. Volksschulen von Močnik. Wien, A. Sigl. 40 Pf.

Büttner, A., Kopfrechenschule. 1. Tl. Der Rechenstoff für Unter- und Mittelstufe mehrklass. Schulen, sowie das Notwendige für einfache Schulverhältnisse. 2. Aufl. Leipzig, Hirt & Sohn. Geb. 1 Mk. 25 Pf.

Büttner, A., u. E. Kirchhoff, Rechenaufgaben f. mehrklassige Schulen. Ausg. C. für solche Schulen bearb., deren Lehrplan das Rechnen mit gemeinen Brüchen der Decimalrechnung voranstellt. Facitbuch zu 3a u. 4a. Ebd. 50 Pf.

Dölp, H., Aufgaben zur Differential- u. Integralrechnung, nebst den Resultaten und den zur Lösung nöthigen theoretischen Erläuterungen. 6. Aufl. Giessen, J. Ricker. 3 Mk. 40 Pf.

Ducrue, Jos., Aufgaben aus der Mathematik u. Naturwissenschaft an den humanistischen Gymnasien, Real-Gymnasien und Realschulen Bayerns. Als Uebungsstoff für den Repetitions-Unterricht zusammengestellt. 6. Aufl. Würzburg, Stahel's Verl. Kart. 1 Mk.

Fenkner, Hugo, arithmetische Aufgaben. Unter besonderer Berücksichtigung von Anwendungen aus dem Gebiete der Geometrie, Physik u. Chemie. Pensum der Obersekunda der 9stufigen Anstalten. 2. Aufl. Braunschweig, O. Salle. 1 Mk.

Digitized by Google

Hartmann, Berthold, Rechenbuch für die allgemeine Fortbildungsschule. Methodisch geordnete Aufgabensammlung mit gleichmässiger Berücksichtigung der Rechenoperationen u. Sachgebiete. Ausg. für Schüler. Frankfurt a./M., Kesselring'sche Hofb. 50 Pf.

Hellermann. K. u. L. Krämer, Aufgaben für das Rechnen in deutschen Schulen. Bearb. mit gleichmässiger Berücksichtigung des mündlichen u. schriftlichen Rechnens. Berlin, L. Oehmigke's Verlag. Heft VIa. Ausg. für Mädchen-, Volks- u. Mittelschulen. 65 Pf.; Heft VIb. Ausg. für höhere Töchterschulen. 1 Mk.

Kleyer, A., Aufgabensammlung 1344.—1350. Hft. Stuttgart, J. Maier. à 25 Pf.

Kniess, K. u. O. Bachmann, Aufgabensammlung für das Rechnen mit bestimmten Zahlen, bearb. unter besonderer Berücksichtigung des für Lateinschulen vorgeschriebenen Lehrpensums. 3. Aufl. München, M. Kellerer. 1 Mk. 60 Pf.

Krauss, A., u. Chr. Renz, Rechenbuch für gewerbliche Fortbildungsschulen. Stuttgart, Bonz & Co. 40 Pf. Lehrerausg. 1 Mk. 20 Pf.

Lichtblau, W., u. B. Wiese, Rechenbuch für Lehrerseminare. 2. Tl. Für die Mittel- u. Oberstufe der Seminare. Breslau, F. Hirt. 2 Mk.

Lieb, A., Aufgaben zum schriftlichen Rechnen für die oberen Klassen von Töchterinstituten und für Mädchenfortbildungsschulen. 2. Aufl. Nürnberg, F. Korn. 30 Pf.

Morass, J. G., Rechenbuch für Oberklassen v. Mädchen- und höheren Mädchenschulen, für Mädchenfortbildungs-, Haushaltungs-, Koch u. Frauenarbeitsschulen, sowie für Geschäfts- u. Gewerbegehilfinnen. 3. Hft. Karlsruhe, O. Nemnich. 50 Pf. Lehrerheft 1 Mk.

Tabellen.

Hammer, E., Tafeln zur Berechnung des Höhenunterschieds aus gegebener horizontaler Entfernung u. gemessenem Höhenwinkel. Für Entfernungen v. 400 m und Höhenwinkel bis 25°. Stuttgart, J. B. Metzler. 1 Mk.

Weisbach, Jul., Tafel der vielfachen Sinus und Cosinus sowie der vielfachen Sinus versus von kleinen Winkeln, nebst Tafel der einfachen Tangenten, zum Gebrauche für praktische Geometer und Mechaniker überhaupt u. für Markscheider besonders. 5. Ausg. Berlin, Weidmann'sche B. 1 Mk.

Arithmetik, Algebra und reine Analysis.

Bretschneider, Mor., Lehr- u. Uebungsbuch d. Arithmetik

Digitized by Google

für den ersten Jahrgang der k. u. k. Militär-Unterrealschulen. Wien, Seidel & Sohn. Geb. 2 Mk.

Hartl, Hans, Uebungsbuch für den Unterricht in der allgemeinen Arithmetik und Algebra an Werkmeisterschulen, Baugewerkschulen u. verwandten Lehranstalten. Ausg. f. Oesterreich-Ungarn Wien, F. Deuticke. Geb. 2 Mk.

— dass. Ausg. f. Deutschland. Ebd. 2 Mk.

Kathrein, Rud., Lehrbuch der kaufmännischen Arithmetik. 2. Teile. 5. Aufl. Wien, A. Hölder. Geb. 6 Mk. 18 Pf.

Krause, Mart., Theorie der doppelperiodischen Funktionen e. veränderlichen Grösse. I. Bd. Leipzig, B. G. Teubner. 12 Mk.

Ruland, N., praktische Anleitung zum gründlichen Unterricht in der Buchstabenrechnung. Ausführliche Auflösung der in Heis' Sammlung von Beispielen u. s. w. enthaltenen Aufgaben. I. Tl. Die allgemeine Arithmetik u. Algebra. Zum Selbstunterricht bestimmt. 6. Aufl. bearb. v. Karl Ruland. Bonn, F. Cohen. 6 Mk.

Schlömilch, Osk., Compendium der höh. Analysis. 2. Bd. Vorlesungen üb. einzelne Teile der höh. Analysis. 4. Aufl. Braunschweig, Vieweg & Sohn. 9 Mk.

Schmidt, J. P., die Elemente der Algebra, für höh. Lehranstalten bearb. 6. Aufl. Trier, F. Lintz. 3 Mk.

Schurig, Rich., Katechismus der Algebra. 4. Aufl. Leipzig, J. J. Weber. Geb. 3 Mk.

Stolz, O., über den Convergenzkreis der umgekehrten Reihe. Wien, Gerold's Sohn. 40 Pf.

Wirtinger, Wilh., Untersuchungen über Thetafunctionen. Leipzig, B. G. Teubner. 9 Mk.

Geometrie.

Kantor, S., Theorie der endlichen Gruppen von eindeutigen Transformationen in der Ebene. Berlin, Mayer & Müller. 5 Mk.

Koppe's, K, Geometrie zum Gebrauche an höheren Unterrichtsanstalten, neu bearb. v. Jos. Diekmann. 17. Aufl. II. Tl. der Planimetrie, Stereometrie und Trigonometrie. Ausg. für Realanstalten; Ausg. für Gymnasien. Essen, G. D. Baedeker. Geb. à 3 Mk. 20 Pf.

Köstler, H., Leitfaden der ebenen Geometrie für höhere Lehranstalten. 1. Heft. Kongruenz. 4. Aufl. Halle, L. Nebert. Kart. 1 Mk. 25 Pf.

Mahler, E., Leitfaden für den Anfangs-Unterricht in der Planimetrie an Gymnasien, Lyceen, Lateinschulen u. verwandten Anstalten. Stuttgart. P. Neff 75 Pf; geb. 1 Mk.

Digitized by Google

Procháka, Frdr., ein Beitrag zur Kinematik der Ebene. Wien, Gerold's Sohn. 60 Pf.

Rupp, Otto, zur synthetischen Theorie der Kreis- u. Kugel-Systeme. Ebd. 40 Pf.

Sattler, A., Leitfaden der Geometrie. Für Volks-, Bürger- u. Fortbildungsschulen, höhere Mädchenschulen und die unteren Klassen anderer höherer Lehranstalten in 3 Stufen bearb. 2. u. 3. Stufe. (Geometrischer Elementarunterricht.) 4. Aufl. Braunschweig, Appelhans & Pfenningstorff. 60 Pf.

Spieker, Th., Lehrbuch der Stereometrie m. Uebungs-Aufgaben f. höhere Lehranstalten. Potsdam, A. Stein. 1 Mk. 60 Pf.

Praktische Geometrie, Geodäsie.

Fuhrmann, Arwed, die Nivellirinstrumente, ihre Benutzung, Prüfung u. Berichtigung. Leipzig, E. A. Seemann. 1 Mk. 25 Pf.

Höhenbestimmungen, trigonometrische u barometrische, (Normalnull-Höhen) in Württemberg, bezogen auf den einheitlichen deutschen Normalnullpunkt. Neckarkreis 5. Hft. Oberamtsbezirk Cannstatt. Bearb. v. C. Regelmann. Stuttgart, H. Lindemann. Kart. 50 Pf.

Jordan, W., Handbuch der Vermessungskunde. 1. Bd. Ausgleichungs-Rechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate. 4. Aufl. 2. Lfg. Stuttgart, J. B. Metzler. 5 Mk. 40 Pf.

Kraft, Gust., die Anfangsgründe der Theodolitmessung und der ebenen Polygonometrie. Mit e. Anhang: Von den Fehlern der Messungen. 3. Aufl. bearb. v. Schering. Hannover, Helwing's V. 7 Mk. 50 Pf.

Tapla, Thdr., die Messtisch-Praxis. Leitfaden für eine rationelle Durchführung der wichtigsten Messtisch-Operationen. Wien, F. Deuticke. 1 Mk. 50 Pf.

Mechanik.

Wagener, A., Elemente der Mechanik. Dessau, P. Baumann. 1 Mk. 60 Pf.

Technik.

Allihn, Max, die Grundlinien der Amateur-Photographie. Ein kleines Handbuch für Anfänger, wie auch für Geübte. Düsseldorf, E. Liesegang. 2 Mk. 50 Pf.

Digitized by Google

Dampfkessel-Explosionen, die, während des J. 1894. Hrsg. vom kaiserl. statist. Amt. Berlin, Puttkammer & Mühlbrecht. 1 Mk.

Encyklopaedie der Photographie. 17. Hft. Die Kunst des Vergrösserns auf Papieren u. Platten v. F. Stolze. Halle, W. Knapp. 6 Mk.

Grünwald, F., der Bau, Betrieb u. die Reparaturen der elektrischen Beleuchtungsanlagen. 5. Aufl. Ebd. 5 Mk.

Hammerl, Herm., I. Die elektrische Anlage im physikalischen Cabinete der k. k. Oberrealschule in Innsbruck. II. Ueber Apparate: a) Zur Sichtbarmachung des Verlaufes der Ströme in Gramme's Ringinductor bei Gleich-, Wechsel- u. Drehstrom; b) zur Erklärung des Gleichstrom- u. Drehstrommotors. Progr. Innsbruck, Wagner's Univ.-Bhlg. 1 Mk. 20 Pf.

Hartmann, W., dynamische Theorie der Dampfmaschinen. Berlin, J. Spinger. 5 Mk.

Heim, Carl, die Einrichtung elektrischer Beleuchtungsanlagen für Gleichstrombetrieb. 2. Aufl. Leipzig, O. Leiner. 10 Mk.

Herzog, Jos. u. Cl. P. Feldmann, Vertheilung des Lichtes und der Lampen bei elektrischen Beleuchtungsanlagen. Berlin, J. Springer. Geb. 3 Mk.

Holzt, A., Elektrotechniker. 9. u. 10. Hft. Leipzig, M. Schäfer. à 75 Pf.

Hoppe, Osc., das Maschinenwesen. Elementares Lehrbuch zur Einführung in die Maschinenwissenschaften, die Kinematik u. die Elastizitäts- u. Festigkeitslehre. Leipzig, A. Felix. 5 Mk. 40 Pf.

Hoyer, Egbert, kurzes Handbuch der Maschinenkunde. 8. Lfg. München, Th. Ackermann. 2 Mk. 40 Pf.

Krieg, M., Taschenbuch der Elektricität. Ein Nachschlagebuch und Ratgeber für Techniker, Praktiker, Industrielle u. technische Lehranstalten. 4. Aufl. Leipzig, O. Leiner. Geb. 4 Mk.

Liebetanz, Frz., die Elektrotechnik aus der Praxis für die Praxis. Düsseldorf, Gerlach & Co. 3 Mk.

Lueger's, O., Lexikon der Technik. 8. Abtlg. Stuttgart, Deutsche Verlagsanst. 5 Mk.

Meissner, G., Hydraulik. 2. Aufl. 4. u. 5. Lfg. Jena, H. Costenoble. à 3 Mk.

Miethe, Adf., Lehrbuch der praktischen Photographie. Halle, W. Knapp. Geb. 10 Mk.

Schiemann, Max, Bau u. Betrieb elektrischer Bahnen. Anleitung zu deren Projektirung, Bau u. Betriebsführung. Strassenbahnen. Leipzig, O. Leiner. 7 Mk. 50 Pf.

Thompson, Silvanus P., die dynamoelektrischen Maschinen. Ein Handbuch für Studierende der Elektrotechnik. 5. Aufl. Uebers.

Digitized by Google

von C. Grawinkel. Nach dem Tode d. Uebersetzers besorgt v. K. Strecker u. F. Vesper. (In 12 Hften.). 1. Hft. Haile, W. Knapp. 2 Mk.

Optik, Akustik und Elasticität.

Biese, Alf. Conr., Theorie der Fernrohre m. continuirlich variabler Vergrösserung. Berlin, Fussinger's B. 2 Mk.

Birch-Reichenwald Aras, Kr., Untersuchungen über Farbeninduktion. Christiania, J. Dybwad. 2 Mk.

Buchholz, Hugo, die Laplace'sche und die Salomon'sche Schattentheorie und das Saturnring-Schattenproblem. Wien, Gerold's Sohn. 1 Mk.

Jaumann, G., longitudinales Licht. Ebd. 90 Pf.

Lauenstein, R., die Festigkeitslehre. Elementares Lehrbuch für den Schul- und Selbstunterricht, sowie zum Gebrauch in der Praxis, nebst e. Anhang, enth. Tabellen der Potenzen, Wurzeln, Kreisumfänge u. Kreisinhalte. 3. Aufl. Stuttgart, Cotta Nachf. 3 Mk.

Erd- und Himmelskunde.

Beobachtungen der Temperatur des Erdbodens im Tiflisser physikalischen Observatorium in den J. 1888 u. 1889. Petersburg, Eggers & Co. 10 Mk.

Brünsicke, A, Flut und Ebbe. Gemeinfasslich dargestellt. Norden, H. Braams. 30 Pf.

d'Engelhardt, B., observations astronomiques, faites dans son observatoire à Dresde. 3. partie. Dresden, W. Baensch. Geb. 18 Mk.

Förster, W. u. E. Blenck, populäre Mittheilungen zum astronomischen u. chronologischen Theile des preussischen Normalkalenders f. 1896. Berlin, kgl. statist. Bureau. 1 Mk.

Fritsche, H., über den Zusammenhang zwischen der erdmagnetischen Horizontalintensität und der Inclination. Petersburg, Selbstverlag. 2 Mk.

Giberne, Agnes, das Luftmeer. Uebers. v. E. Kirchner. Berlin, S. Cronbach. 4 Mk. 50 Pf.

Grossmann, L., praktische Anleitung zur Berechnung der Konstanten der Bessel'schen Formel für den täglichen und jährlichen Gang periodischer Elemente. Altona, Schüter'sche B. 1 Mk.

Hann, J., der tägliche Gang des Barometers an heiteren u. trüben Tagen, namentlich auf Berggipfeln. Wien, Gerold's Sohn. 1 Mk. 30 Pf.

Digitized by Google

Jahrbuch, deutsches meteorologisches, f. 1894. Beobachtungssystem des Königreich Sachsen. Ergebnisse der meteorologischen Beobachtungen i. J. 1894. Hrsg. v. Paul Schreiber. Jahrbuch des kgl. sächs. meteorolog. Institutes. XII. Jahrg. 1894. 1. Hälfte. Chemnitz, M. Bülz 10 Mk.

Kobold, Herm., Untersuchung der Eigenbewegungen des Auwers-Bradley-Catalogs nach der Bessel'schen Methode. Leipzig, W. Engelmann. 16 Mk.

Littrow, Wunder des Himmels. 8. Aufl. 13. u. 14. Lfg. Berlin, Dümmler's Vlg. à 40 Pf.

Liznar, J., die Vertheilung der erdmagnetischen Kraft in Oesterreich-Ungarn zur Epoche 1890. O nach den in den Jahren 1890—1894 ausgeführten Messungen. I. Th. Erdmagnetische Messungen in Oesterreich, ausgeführt in d. J. 1889—93 v. J. Liznar. Wien, F. Tempsky. 12 Mk.

Niessl, G., Untersuchungen über den Einfluss der räumlichen Bewegung des Sonnensystems auf die Vertheilung der nachweisbaren Meteorbahnen. Wien, Gerold's Sohn. 2 Mk.

Sternkarte, drehbare. 8. Aufl. Mit Text auf der Rückseite. Ravensburg, O. Maier. 50 Pf.

Tirchner, Aug., la configuration du système solaire et les figures décrites par les corps célestes. Le mouvement apparent de la sphère céleste. Le mouvement apparent du soleil. Leipzig, G. Fock. 1 Mk. 50 Pf.

Veröffentlichungen des kgl. preuss. meteorologischen Instituts. Hrsg. v. Wilh. v. Bezold. Ergebnisse der Niederschlagsbeobachtungen i. J. 1893. Berlin, Asher & Co. 10 Mk.

Voller, A., das Grundwasser in Hamburg. Mit Berücksichtigung der Luftfeuchtigkeit, der Niederschlagungen und der Flusswasserstände, der Luft- und Wassertemperaturen, sowie der Bodenbeschaffenheit dargestellt. 3. Hft. enth. Beobachtgn. aus den J. 1893 u. 1894. Hamburg, Gräfe & Sillem. 5 Mk.

Weyer, G. D. E., die magnetische Declination und ihre säculare Veränderung f. 48 Beobachtungsörter, berechnet als period. Function f. jeden einzelnen Ort aus den daselbst angestellten Beobachtungen. Leipzig, W. Engelmann. 8 Mk.

Nautik.

Segel-Handbuch für die Küste von Deutsch-Ostafrika u. die Insel Zanzibar. Hrsg. v. Reichs-Marine-Amt. Berlin, D. Reimer. Geb. 3 Mk.

Digitized by Google

Physik.

Bachmann, F. u. W. Breslich, Lehrbuch der Physik und Chemie für höhere Mädchenschulen, Lehrerinnen-Seminarien und Fortbildungsanstalten. 3. umgearb. Aufl. Berlin, Mittler & Sohn. 2 Mk. 40 Pf.

Baenitz, C., Lehrbuch der Physik in populärer Darstellung. Nach method. Grundsätzen für gehob. Lehranstalten, sowie zum Selbstunterricht unter Mitwirkung v. W. Weiler bearb. 12. Aufl. Bielefeld, Velhagen & Klasing. 2 Mk. 50 Pf.

Beathie, J. C., über die Beziehung zwischen der Widerstandsänderung v. Wismuthplatten im Magnetfeld und dem rotatorischen oder transversen Effect. Wien, Gerold's Sohn 60 Pf.

Beobachtungen des Tiflisser physikalischen Observatoriums i. J. 1893. Petersburg, Eggers & Co. 10 Mk.

Brandt, G., Schulphysik für die Gymnasien, nach Jahrgängen geordnet. 2. Tl. Obersekunda: Wärmelehre, Meteorologie und Galvanismus. Unterprima: Mechanik und Akustik. Oberprima: Optik und astronom. Geographie. Anhang: Geschichtliches, Biographisches. Erklärung physikal. Ausdrücke und Sachregister. Berlin, L. Simion. Kart. 2 Mk.

Cohen, E., Meteoreisen-Studien IV. Wien, A. Hölder. 1 Mk.

Encyklopädie der Elektrochemie. 3. Bd. Neuerungen in der quantitativen Analyse durch Elektrolyse von Alex. Classen. Halle, W. Knapp. 3 Mk.

dass. 5. Bd. Die Sekundär-Elemente. Auf Grundlage der Erfahrung dargestellt v. Paul Schoop. II. Tl., enth. die Fabrikation v. Blei-Sammlern. Ebd. 8 Mk.

Favarger, A., die Elektricität u. ihre Verwerthung zur Zeitmessung. Uebersetzg. v. M. Loeske. Bautzen, E. Hübner. 7 Mk.

Fortschritte, die, der Physik im J. 1893. Dargestellt von der physikal. Gesellschaft zu Berlin. 49. Jahrg. 2. u. 3. Abth. Braunschweig, Vieweg & Sohn. (2. Physik des Aethers. Red. v. Rich. Börnstein. 30 Mk. — 3. Kosmische Physik. Red. v. Rich. Assmann. 25 Mk.)

Frank, Max, das thermo-elektrische Potential. Untersuchungen über die Art der Beziehung zwischen Wärme u. Elektricität. München, J. A. Finsterlin. 1 Mk. 50 Pf.

Gold, Frz., über den Sahulka'schen Gleichstrom im Wechselstromlichtbogen, Eisen-Kohle. Wien, Gerold's Sohn. 40 Pf.

Grummach, Leo, Lehrbuch der magnetischen und elektrischen Maasseinheiten, Messmethoden u. Messapparate. Stuttgart, F. Enke. 16 Mk.

Digitized by Google

Handbuch der Physik. 25. u. 26. Lfg. Breslau, E. Trewendt. à 3 Mk. 60 Pf.

Jäger, Gust., über die elektrolytische Leitfähigkeit von wässerigen Lösungen, insbesondere deren Abhängigkeit von der Temperatur. Wien, F. Tempsky. 40 Pf.

—, zur Theorie der Dissociation der Gase. (2. Mittheilung.) Wien, Gerold's Sohn. 30 Pf.

Jahrbuch der Erfindungen u. Fortschritte auf den Gebieten der Physik, Chemie u. chemischen Technologie, der Astronomie u. Meteorologie. Hrsg. v. A. Berberich, G. Bornemann u. Otto Müller. 31. Jahrg. Leipzig, Quandt & Händel. 6 Mk.

Kapp, Gisb., elektrische Kraftübertragung. Ein Lehrbuch für Elektrotechniker. Deutsche Ausg. v. L. Holborn u. K. Kahle. 2. Aufl. Berlin, J. Springer. Geb. 8 Mk.

Klemencic, Ign., über den Energieverbrauch bei der Magnetisirung durch oscillatorische Condensatorenentladungen. Wien, Gerold's Sohn. 60 Pf.

Lampa, Ant., zur Theorie der Dielektrica. Ebd. 80 Pf.

Lang, V. v., Beobachtungen über die Widerstandsänderung des Contactes zweier Leiter durch elektrische Bestrahlung. Ebd 30 Pf.

Le Blanc, Max, Lehrbuch der Elektrochemie. Leipzig, O. Leiner. 4 Mk. 80 Pf.

Lecher, Ernst, über das magnetische Kraftfeld einer von elektrischen Schwingungen durchflossenen Spirale. Wien, Gerold's Sohn. 40 Pf.

Mann, Charles Riborg, über Entmagnetisirungsfactoren kreiscylindrischer Stäbe. Berlin, Mayer & Müller. 1 Mk. 20 Pf.

Müller-Pouillet's Lehrbuch der Physik u. Meteorologie. 9. Aufl. v. Leop. Pfaundler unter Mitwirkung v. Otto Lummer. II. Bd. 1. Abth. 2. Lfg. Braunschweig, Vieweg & Sohn. 4 Mk. 50 Pf.

Ostwald, W., Elektrochemie. Ihre Geschichte und Lehre. Leipzig, Veit & Co. 28 Mk.

Schwartze, Th., E. Japing u. A. Wilke, die Elektricität. 5 Aufl., neu bearb. v. A. v. Urbanitzky. Wien, A. Hartleben. Geb. 1 Mk. 50 Pf.

Simon, Ernst, über den Einfluss der Strahlen grosser Brechbarkeit auf das elektrische Leitungsvermögen verdünnter Gase. Wien, Gerold's Sohn. 90 Pf.

Steinvorth, H., Beiträge zur Frage nach den Irrlichtern. Lüneburg, Herold & Wahlstab. 1 Mk.

Streintz, Frz., Polarisation und Widerstand einer galvanischen Zelle. Wien, Gerold's Sohn. 80 Pf

Digitized by Google

Sumpf, K., Anfangsgründe der Physik für den Gebrauch an landwirtschaftlichen Schulen bearb. Hrsg. durch A. Pabst. Hildesheim. A. Lax. Geb. 1 Mk. 50 Pf.

— Grundriss der Physik. Ausg. A. 5. Aufl. bearb. von A. Pabst. Ebd. 3 Mk. 20 Pf.

— Naturlehre. 2. Aufl., als Leitfaden u. Uebungsbuch für den Physikunterricht neu bearb. v. A. Pabst. Ebd. Kart. 80 Pf.

Tuma, Jos., Messungen m. Wechselströmen v. hoher Frequenz. Wien, F. Tempsky. 50 Pf.

Tumlirz, O., über die Verdampfungswärme von Lösungen. Wien, Gerold's Sohn. 20 Pf.

Wiedemann, Gust, die Lehre von der Elektricität. 2. Aufl. 3. Bd. Braunschweig, Vieweg & Sohn. 28 Mk.

Wulf, Thdr., über die Bestimmung der Frequenz von Wechselströmen. Wien, Gerold's Sohn. 20 Pf.

Vermischte Schriften.

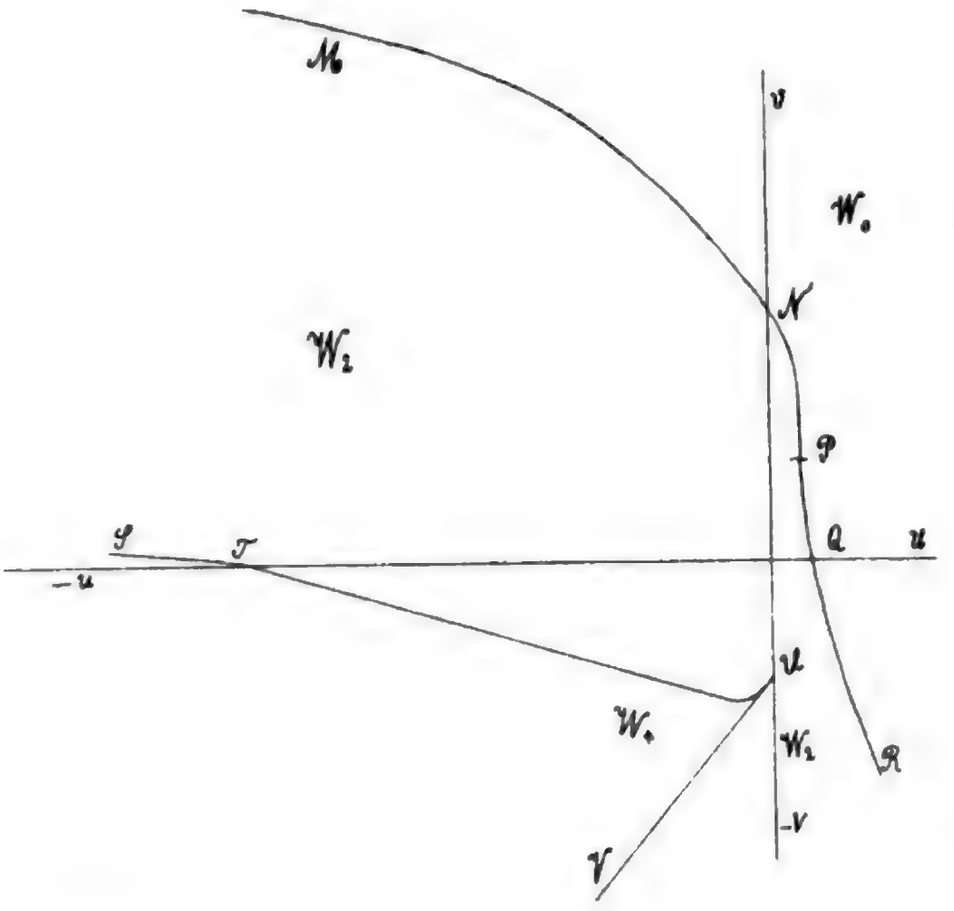
Berichte der sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften. Mathem.-physik. Classe. 1895. II. u. III. Leipzig, S. Hirzel. à 1 Mk.

Ostwald, W., Klassiker der exakten Wissenschaften. Nr. Leipzig, W. Engelmann. Kart. 63. Zur Entdeckung des agnetismus. Abhandlungen v. Hans Chrn. Oersted und oh. Seebeck. (1820—1821.) Hrsg. von A. J. v. Oet- 1 Mk. 40 Pf. — 64. Ueber die vielfach periodischen Funcveier Variabeln, auf die sich die Theorie der Abel'schen deuten stützt. Von Prof. C. C. J. Jacobi. (Crelle's Journe u. angewandte Mathematik Bd. 13, 1834.) Hrsg. v. H. Weber. Aus dem Lat. übers. v. A. Witting. 70 Pf. — 65. Abhandlungen üb. die Functionen zweier Variabler u. 4 Perioden, welche die Inversen sind der ultra-elliptischen Integrale 1. Klasse. Von Prof. Geo. Rosenhain. (1851). Hrsg. v. H. Weber. Aus dem Franz. übers. v. A. Witting. 1 Mk. 50 Pf.

Sitzungsberichte, Wiener. Math.-naturw. Classe. Wien, F. Tempsky. Abth. IIa. 104. Bd. 1. u. 2. Hft. 3 Mk. 30 Pf. — Abth. IIb. 104. Bd. 3. u. 4. Hft. 2 Mk. 10 Pf.

Wolf, R., Taschenbuch für Mathematik. 6. Aufl. 3. u. 4. Lfg. Zürich, F. Schulthess. à 1 Mk. 20 Pf.

Zeitschrift für Mathematik u. Physik. Suppl. z. 40. Jahrg. Der Supplemente XII. (Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik. 7. Hft.) Leipzig, B. G. Teubner. 7 Mk. 60 Pf.



XIV. **Hoppe:** Bezirke der Wurzelformen.

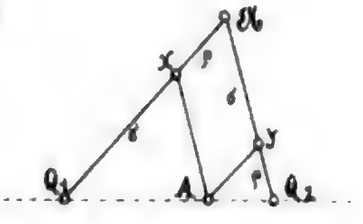


Fig. 1.

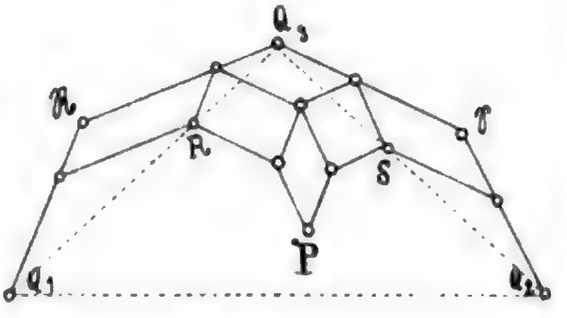


Fig. 2.

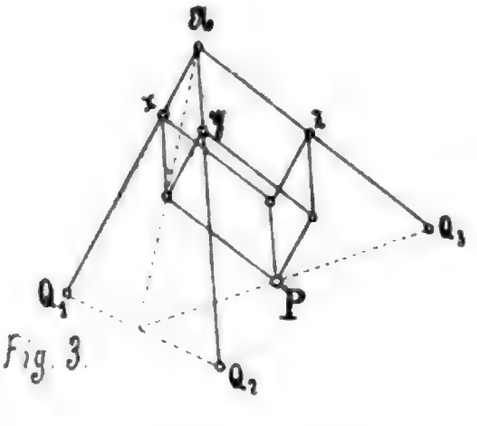


Fig. 3.

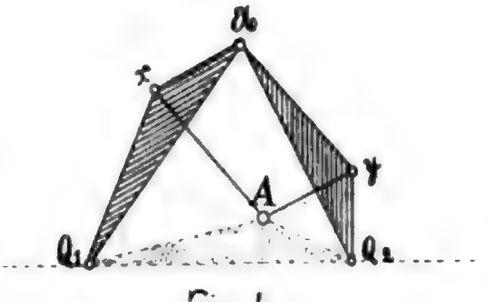


Fig. 4.

XV. **Kleiber:** Amsler'sche Flächensätze im Gebiete affin veränderlicher Systeme.

Digitized by Google

Verlag von Friedr. Vieweg & Sohn in Braunschweig.
(Zu beziehen durch jede Buchhandlung)
Soeben erschien:

Lehrbuch der Algebra.

Von **Heinrich Weber,**
Professor der Mathematik an der Universität Göttingen.

In zwei Bänden. **Erster Band.** Mit 28 eingedruckten Abbildungen.
gr. 8 geh. **Preis 16 Mark**

Verlag von Friedr. Vieweg & Sohn in Braunschweig.
(Zu beziehen durch jede Buchhandlung)
Soeben erschien:

Die Fortschritte der Physik im Jahre 1889.

Dargestellt von der Physikalischen Gesellschaft zu Berlin.
Fünfundvierzigster Jahrgang.
Erste Abtheilung, enthaltend: Physik der Materie. Redigirt von **Richard Börnstein.** gr. 8. geh. **Preis 22,50 Mark.**

Baumgärtner's Buchhandlung, Leipzig.

Durch jede Buchhandlung zu beziehen:

Die Geometrie der Lage.

Vorträge

von

Professor Dr. Th. Reye,
ord. Professor an der Universität Strassburg.

Abth. II (3. Aufl.). Mit 26 Textfiguren. Broch. 9 *M.*, in Halbfranz gebunden 11 *M.*

Abth. III (neu). Broch. 6 *M*, in Halbfranz gebunden 8 *M.*

Bereits früher erschien:

Abth. I (3. Aufl.). Mit 92 Textfiguren. Broch. 7 *M.*, in Halbfranz gebunden 9 *M.*

Aus einer Besprechung von Guido Hauck:

„Unserem Verfasser gebührt das Verdienst, das System jenes grossen Geometers (Staudt) von seinen Einseitigkeiten befreit und dadurch nicht nur schmackhaft, sondern vor Allem für die Weiterförderung der Wissenschaft nutzbar gemacht zu haben. Diese hat denn auch in den letzten Decennien eine überaus fruchtbare Weiterentwickelung erfahren, an welcher der Verfasser durch seine bahnbrechenden Arbeiten in hervorragender Weise betheiligt war. Es sei dabei namentlich auf den Ausbau der Liniengeometrie hingewiesen .... Das auch bereits ins Französische und Italienische übersetzte Werk stellt **in dieser seiner neuen Auflage das vollständigste Lehrbuch der neueren Geometrie dar.**"

Digitized by Google

Neuer Verlag der Jos. Kösel'schen Buchhandlung in Kempten.
Zu beziehen durch alle Buchhandlungen des In- und Auslandes.

Die Grundlehren der ebenen Trigonometrie.

Ein Leitfaden für den Unterricht
mit
Uebungsaufgaben
von

Jos. Lengauer,
Prof. am k. Gymnasium zu Würzburg.

Mit zahlreichen Figuren im Texte. 8°. 52 S.
Preis broch. 80 ₰, in Ganzleinwand *M* 1.10.

INHALT.

Seite

XX. Ueber den Flächen- und Rauminhalt der durch Bewegung von Curven und Flächen erzeugten Flächen- und Raumgrössen. (Fortsetzung.) Von Chr. Nehls 33

XXI. Mathematisch-Geschichtliches aus dem Codex latinus Monacensis No. 14908. Von M. Curtze 38

XXII. Zwei algebraische Aufgaben mit Lösungen Von Amthor und C. Davids 40

XXIII. Miscellen.

1. Einige quantitative Fragen über zwölf Kugeln, die eine Kugel berühren. Von R. Hoppe 43
2. Ein Beitrag zur Lösung des Problems der Dreiteilung des Winkels. Von Lothar v. Köppen 44

Greifswald, gedruckt bei F. W. Kunike.

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

ROOM USE ONLY

Digitized by Google